

Reg 832

FORELESNINGER

holdt 1933^{II} og 1934^I

over

MAKRODYNAMIKK

av

PROFESSOR RAGNAR FRISCH

a 259
3/25.

~~456~~

5/-

FORELESNINGER

holdt 1933^{II} og 1934^I

over

MAKRODYNAMIKK

av

PROFESSOR RAGNAR FRISCH

Handwritten circular stamp or mark.

Kap. 85. MAKRODYNAMIKK FOR ØKONOMISKE SYSTEMER.
(Forelesninger påbegynt høstsem. 1933.)

850. Hvad er økonomisk makrodynamikk?

8500. Innledende bemerkninger om den makrodynamiske teoris plass i systemet.

I de forelesninger over teoretisk økonomikk som professor Frisch holdt 1928-29 finnes en liste med systematisk inndeling av den teoretiske økonomikk i hovedavsnitt og underavsnitt. Denne liste omfatter dels avsnitt av den teoretiske økonomikk som der allerede er forelest over og dels en rekke avsnitt som ennå ikke er kommet til behandling. Blndt de hovedavsnitt som ennå ikke er behandlet er kap. 8: Den økonomiske mekanisme under tidskrevende produksjon. Under dette avsnitt vil den dynamiske betraktningmåte måtte komme i forgrunnen. Dette hovedavsnitt kan inndeles i følgende kapitler:

80. Generell kinematikk.
Sammenhengen mellom inntak, uttak, beholdning etc. (det som i de tidligere forelesninger er kalt: Kinematisk analyse av en varierende lagerbeholdning.)
81. Spesiell kinematikk.
Tableaux economiques, omsetningsligningen og kinematiske relasjoner innenfor andre områder av økonomikken.
82. Kapitalrenteproblemet.
Omveisproduksjonen, den produktive lagring.
83. Konjunkturanalysen og dens metoder.
Historikk over kriseteoriene. Statistiske metoder som har vært anvendt.
84. Mikrodynamikk for økonomiske systemer.
85. Makrodynamikk for økonomiske systemer.
86. Impulsproblemet. Tilfeldige støt og evolutoriske krefter.
87. Risikobæringen. Den stokkastiske dynamikk.
88. De økonomiske institusjoners påvirkelighet. Propagandaens dynamikk.
89. Planøkonomiens dynamikk.

8501. Kort rekapitulasjon av forskjellen mellom statikk og kinematikk-dynamikk.

(Se herom også professor Frisch's avhandling: "Statikk og dynamikk ... " i Nationaløkonomisk tidsskrift 1929; dessuten foredrag ved Nordisk nationaløkn. møte i Stockholm, trykt i møtets forhandlinger 1931, og Universitetets radioforedrag serie B. 1932.)

I skjelningen mellom de tre begreper statikk, kinematikk og dynamikk gjennomfører vi først en todeling, idet vi på den ene side oppstiller statikk, på den annen side kinematikk-dynamikk. Etterpå innfører vi et tilleggskriterium for skjelningen mellom kinematikk og dynamikk.

Den prinsipielle forskjell mellom statikk og dynamikk-kinematikk er ikke en forskjell i fenomenenes art, men en forskjell i måten å studere dem på. Det er ikke en forskjell mellom to slags fenomener, men en forskjell mellom to slags tenkemåter. Det går altså ikke an å tale om statiske og dynamiske fenomener. Derimot kan man tale om stasjonære og foranderlige (evolutoriske) fenomener. Man kan altså tenke sig en statisk eller en dynamisk teori om et stasjonært fenomen, og man kan tenke sig en statisk eller en dynamisk teori om et foranderlig fenomen. Den første betingelse for klarhet i behandlingen av de teoretisk-økonomiske lover er at man skarp holder begrepene statisk og stasjonært, dynamisk og evolutorisk ut fra hverandre. Sammenblanding av disse begreper er meget almindelig i den økonomiske litteratur. Nesten bestandig når en forfatter taler om et "statisk fenomen" kan man uten å forandre meningen erstatte dette uttrykk med "et stasjonært fenomen".

All teori undersøker hvorledes en hel del ting henger sammen, påvirker hverandre. Den oppstiller visse relasjoner. Vi innfører f. eks. en del størrelser x, y, z osv. (priser, omsatte kvanta etc.) og postulerer så at der mellom disse størrelser består visse relasjoner. La f. eks. p være prisen på et gode og x det efterspurte kvantum. Hvis vi antar at der eksisterer en efterspørselskurve, så er det ensbetydende med at vi postulerer eksistensen av en relasjon av formen $x = f(p)$; til en gitt pris p svarer et gitt kvantum x , d.v.s. x er en funksjon av p . Efterspørselsfunksjonen kan selvfølgelig være langt mere komplisert. Kvantum kunde f. eks. tenkes å være en funksjon, ikke bare av p , men også av prisen q på et annet gode, eventuelt også av andre ting $\cdot x = g(p, q, \dots)$.

Relasjoner som de her nevnte gir uttrykk for en statistisk lovmessighet fordi samtlig inngående størrelser refererer sig til ett og samme tidspunkt.

Det essensielle ved en dynamisk teori er at de relasjoner vi opererer med, inneholder størrelser som refererer sig til forskjellige tidspunkter. En og samme relasjon inneholder altså størrelser der refererer sig til forskjellige tidspunkter. Dette er det karakteristiske for de dynamiske relasjoner. Vi kan f. eks. gå ut fra at det på et tidspunkt t omsatte kvantum x_t er en funksjon ikke bare av prisen p_t på vedkommende gode på dette tidspunkt, men også av prisen p_{t-1} på vedk. vare på det foregående tidspunkt.

$$x_t = h(p_t, p_{t-1}, \dots)$$

Hvis teorien inneholder flere ligninger, må disse, - for at systemet skal være dynamisk, - være av den art at det ikke går an å eliminere de variable som refererer sig til andre tidspunkter enn t . Hvis dette kunde gjøres, vilde jo ligningssystemet redusere sig til et statistisk system.

En dynamisk relasjon kan som regel omskrives så den kommer til å inneholde veksthastigheten med hensyn på tiden. F. eks. la $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ betegne veksthastigheten av prisen med hensyn på tiden, og la oss anta at det efterspurte kvantum x er en funksjon av prisen selv, p , og dessuten av \dot{p} . Altså $x = F(p, \dot{p})$. Dette er et eksempel på en dynamisk relasjon.

La oss tenke oss den siste relasjon løst med hensyn på \dot{p} . Vi ser da at dersom x og p er gitt, så er dermed bestemt i hvilken retning og med hvilken fart prisen vil forandre sig. Det å forutsette en dynamisk efterspørselslov som den ovenfor antydde, er altså ensbetydende med å forutsette at situasjonen på et visst tidspunkt bestemmer et visst trekk ved utviklingens gang fremover. Dette er et særkjenne ved de dynamiske lover. Statikken behandler tilstandslover, dynamikken utviklingslover.

Vi har foran utviklet den prinsipielle forskjell mellom statikk på den ene side og kinematikk-dynamikk på den annen side. Vi vil nu tilføie et tilleggs-kriterium for den spesielle sonndring mellom kinematikk og dynamikk.

Den kinematiske og den dynamiske analyse har et fellestrekk, nemlig det at de begge analyserer sammenhengen mellom "idag" og "igår". Såvel i kinematiske som i dynamiske relasjoner inngår i en og samme ligning størrelser refererende sig til forskjellige tidspunkter. Forskjellen mellom kinematikk og dynamikk ligger i følgende: De relasjoner som forekommer i en kinematisk analyse, er relasjoner mellom "idag" og "igår" som følger direkte av definisjonen på de inngående størrelser, av definisjonen på veksthastighetene osv. De kinematiske relasjoner er altså ligninger om hvis riktighet der overhodet ikke kan diskuteres, ligninger hvis ndiaktige form kan utledes med logisk nødvendighet, såsant bare de inngående størrelser er riktig definert. Eksempelvis vi betrakte omsetningsligningen hos Irving Fisher. Vi definerer pengemengden = M , kredittmidlenes mengde = M' , pengenes omløpshastighet = V , kredittmidlenes omløpshastighet = V' , prisnivået = P , omsatt varemengde = Q (også ofte betegnet T) og skriver ligningen: $PQ = MV + M'V'$. Denne ligning er essensielt kinematisk. Dens riktighet er bare avhengig av definisjonen av de inngående størrelser. Når alle størrelsene er riktig definert, kan man f. eks. ikke diskutere hvorvidt koeffisienten foran leddet MV skal være 1 (som i den ovenfor anførte ligning), eller for eks. bare 0,9. Ligningen må gjelde identisk, med den anførte konstant lik 1.

I motsetning hertil er en dynamisk ligning en relasjon hvis ndiaktige form ikke direkte følger av begrepenes definisjon, men hvis konstanter blir avhengig av menneskenes måte å reagere på og av de tekniske betingelser osv. La oss f. eks. se på en dynamisk efterspørselslov: $x = F(p, \dot{p})$. Apriori kan vi ikke avgjøre rent kvantitativt hvilket avhengighetsforhold der er mellom x og p . Størrelsen av efterspørselens elasticitet følger m. a. o. ikke av selve begrepenes definisjon. Det kan f. eks. diskuteres om hvorvidt elasticiteten er lik 1 eller lik 0,9. Det er en størrelse som avhenger av tid og sted.

8502. Spesifikasjons- og determinasjonsproblemet.

I aviser og offentlig diskusjon kan man se fremsatt de mest forskjelligartede opfatninger om konjunkturbevegelsen og dens "årsaker". Nesten bestandig gir disse populære forklaringer et feilaktig bilde av forholdet fordi vedkommende bare ser en enkelt side ved problemet og tror at det rummet hele problemet. Det er historien om de tre blinde menn og elefanten som gjentar sig:

Tre blinde menn skulde beskrive elefanten. Det er et tre, sa den ene, han hadde fått tak i elefantens ene ben. Nei, det er en fugl, sa den annen, han kjente elefantørene. Men den tredje sa det var en slange, ti han hadde fått tak i snabelen.

Hvis man virkelig vil forsøke å forklare konjunkturbevegelsene i det økonomiske system, må man se på systemet i dets helhet. Man må studere spenningsforholdet mellom de forskjellige faktorer. Det nytter ikke å forsøke å finne en

særskilt "årsak" til bevegelsen. Forklaringen må søkes ved en nærmere analyse av den lovmessighet hvormed alle tingene gjensidig virker på hverandre og gjensidig bestemmer hverandres utvikling. Kun på denne måte kan konjunkturproblemet behandles som et determinert problem.

Det første vi må gjøre er å gjøre oss klar over hvilke variable som skal inngå i analysen. Vi må nøie definere disse størrelser. Vi må lage oss en liste over de variable som vi trekker inn, en liste som vi ikke har lov til å gå utenfor. Dette er spesifikasjonsproblemet. Når listen er opstillet, må vi aldri tillate oss "i smug" å trekke inn en ny variabel til hjelp for det videre resonnement når vi er kommet til et vanskelig punkt. Denne feil begås hyppig i konjunkturteorien. Man har f. eks. forklart hvorledes en konjunktur~~opgang~~ kommer istand og hvorledes den utvikler sig. Men så opstår det problem hvorledes omslaget nedad setter inn. For å forklare dette griper man som oftest en ny ting som opprinnelig ikke inngikk i resonnementet, men som er bekvem å ty til som en forklaring.

Dette at man ikke "i smug" må trekke inn nye variable er naturligvis ikke ensbetydende med at man ikke under studiet kan utvide problemkretsen. Det viktige er bare at når en ny variabel trekkes inn, så må dette gjøres åpenlyst. Man må være fullt klar over at man derved har øket listen over variable og dermed også øket antallet av de ting som skal forklares.

Nøie forbundet med spesifikasjonsproblemet er determinasjonsproblemet. Dette består i at jeg legger op alle de teoretiske relasjoner som jeg vil operere med. Jeg sier eksempelvis: I min krets av spesifiserte variable har jeg efterspørselen x etter et gode og efterspørselen y etter et annet gode, samt prisene p og q på de to goder. Så postulerer jeg f. eks. at der mellom x og p skal bestå en statistisk efterspørselslov av formen

$$(1) \quad x = f(p)$$

og mellom y og q en dynamisk efterspørselslov:

$$(2) \quad y = F(p, q, \dot{q})$$

Vi har altså innført to relasjoner (1) og (2) mellom de fire variable x , y , p og q . Det å innføre disse to relasjoner kan selvfølgelig kaste et visst lys over problemet om de fire variable og deres utvikling, men det er ikke nok til å løse problemet. Hvis problemet skal kunne løses som et determinert problem, må nemlig antallet av hinannep uavhengige ligninger være lik antallet av ukjente, hverken større eller mindre.

Vi skal se på et eksempel som viser hvad der ligger i determinasjonsproblemet.

Jeg betrakter markedet for en enkelt vare, kvantum efterspurt = x , pris = p . Sett at vi har observert en tidskurve for p og en for x (fig. 1 og 2), og vi vil forsøke å forklare disse observerte bevegelser.

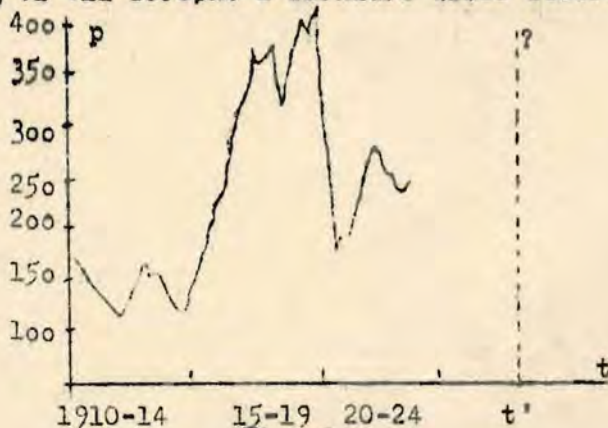


Fig. 1.

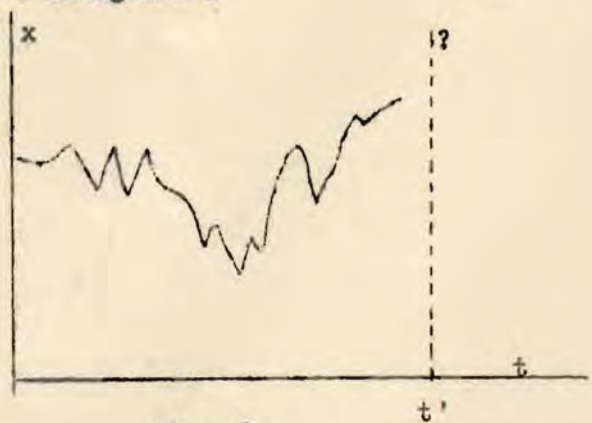


Fig. 2.

Som et første skritt i denne retning la oss trekke inn den omstendighet at der eksisterer en viss efterspørselskurve i markedet. La kurvens ligning være (1).

Kurven er sannsynligvis fallende, se fig. 3.

Dette ser ut til å stemme med mine to tidskurver i fig. 1 og 2. Disse viser nemlig at når prisen er høi, er kvantum lite og omvendt.

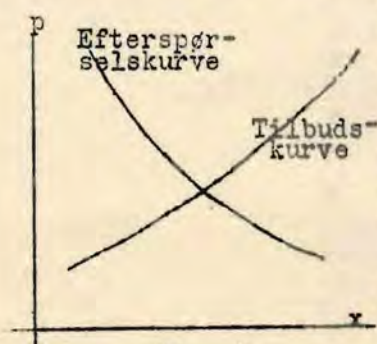


Fig. 3.

I og for sig er dette et skritt henimot en forklaring, men det gir ingen fullstendig determinert teori. Hvis jeg spør hvor stor prisen og kvantumet vil bli på tidspunktet t' , gir teorien, i den form hvor i jeg hittil har betraktet den, intet svar. Den inneholder nemlig kun en relasjon mellom to variable, slik at der fremdeles er en frihetsgrad (en ubestemt-hetsgrad) tilstede. Den statiske efterspørselslov

sier bare at hvis prisen på tidspunktet t' er så og så stor, så vil kvantum bli det og det, eller omvendt: Hvis det omsatte kvantum skal bli så og så stort, så må prisen være så og så stor, alt forutsatt at teorien om den fallende efterspørselskurve holder stikk.

For å gjøre problemet determinert trenges altså en ligning til. For å finne en slik relasjon la oss se på tilbudssiden. La oss anta at tilbudet er av formen

$$(3) \quad x = g(p)$$

Da får vi to ligninger med to ukjente. Teorien er da ~~fiktivt~~ blitt determinert, men vil den gi en forklaring på den observasjonsmateriale som er antydnet i fig. 1 og 2? Åpenbart ikke; ti i og med at vi har formulert en teori hvori forekommer de to ligninger (1) og (3) så er vi kommet i strid med vårt erfaringsmateriale. Materialet viser nemlig tydelig at der er en bevegelse i tingene. Men hvis den antydede teori skulde holde stikk, måtte (bortsett fra små erratiske avvikelser) p alltid være lik p_0 og x alltid være lik x_0 , hvor (p_0, x_0) er koordinatene for skjæringspunktene i fig. 4 og 5.

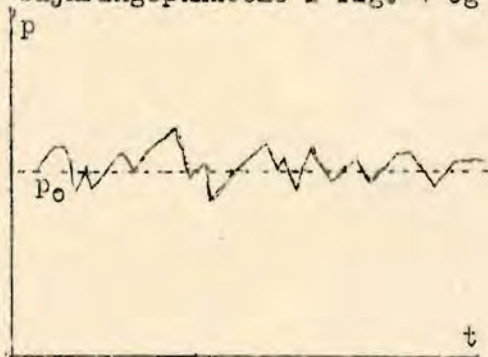


Fig. 4.

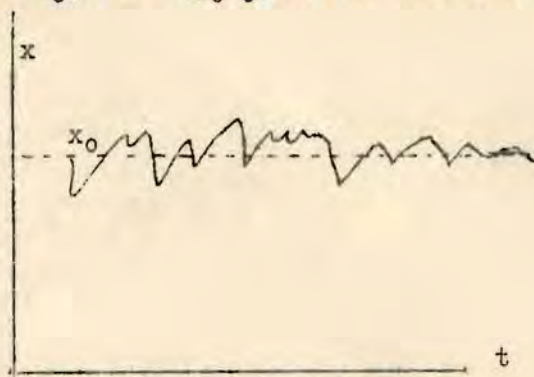


Fig. 5.

Vi står altså fast. I et slikt øieblikk er det nettop at man fristes til "i smug" å stikke hånden ut og ta en ny variabel til hjelp. Man kan f. eks si at kjøpekraften (forbrukernes inntekt) har vært forskjellig på de forskjellige tidspunkter, og at det forklarer bevegelsen. Kjøpekraften påvirker visselig efterspørselen, og i og for sig er det en riktig bemerkning som bidrar til å kaste lys over forholdet. Men vi er fremdeles like langt fra å ha opstillet nogen determinert teori som kan forklare erfaringsmateriale i fig. 1 og 2. Samtidig med at vi har ført inn det nye element av forklaring som ligger i ovennevnte bemerkning, har vi nemlig innført en ny ting hvis variasjoner skal forklares, nemlig inntekten. Dens tidsvariasjon er f. eks. som antydnet i fig. 6. Vi får nu 3 variable x , p og r (inntekten). Og vi har to ligninger nemlig

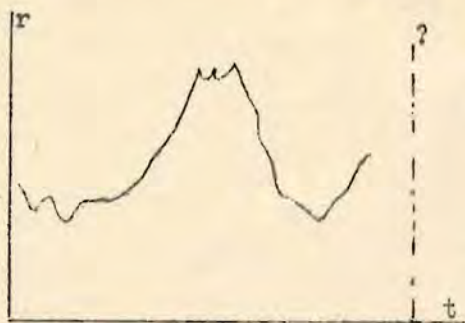


Fig. 6.

$$x = f(p, r)$$

$$x = g(p)$$

Vi har altså kun to ligninger til bestemmelse av de tre ukjente. Problemet er derfor indeterminert.

Hvis vi for eks. kjenner r på et tidspunkt, kan vi derav, p. g. a. den nu betraktede teori, avlede x og p . Men vi kan ikke samtidig bestemme alle tre størrelsene x , p , r . Selv om vi kjenner hele den forutgående bevegelse i de gitte tidsrekker, kan vi ikke derav avlede størrelsen ax , p og r , f. eks. på det fremtidige tidspunkt t' .

Hvis vi forsøkte å gjøre teorien determinert ved å trekke inn ytterligere en relasjon, så vilde vi, hvis det var en statisk relasjon, igjen komme i den stilling at vi teoretisk låser fast hele systemet, slik at det ikke kan bli noen utvikling i tiden. Vi vilde altså kommet i en situasjon hvor $r = \text{konstant} = r_0$.

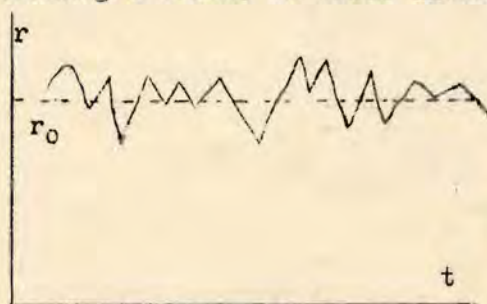


Fig. 7

Vi hadde altså forklart en utvikling av r som i fig. 7, men ikke en utvikling som i fig 6.

For å nå frem til en teori som samtidig er determinert og kan gi en forklaring på bevegelsen i de fenomener som behandles, må en eller flere av de relasjoner som oppstilles være dynamiske (etter den i forrige punkt givne definisjon) Vi kunde f. eks angripe problemet på følgende måte: La våre variable være x og p . Til bestemmelse av disse kan vi f. eks. gå ut fra en statisk efterspørsels-

funksjon $x = f(p)$ og en dynamisk tilbudsfunksjon $x = g(\dot{p}, p)$. Denne siste blir avhengig av tekniske og psykologiske faktorer. Problemet er nu determinert, og samtidig kan det hende at vi får en løsning som ligner vårt erfaringsmateriale. Den nærmere undersøkelse av formen på slike løsninger og den utstrekning hvori de ligner vårt erfaringsmateriale, er nettop gjenstand for behandling i de følgende paragraffer.

Rettelser:

Side 8501, 2 ll. linje ovenfra tilføies efter ordet evolutoriske ordet fenomenener. - Side 8503, 4 19. linje skal stå "tre uljente". I 28. linje skal stå størrelsene x , p og r .

8503. Problemet om bevegelsens tidsform. Hvorledes en
..... situasjon vokser ut av den foregående.

For å kunne gjennomføre en determinert analyse som kan forklare utviklingen i et økonomisk system, så er det, som vi har sett, spesielt to ting som er uomgjengelig nødvendig: Vi må ha like mange betingelsesrelasjoner som variable, og en eller flere av disse betingelsesligninger må være dynamiske. Hvis vi har like mange ligninger som variable, og alle ligninger er statiske, så låses systemet, så der ikke kan skje nogen forandring med tiden. Hvis alle ligninger er statiske, må der være færre ligninger enn variable for å tillate en forandring i tiden. Men da må noen av de variable være gitt i sitt tidsforløp forat derved utviklingen i de andre kan forklare. Vi har da en statisk teori om et varierende fenomen. Men denne teori er ikke fullstendig determinert, d. v. s. vi har ikke samtidig forklart utviklingen i alle variable. For å gjøre det må i alle fall noen av ligningene være dynamiske. Og antallet av ligninger må være lik antallet av variable.

Imidlertid er det ikke nok å påvise at en slik determinert løsning eksisterer. Like viktig er det å undersøke hvorledes formen på løsningen blir. Det reiser sig altså et problem om bevegelsens tidsform. For å forklare arten av dette problem blir vi nødt til først å gå inn på et par ting som ved første øiekast kanskje kan synes å ligge noget fjernt fra de konkrete økonomiske realiteter, men som vil vise sig å få betydning når man vil søke å gi en determinert forklaring av de økonomiske bevegelser. Vi vil diskutere rent abstrakt, hvorledes et sett av variable og deres utvikling kan bestemmes ut fra givne dynamiske relasjoner.

Vi begynner med et enkelt tilfelle: en variabel x . Denne kan eksempelvis være innførselen av korn, produksjonen av en vare, vannbeholdningen i et reservoar eller lignende. Hvilken konkret fortolkning vi gir denne variable er uvesentlig for den følgende

analyse. Vi skal kun undersøke rent abstrakt hvorledes en vekstlov kan bestemme utviklingen av vår variable.

La oss som et simpelt eksempel anta at vekstloven for x er slik at x har en konstant tilvekst pr. tidsenhet.

$$(1) \quad \dot{x} = \text{konstant} = a.$$

hvor \dot{x} er tilvekstgraden av x med hensyn på tiden. Hvorledes vil formen på den tidskurve bli, som representerer x , når x følger en slik vekstlov?

Vi tar til illustrasjon et enkelt talleksempel med et vannreservoar som fylles med konstant tilvekst $a = 5$ liter pr. dag.

t.	x	\dot{x}
10	1000 liter	5 liter pr. dag.
11	1005 "	5 " " "
12	1010 "	5 " " "

o. s. v.

Vi ser at beholdningen på et vilkårlig tidspunkt t er fullstendig bestemt ut fra kjennskapet til beholdningen på initial-tidspunktet t_0 og kjennskapet til a ; den blir simpelt hen:

$$(2) \quad x_t = x_{t_0} + a(t - t_0)$$

Dette er altså den løsning, den tidsform som svarer til vekstloven $\dot{x} = \text{konstant} = a$. Vi ser at tidsformen simpelthen er en rett linje. Og brattheten (vinkelkoeffisienten) for linjen er den konstante veksth. stighet a .

La oss tenke oss at vi ikke måler tilveksten pr. dag, men f. eks. pr. uke. Vekstloven blir da: $\dot{x} = \text{konstant} = 35$ liter pr. uke. Det er klart at når f. eks. 5 uker er gått, vil beholdningen være like stor enten jeg har lagt til 35 liter pr. uke eller 5 liter pr. dag. Vi får altså samme resultat uavhengent av vi regner oss fremover skridt for skridt gjennom små intervaller eller store intervaller. I mere kompliserte tilfelle blir det, som vi skal se, ikke det samme om vi regner oss fremover med store eller små sprang i tiden.

Vi vil ta et par litt mere kompliserte eksempler. Sett at tilveksten \dot{x} ikke lenger er konstant, men utgjør en konstant procent av x selv. Vi har altså nu

$$(3) \quad \dot{x} = b x$$

hvor b er konstant. Vi setter eksempelvis $b = 0,005$ og går ut fra samme initialsituasjon som i forrige eksempel.

t.	x.	\dot{x}
10	1000,000 l.	5,000 liter pr. dag
11	1005,000 l.	5,025 " " "
12	1010,025 l.	5,051 " " "
13	1015,076 l.	5,076 " " "

o. s. v.

Virkningen av denne vekstloven $\frac{\dot{x}}{x} = b$ er som vi ser at beholdningen på tidspunktet t blir lik beholdningen på tidspunktet $(t - 1)$ multiplisert med $(1 + b)$. Den generelle løsning blir derfor:

$$(4) \quad x_t = x_0 (1 + b)^{(t-t_0)}$$

Dette er ikke noget annet enn den almindelige renteformel, altså formelen som sier hvorledes en kapital vokser når den settes på rente. Vi vil dog her forutsette, for generalitetens skyld, at b kan være enten positiv, 0, eller negativ.

Det er her ikke likegyldig om tidsintervallene vi regner med er store eller små. Eksempelvis vil en kapital vokse langsommere når renten legges til ved slutten av hvert år enn når den legges til ved slutten av hver måned. Man kunde kanskje herav fristes til å tro at når tidsintervallene for renteberegningen gjøres mindre og mindre, vilde tilveksten i kapital tilslutt vokse over alle grenser. Dette behøver imidlertid ikke å være tilfelle; det er stor forskjell på den ting at noget vokser stadig og det at det tilslutt stiger til uendelig. En ting kan godt vokse stadig og herunder vokse mot en endelig, bestemt grense. I det her betraktede tilfelle får vi at tidsformen på x - når beregningen utføres for uendelig små intervaller - blir:

$$(5) \quad x_t = x_{t_0} \cdot e^{b(t-t_0)}$$

hvor b er den konstante størrelse på vekstprocenten $\frac{\dot{x}}{x}$ og $e = 2,71828\dots$ er grunntallet i det naturlige logaritmesystem. (Utledningen av denne ligning finnes hos Guldberg: Sannsynlighetsregningens og forsikringsmatematikkens elementer under avsnittet "Rente".) Tas naturlige logaritmer på begge sider, fås:

$$(6) \quad \text{Log } x_t = \text{Log } x_{t_0} + b(t - t_0)$$

idet Log her betegner naturlige logaritmer. Vi kan rent intuitivt innse riktigheten av denne formel. Det er kjent at når en størrelse x stiger med en multiplikativ konstant, så stiger dens logaritme (hvadenten det er en naturlig logaritme eller logaritmen i et hvilket som helst annet system), med en additiv konstant. Det er derfor ved vekstloven $\dot{x} = bx$ naturlig å operere med Log x istedenfor x selv. La oss sette $\text{Log } x = X$. Dette kaller vi å utføre en variabel transformasjon. Det betyr altså bare at vi fester oppmerksomheten ved en annen ting X som gjenspeiler den første x .

Efter det vi har sagt foran, må vekstloven for X bli $\dot{X} = \text{konstant} = b$. Tidsformen på variasjonen i X blir altså ifølge (2)

$$(7) \quad X_t = X_{t_0} + b(t - t_0)$$

Innsettes her $X_t = \text{Log } x_t$, så fås nettopp (6)

Som vi har sett ovenfor, er det i dette eksempel ikke likegyldig hvilket tidsintervall vi opererer med. Hvis bare tidsintervallet er tilstrekkelig lite, er det imidlertid næsten det samme hvor stort det er. I eksemplet med bankrenten vil det

f. eks. være meget stor praktisk forskjell på om renten tillegges årlig eller hvert 5. år. Derimot er det for praktiske formål (bortsett fra bryderiet med å føre regnskapene), betydningsløst om den tillegges f. eks. ukentlig eller hver 5. uke. I siste tilfelle blir forskjellen mellom de fremkomne tidskurver umerkkelig, men i første tilfelle vesentlig. Mens vi teoretisk ofte regner med uendelig små intervaller, (hvilket ofte viser sig å medføre en forenkling av det teoretiske apparat), så vil vi i praksis, når vi vil verifisere teorien, regne med små endelige intervaller. Sasant bare tidsintervallene er små nok, vil forskjellen være umerkkelig for alle praktiske formål.

Vi skal dernæst se på en vekstlov som er en kombinasjon av vekstlovene i de to foregående eksempler. La oss anta at

$$(8) \quad \dot{x} = a + bx$$

hvor a og b er konstanter. Anvendt på samme talleksempel som foran får vi (idet vi setter $a = 5$ liter, $b = 0,005$):

t.	x.	\dot{x} .
10	1000.00 liter	10,00 liter pr dag.
11	1010.00 "	10,05 " "
12	1020,05 "	10,10 " "
13	1030,15 "	10,15 " "

o. s. v.

Tidsformen på variasjonen i x blir her:

$$(9) \quad \text{Log}(a + bx_t) = \text{Log}(a + bx_{t_0}) + b(t - t_0)$$

Denne ligning finnes ved i ligning (6) å innføre transformasjonen $y = a + bx$, altså $\dot{y} = b\dot{x}$. Innsetter vi dette i (6), så ser vi at y må tilfredsstille vekstloven $\dot{y} = by$. En løsning av denne vekstlov er gitt ved i (6) å erstatte x med y . Dette gir (9).

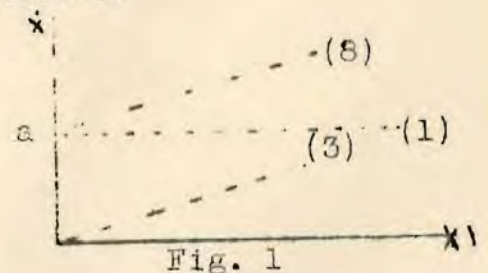
Av disse eksempler vil vi nu forsøke å trekke noen generelle konklusjoner. Vi har studert vekstlovene

$$(1) \quad \dot{x} = a$$

$$(3) \quad \dot{x} = bx$$

$$(8) \quad \dot{x} = a + bx.$$

Det grafiske bildet av disse vekstlover sees av fig. 1.



Alle disse typer av vekstlover uttrykker at \dot{x} er en viss funksjon av x . La oss derfor generelt sette

$$(10) \quad \dot{x} = f(x)$$

hvor $f(x)$ er en viss gitt funksjon av x der den avbildes ved en kurve f. eks. som den i fig 2. Når x er gitt, vil \dot{x} være entydig bestemt. Vi bortser som regel fra en situasjon som vist i fig. 3 hvor der til en og samme x svarer to verdier for \dot{x} . I slike tilfelle må det vedtes en konvensjon angående hvilken gren av kurven man vil operere på.

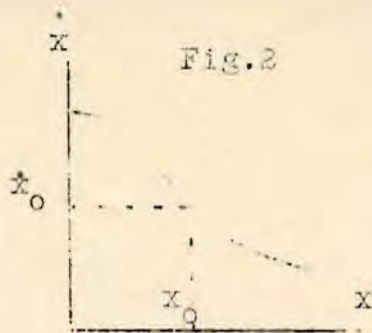


Fig. 2

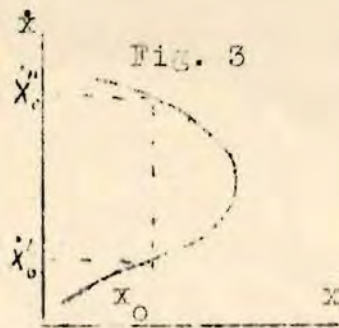


Fig. 3

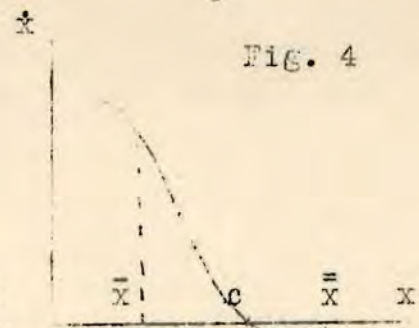


Fig. 4

Av spesiell interesse er det å se på det tilfelle da vekstkurven skjærer x -aksen. (Som i fig. 4). La skjæringspunktet være c . Hvis $f(x)$ forløper som i fig 4, så vil \dot{x} være positiv når $x < c$, men negativ når $x > c$. I første tilfelle vil altså x stige, i annet tilfelle avta, slik at x altså alltid beveger seg inn mot c . c er m. a. o. et stabilt likevektspunkt. Dernest sees at $|\dot{x}|$ (d.v.s. tallverdien av x) blir mindre og mindre eftersom man nærmer seg c . Har vi et system som er behersket av en slik generell vekstlov, og vi slipper dette system-løs, så vil det altså bevege seg henimot c med avtagende hastighet. (Det legger pent til bryggen)

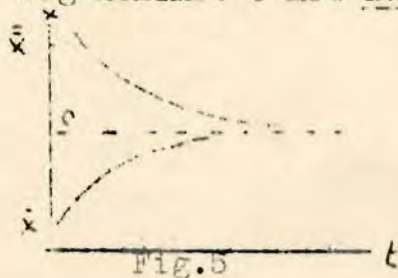


Fig. 5

Grafisk kan dette avbildes som i fig 5.

Hvis x slippes i en initialsituasjon \bar{x} som er mindre enn c , så følger utviklingen den nederste kurve, og hvis initialposisjonen er \bar{x} større enn c , følges den øvre kurve.

I mange tilfelle kan det også være av interesse å betrakte tilvekstgraden for \dot{x} eller accellerasjonen av x . Denne betegnes \ddot{x} . Denne størrelse kommer i mange tilfelle inn i våre dynamiske relasjoner, enten istedenfor eller ved siden av \dot{x}

Vi skal se på noen vekstlover som er formulert ved hjelp av \ddot{x} . La oss først anta at vi har

$$(11) \quad \ddot{x} = \text{konstant} = c.$$

I vårt eksempel med vannbeholdningen får vi da, om vi setter $c = 0,3$:

t.	x	\dot{x}	\ddot{x}
10	1000,0	5,0 liter pr dag	0,3 liter pr.dag ²
11	1005,0	5,3 " " "	0,3 " " "
12	1010,3	5,6 " " "	0,3 " " "

o. s. v.

Dette eksempel viser hvorledes vekstloven kan utledes når utgangssituasjonen for x og \dot{x} er gitt. Tidsformen for x blir her en kurve (en annengrads-parabel) som krummer oppover.

La oss dernest se på det tilfelle da vekstloven er:

$$(12) \quad \ddot{x} = -b x.$$

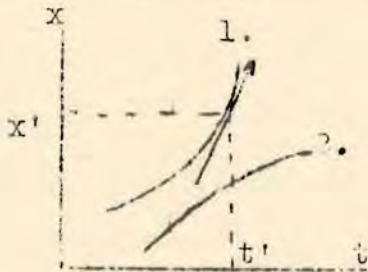
hvor b er positiv. Det grafiske bilde av vekstloven blir da som i fig. 6. Vinkelen for den rette linje i fig 6 er bestemt ved konstanten b . Av (12) og fig. 6 ser vi at hvis x er positiv så er \ddot{x} negativ og omvendt. Dessuten: $|\ddot{x}|$ er dessto større jo lenger x er fra 0.



Fig. 6

Vi skal belyse vekstloven (12) ved å se på dens mekaniske betydning. Tenker vi oss et legeme påvirket av en kraft, vil det, hvis det kan bevege sig fritt og der ikke er nogen friksjon til stede, få en acce lerasjon som er proporsjonal med kraften. "Jo hårdere trekk, desto raskere blir fartsøkningen."

Acce lerasjonen kan også belyses grafisk ved krumningen oppad eller nedad av tidskurven. Se fig. 7



Hvis acce lerasjonen er 0, vil tidskurven være en rett linje. At billedet av vekstloven er en krum linje, betyr nettop at der er en acce lerasjon i bevegelsen. Acce lerasjonen uttrykkes ved den omstendighet at tangenten til kurven forandrer retning eftersom vi beveger oss langs kurven. Tangentens retning uttrykker jo nettop veksthastigheten og acce lerasjonen uttrykker forandringen i veksthastigheten. Kurvens hulning gir derfor et grafisk billede av acce lerasjonens art, om den er positiv eller negativ. Kurve 1. viser positiv acce lerasjon, kurve 2. negativ acce lerasjon.

La oss anvende dette på vekstloven (12). Hvis x er positiv vil ifølge vekstloven acce lerasjonen være negativ, altså "kraften" rettet mot venstre, "bakover". Hvis x er negativ derimot, er acce lerasjonen positiv; kraften er rettet forover. Kraften virker i begge tilfelle inn mot det punkt hvor $x = 0$. Dette punkt blir altså et stabilt likevektspunkt når b i (12) er positiv.

Hvis b er negativ, vil punktet $x = 0$ bli et labilt likevektspunkt. Tenker vi oss et materielt punkt i $x = 0$, og dette så forskyves det minste stykke til høyre eller venstre, så oppstår en kraft som trekker punktet videre vekk fra likevektspunktet. Mekanisk kan vi illustrere forholdet ved to forskjellige pendler. Et pendel som er ophengt i en snor, beveger sig omkring et stabilt likevektspunkt, nemlig et punkt loddrett under ophengningspunktet (Se fig. 8). Et stivt pendel som står "på hodet", vil derimot illustrere en labil likevektstilstand (fig 9).



Fig. 8 Fig. 9

La oss se på den tidsform som frembringes av vekstloven (12) La oss først ta et talleksempel. Vi setter $b = + 0,002$.

t.	x	\dot{x}	\ddot{x}
10	1000,00	5,00	-2,00
11	1005,00	3,00	-2,01
12	1008,00	0,99	-2,02
13	1008,99	-1,03	-2,02
14	1007,96	-3,05	-2,01

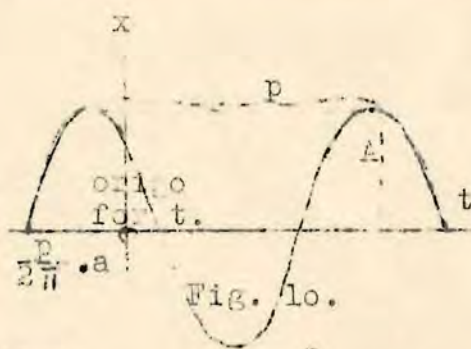
O. s. v.

Til å begynne med er beholdningen positiv og stigende, altså

accelerasjonen negativ. Veksthastigheten avtar altså og blir tilslutt negativ. Tilslutt blir ennogså x selv negativ. Men da blir igjen accelerasjonen positiv. x vil på denne måte svinge omkring punktet $x = 0$. Det kan vises at den kurve som x følger blir en sinuskurve, d. v. s. en kurve av formen

$$(13) \quad x = A \sin(a + \omega t)$$

(den eksplisite løsning av vekstloven $\ddot{x} = -bx$), hvor ω = frekvensen = $\frac{2\pi}{p}$ idet p er perioden, A = amplituden (d. v. s. største utslag) og a = fasen. Den grafiske betydning av disse tall frem-



går av fig. 10. Den cykliske bevegelse vi her er kommet frem til, er karakterisert ved 3 ting: p , A og a . Av disse ting viser det seg at p avhenger utelukkende av vekstlovens konstant b , mens A og a avhenger av initialsituasjonen og b . Det kan bevises at vi har

$$(14) \quad \omega^2 = b$$

$$(15) \quad A^2 = x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}$$

$$\sin a = \frac{x_0}{A}$$

$$(16) \quad \cos a = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega}$$

hvor x_0 og \dot{x}_0 er størrelsen av x og dennes veksthastighet i initialsituasjonen. (Bevis utelatt)

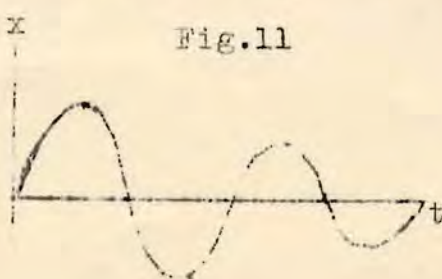
Vi kan altså finne utviklingens tidsform på to måter:

(1) ved numerisk kjederegning (slik som i talleksemplet foran) eller (2), ved å løse vekstloven eksplisit (formel 13). For et fritt pendel uten friksjon gjelder nettop vekstloven $\ddot{x} = -bx$, og altså tidsformen (13).

Sett nu innidlertid at der er friksjon tilstede. Vekstloven $\ddot{x} = -bx$ uttrykker da bare bruttokraften. Fr. fysikken vet vi at friksjonen er proporsjonal med hastigheten \dot{x} . I vekstloven får vi altså å trekke fra et friksjonsledd. La dette være $-c\dot{x}$ hvor c er positiv. Nettoaccelerasjonen blir altså :

$$(17) \quad \ddot{x} = -bx - c\dot{x}$$

Sett at $-c\dot{x}$ var en meget liten størrelse. Vekstloven vilde da tilnærmelsesvis bli $\ddot{x} = -bx$ d. v. s. vi fikk en sinuskurve som tidsform på utviklingen. Hvis leddet $-c\dot{x}$ blir større, vil det bremse på utslagene i sinuskurven. Amplitudene avtar med tiden.



Vi får en kurve som vi kaller en dempet sinuskurve. (fig 11)

Et pendel som svinger under friksjon, vil bevege sig på denne måte.

Den eksplisite løsning av vekst-

loven i dette tilfelle gir tidsformen:

$$(18) \quad x = A e^{-\beta t} \sin(a + \alpha t)$$

hvor A , a og α har samme betydning som foran. $e^{-\beta t}$ kalles dempningsfaktoren. $-\beta$ kalles dempningseksponenten; α og β avhenger bare av vekstlovens konstanter b og c , mens A og a , som før, avhenger også av initialsituasjonen.

De vekstlover vi her har behandlet, viser utviklingen i en variabel. I to variable vil vi for eks. ha gitt en vekstlov av formen:

$$(19) \quad \dot{x} = f(xy), \quad \dot{y} = g(xy)$$

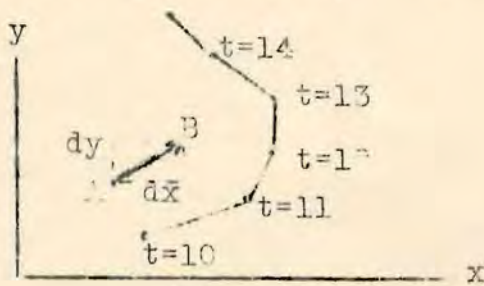


Fig. 11

Tidsformen på utviklingen i to variable kan vi i dette tilfelle beskrive ved et fase-diagram. (se fig. 11) hvori trekkes en historisk kurve som samtidig angir utviklingen av x og y . De tilsvarende tidspunkter kan antydes ved påskrifter langs den histo-

riske kurve.

Vekstloven kan også bringes til uttrykk i fase-diagrammet. Tenker vi oss en situasjon A i dette diagram, så vet vi fra (19) hvor store tilveksthastighetene for x og y skal være i punktet. Vi kan altså regne ut hvor store de er de små tilvekstebe dx og dy som realiseres i tidsintervallet dt . Vi vil altså i neste tidspunkt befinne oss i et punkt B bestemt som antydnet i Fig. 12. Fra dette nye punkt kan vi igjen regne ut utviklingen til et nærliggende punkt o.s.v.

Vi vil gi et talleksempel på vekstloven i to variable La \dot{x} være lik $a \cdot xy$ og $\dot{y} = b \cdot xy$ hvor $a = 0,0001$ og $b = 0,0002$

t.	x.	y.	\dot{x}	\dot{y}	\ddot{x}	\ddot{y}
10	1000,00	300,00	10,00	20,00	20,00	40,00
11	1010,00	330,00	30,00	66,00	23,72	44,44
12	1040,00	380,00	52,32	104,44	29,12	58,24
13	1092,22	384,44	81,54	162,68	41,99	83,98

o. s. v.

For å løse vekstloven for to variable er det altså nødvendig og tilstrekkelig å ha to betingelsesligninger.

Også i to variable kan vi få en tidsform for utviklingen som er dempet. Sett at tidsformen for x og y (individuel) er som i fig 13 og 14. Fase-diagrammet får da en form som antydnet i fig.15

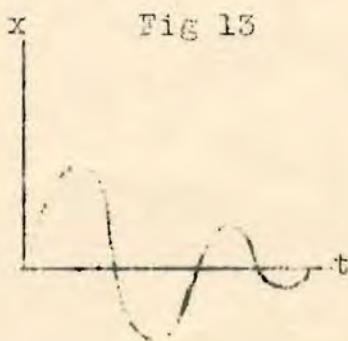


Fig 13

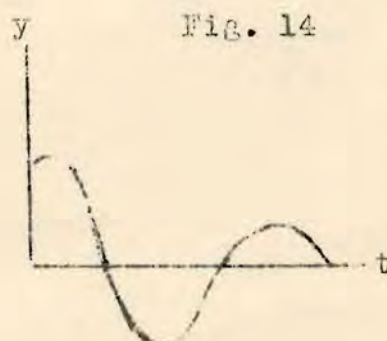


Fig. 14

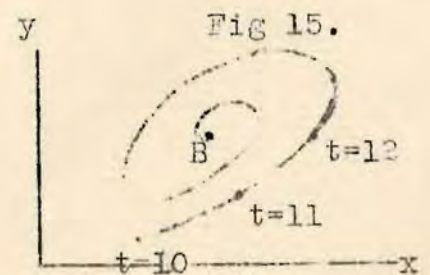


Fig 15.

Bevegelsen vil tilslutt stanse i punktet B.

I mange av de tilfelle som behandles i den teoretiske økonomikk, viser det sig at vi føres til løsninger som ligner den der er antydnet i fig. 15.

Rettelse: Side 8503.8 tredje linje ovenfra skal stå: "A, a og α ".

Tilføielse til 8503.3

Kapitaltilveksten i et gitt tidsintervall blir større jo oftere renten legges til. Men selv om renten tillegges kontinuerlig ("uendelig ofte") vil ikke kapitalen vokse til uendelig så sant vi betrakter et gitt tidsrum og renten er en endelig størrelse.

Hvor små tidsintervaller vi må regne med, (hvor hyppig renten må legges til), for at kapitalens tilvekstgrad (den effektive rente pr. tidsenhet) i praksis kan sies å være uavhengig av tidsintervallenes størrelse, er naturligvis avhengig av rentens absolutte høide. Jo høiere rente dess større betydning får det om man tillegger renten med små eller store mellomrum.

8504. Kumulantproblemet.

De teoretisk determinerte lover forklarer som regel ikke selve bevegelsens tidsform, men kun kumulantprinsippet for de tilfeldige forstyrrelser som vedlikeholder bevegelsen.

Som vi har sett, vil den løsning, den tidsform, som fremgår av en spesiell vekstlov meget ofte bli en dempet cyklisk bevegelse. Tidsformen kan bli en enkelt cykle (f.eks. en dempet sinus), eller den kan f. eks. være sammensatt av to komponenter hvorav den ene kan betraktes som et underliggende nivå omkring hvilket den cykliske bevegelse foregår. Hvis der er gitt en efterspørselsfunksjon av formen $x = f(p, \dot{p})$ og en tilbudsfunksjon av formen $x = g(p, \dot{p})$, så kan vi f. eks. ha en situasjon som i fig. 1 og 2.

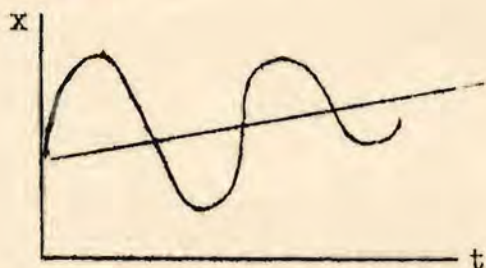


Fig. 1.

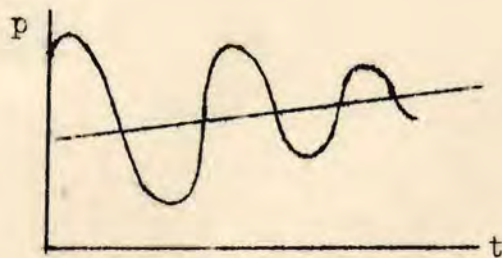


Fig. 2.

Slike løsninger kan fremkomme også ut fra andre slags teoretiske skjemaer. Vi kunde f. eks. gå ut fra samme efterspør-

selsfunksjon, $x=f(p, \delta)$, men betrakte tilbudsfunksjonen som $x= g(p_{t-\delta})$ hvor δ er et visst "lag" ("tidsforsinkelse"). $p_{t-\delta}$ kan f. eks. bety prisen på vedkommende vare ifjor ($\delta = 1$ år), slik at tilbudet i år er avhengig av prisen ifjor. Dette er en situasjon som er typisk for tilbudet av mange jordbruksprodukter. Tilbudet av hvete f. eks. vil være avhengig av det tilsådde areal og dette igjen avhengig av fjorårets hvetepriser. En lignende sammenheng finnes mellom tilbudet av flekk og prisen på svinefôr. Statistiske undersøkelser på dette område er foretatt særlig i Amerika og Tyskland. Det viser sig at førprisene influerer på den produksjonsskala som anlegges og derigjennom på det fremtidige tilbud av flekk.

I noen tilfelle kan det hende at den tidsform som fremkommer ikke er dempet, men tvert imot svinger med stigende amplituder. Vi sier da at den er anti-dempet eller eksplosiv

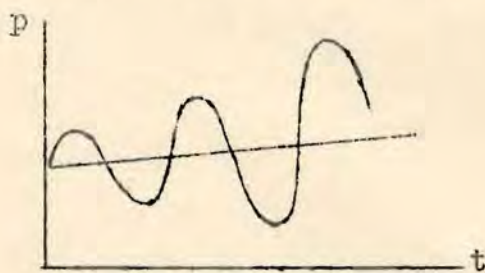


Fig. 3.

(fig. 3). Løsningen av en dynamisk teori vil dog som regel ikke gi denne tidsform. Almindelig vil løsningen bli noget i likhet med fig. 1 og 2.

Hvis den teori vi har opstillet skal kunne forklare bevegelsene i de variable vi betrakter, må den tidsform som teorien gir som løsning være mer eller mindre lik vårt erfaringsmateriale. Men den systematiske tendens til demping som den teoretiske løsning som regel viser, gjenfinnes ikke i de faktisk observerte tidsrekker (for priser, kvanta etc). De økonomiske cykler vi kjenner, (vi kjenner f. eks. fra statistikken en typisk konjunktur-cykle på $8 \frac{1}{2}$ år, en på $3 \frac{1}{2}$ år osv. Se professor Frisch's radioforedrag), viser nettop at bevegelsen holdes gående. Som eksempel anføres her i fig. 4 Harvard-instituttets prisindeks for "10 sensitive commodities", regnet som avvikelser fra en underliggende "trend". $3 \frac{1}{2}$ -års bølgen er her som man ser aldeles tydelig.

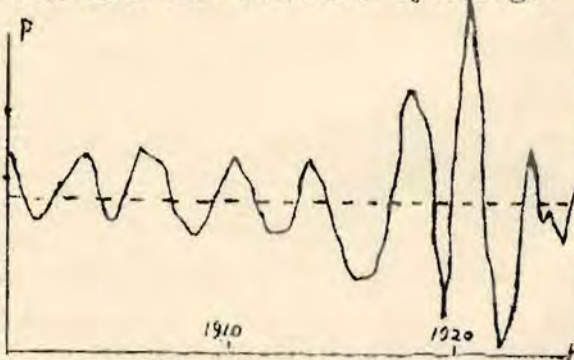


Fig. 4.

I de tidsrekker vi kjenner statistisk, viser det sig ofte at utslagets styrke varierer til en viss grad med tiden. Over enkelte tidsintervaller er amplituden synkende, over andre stigende. Amplituden i de faktisk observerte tidsrekker gjennemgår altså visse forandringer,

men der er erfaringsmessig ingen tendens til en systematisk demping slik som teorien sier.

Det må altså i vår teori mangle et ledd som kan forklare denne uoverensstemmelse. Det nye problem som her reiser sig, vil

vi kalle vedlikeholdsproblemet. Hvorledes skal teorien kompletteres for å forklare bevegelsens vedlikeholdelse?

Det er to måter hvorpå dette nye element kan føres inn i teorien. Den ene utvei går gjennom drøftelse av kumulantproblemet. Dette vil bli gjort i nærværende punkt. Den annen måte er en analyse av auto-vedlikeholdte bevegelser. Dette skal vi behandle i et følgende punkt.

En mekanisk analogi vil klargjøre hvad der ligger i kumulantproblemet.

La oss betrakte en pendel som svinger under friksjon. Hvis pendelen får gå sin gang uforstyrret, vil utslagene efter hvert avta inntil 0: pendelen kommer til ro. Tidsformen på denne bevegelse blir en dempet cykle (se eks. fig. 1). En slik tidsform er logisk nødvendig ut fra de givne forutsetninger. Hvis vi derfor vil at pendelen ikke skal komme til ro, må vi sørge for å tilføre den ny energi. Dette kan f. eks. opnås ved å henge pendelen op på et sted hvor den med visse vilkårlige mellomrum treffes av visse tilfeldige støt. Hvis pendelen utsettes for en slik påvirkning, vil den holdes gående i svingninger. Dens svingetid (antall tidsenheter pr. full svingning) vil være næsten konstant og lik svingetiden for en tilsvarende pendel som får lov til å svinge efter dens iboende lov om den dempede sinus-svingning. Får pendelen et enkelt eller en rekke særlig sterke støt, svinger den lenger ut, får større amplitude, men til gjengjeld vil bevegelsen gå så meget fortere, slik at svingetiden blir næsten den samme som når utslaget er mindre intens. (Sammenlign bevegelsen av de små vippende reklamefigurer som er ophengt i sporvognene i Oslo).

Dette gir oss en idé om at det kanskje er efter lignende linjer vi må søke forklaringen til at de økonomiske bevegelser holdes gående. Kan vi finne en syntese mellem den dynamiske teori og virkningen av de tilfeldige støt? Det er dette som er kumulantproblemet.

Vi skal ikke i dette punkt gå inn for nogen fullstendig redegjørelse for problemet. Det vil først skje i kapitel 86. Det vi her vil gjøre, er bare å gi visse antydninger, og, fremfor alt, å stille problemet.

For å gi en antydning av løsningen av kumulantproblemet vil vi vise hvorledes løsningen av en mekanisk pendelsvingning med støt kan bestemmes.

La oss betrakte en pendel som starter på et visst initialtidspunkt t_0 med en viss utgangshastighet. Hvis den nu fikk svinge bare påvirket av friksjonen, vilde tidsformen på bevegelsen bli



Fig. 5.

en dempet sinus. Isteden tenker vi oss nu at pendelen på forskjel-

lige tidspunkter t_1, t_2 osv. får visse erratiske (erratisk = tilfeldig) støt e_1, e_2 osv. Se fig. 5. Disse kan være enten positive eller negative. Mellom tidspunktene t_1, t_2 osv. er der ingen støt som virker. Styrken av støtene tenkes målt ved noget som er proporsjonalt med den levende kraft i støtet. Derved knyttes en forbindelse mellom støtets styrke og svingningenes amplitude. Det er klart at kjennskapet til disse støt i forbindelse med kjennskapet til pendelens iboende svingelov må være tilstrekkelig til å bestemme svingningenes tidsform, idet det jo bare er disse faktorer som virker og ingen andre.

Jeg stiller mig eksempelvis den oppgave å finne amplituden for svingningen på et vilkårlig tidspunkt $t > t_n$. Løsningen av denne oppgave er langt mindre komplisert enn man skulde tro. Vi skal antyde hvor løsningen består.

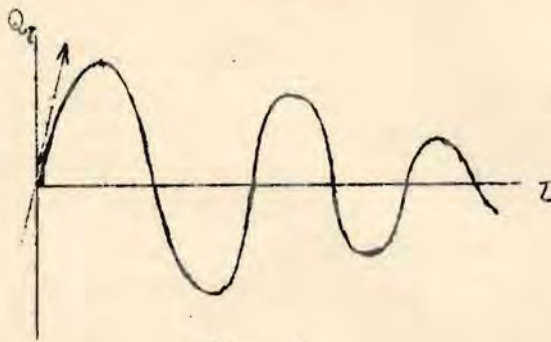


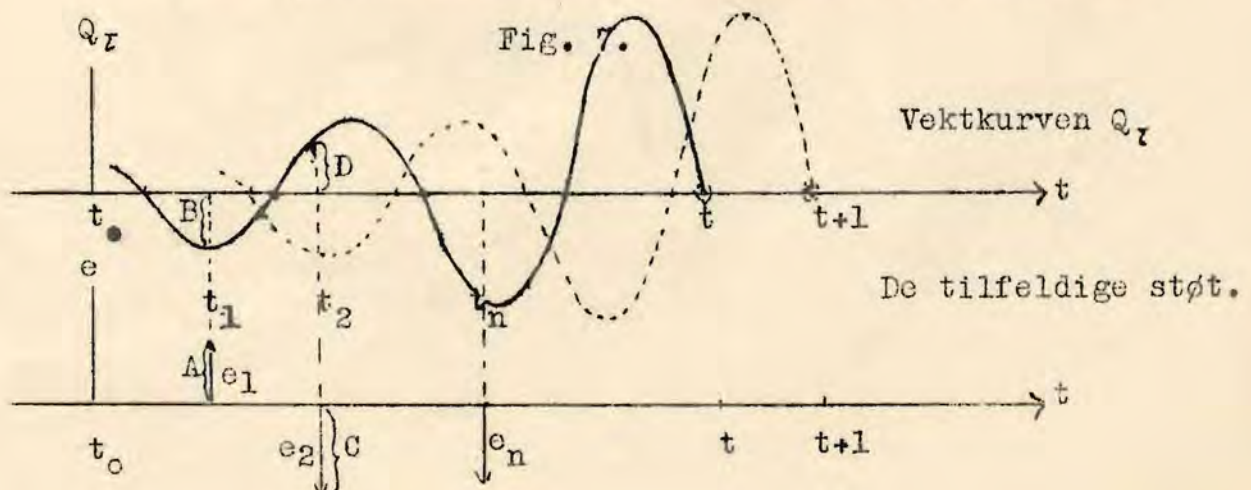
Fig. 6

Til dette formål innfører vi en viss funksjon Q_T hvis tidsform (fremstillet i fig. 6) ikke er noget annet enn den tidsform vi vilde fått hvis pendelen hadde startet i nullstilling, (d.v.s. med null amplitude) og med en viss hastighet, og hadde fått svinge uforstyrret. (τ i fig. 6

måler tidsforløpet siden igangsettelsen av den bevegelse som gjengis ved Q_T). For enkelhets skyld antar vi at initialhastigheten var $\dot{Q}_0 = 1$ for $\tau = 0$. (Dette valg er helt konvensjonelt).

Ved hjelp av den således definerte tidskurve Q_T kan vi studere tidsformen av y_t . Ordinaten y_t på tidspunktet t blir simpelt hen lik summen av alle støtene fra t_0 til t_n , idet støtene tillegges forskjellig vekt efter hvor gamle de er. Vi bruker her uttrykket "vekt" i betydningen virkningsfaktor. Den virkning som et visst støt har på ordinaten y_t er altså lik produktet av støtets egen størrelse og dets virkningsfaktor, idet denne siste avhenger av hvor lang tid som forløper mellom støtet og det tidspunkt t for hvilket vi betrakter ordinaten y_t .

Denne "gammelhetsvirkning" av støtene er simpelt hen



representert ved kurven for Q_z anbragt baklengs fra tidspunktet t . (Se den optrukne linje i fig. 7). Når kurven Q_z er anbragt slik, vil den på tidspunktene t_1, t_2 osv. angi de vektorer (virkningsfaktorer) som de tilsvarende støt på disse tidspunkter skal multipliseres med. F. eks. på tidspunktet t_1 skal størrelsen A multipliseres med B , på tidspunktet t_2 C med D osv. Og summen av alle disse produkter er ordinaten y_t . Vil man beregne ordinaten y_{t+1} , så skyves simpelthen vektorkurven Q_z over mot høyre inntil dens begynnelsepunkt faller i $t+1$, (Se den punktede kurve), og produktsummen dannes på samme måte som før. Vi kan uttrykke dette ved å skrive:

$$(1) \quad y_t = \sum_{k=1}^i Q_{t-t_k} \cdot e_k$$

I denne ligning betegner $Q_{t-t_k} \cdot e_k$ "bidraget" fra støtet e_k . Formel (1) er til en viss grad approksimativ. Vi har nemlig her ikke regnet med initialordinaten y_0 og utgangshastigheten \dot{y}_0 for kurven y_t på tidspunktet t_0 . Hvis det er "lenge siden" dette initialpunkt, og dempingen i Q_z er sterk, blir imidlertid korreksjonsleddene inneholdende y_0 og \dot{y}_0 av forsvinnende betydning.

Den prosess hvorved vi suksessivt beregner y_t, y_{t+1} osv. er som vi ser intet annet enn å danne et bevegelig gjennomsnitt av den tidsrekke som representerer støtene e , idet der brukes et spesielt vektsystem, nemlig vektorkurven Q_z . (Av fig. 7 ser man at det godt kan hende at et enkelt "eldre" støt får større vekt enn et "yngre". "Stort sett" vil dog - på grunn av dempingen i Q_z - de yngre støt få større vekt enn de eldre. Det siste er mere sannsynlig enn det første.)

Spørsmålet er nu: Hva blir tidsformen på den således beregnede kurve y_t ? Vil de enkelte bidrag fra de forskjellige støt slå hverandre ihjel, slik at vi praktisk talt får $y_t = 0$? Eller er der noget visst systematisk i selve den benyttede kumulasjonsmåte som gjør at y_t får et visst tyrisk tidsforløp? - Det er det siste som blir tilfelle. Det kan bevises at den fremkomne kurve y_t vil inneholde en typisk cyklisk bevegelse. Dette gjelder helt generelt om det resultat som fremkommer ved å anvende et bevegelig gjennomsnitt (med et visst vektsystem) på en erratisk rekke. Arten av de fremkomne cykliske bevegelser avhenger på en helt karakteristisk måte av formen på vektorkurven. Det nærmere studium av denne sammenheng er et kapitel for sig (kap. 86). Det skal her bare nevnes at når man på en erratisk tidsrekke anvender et bevegelig gjennomsnitt med et vektsystem som den Q_z der er antydnet i fig. 7, så fremkommer en cykle hvis periode er tilnærmet lik perioden i vektsystemet. Dog holder ikke perioden sig helt konstant, den kan være snart litt lengere, snart litt kortere.

Det kan dessuten bevises at amplituden i den fremkomne cykle er varierende, idet den snart er stigende, snart synkende. Denne stigning og synkning foregår suksessivt. Den fremkomne regelmessighet i amplitudevariasjonen kalles svevningseffekten. Selve varia-

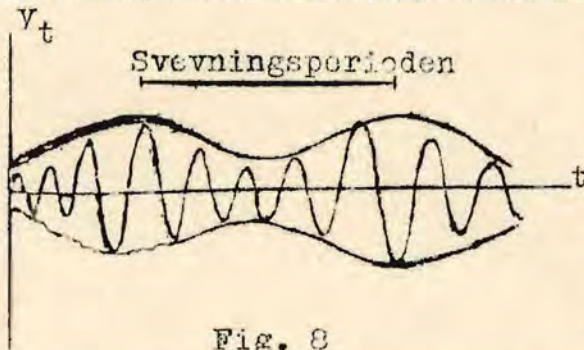


Fig. 8

sjonen i amplituden kan altså også fremstilles som en cykle. (Fig.8).

Alle de her omtalte karakteristika: Gjennomsnittsperioden, gjennomsnittsamplituden, svevningsperioden etc. kan bestemmes apriori ut fra kjennskapet til vekstsystemet

uten å kjenne fordelingen av støtene, alt under forutsetning av at støtene er auto-ukorrelerte. Dette betyr bare at det ikke må være nogen "smittsom" virkning mellom et støt og de etterfølgende.

Rettelser.

Side 8503.6, 9. linje nedenfra står " $b = -0.002$ " skal være " $b = 0.002$ "
 --- 8504.3, fig.5 står " e_1 "; skil stå " e_1 ".

Tilføielse til punkt 8503, side 5-6.

I talleksemlene side 5 og 6 er for enkelhets skyld regnet med hastighet og accelerasjon i begynnelsen av hvert tidsintervall. Denne fremgangsmaate gir bare et tilnærmet riktig resultat. Unøfiaktigheten vokser med intervallenes størrelse. En bedre approksimasjon fås ved å regne med gjennomsnittshastigheten i hvert tidsintervall. Hvis s og t er henholdsvis begynnelsen og slutten av intervallet, får vi da

$$x_t = x_s + \dot{x}_s(t-s) + \frac{1}{2} \ddot{x}_s(t-s)^2$$

Hvis vi regner med uendelig små størrelser på tidsintervallene, altså på differensen $(t-s)$, gir de to fremgangsmaater samme resultat.

8505. Autovedlikeholdte bevegelser.

I forrige punkt, 8504, antydte vi en forklaring av vedlikeholdsprosessen i de økonomiske bevegelser ut fra det synspunkt at vårt system påvirkes av en strøm av tilfeldige forstyrrelser. Energi-kilden blev altså betraktet som noget der ligger utenfor det system som det er oppgaven å forklare.

Det kan imidlertid også tenkes andre måter på hvilke en slik energikilde kan føres inn i systemet. Man kan tenke sig at energi-kilden har sate inne i selve systemet. I dette tilfelle taler vi om autovedlikeholdte bevegelser. ("Auto"= selv). Problemet blir da både å forklare hvorledes denne energi kommer til utløsning, og, når dette skjer, hvorledes da energien virker på systemets bevegelse. Problemstillingen er altså her noget videre enn i punkt 8504, idet vi nu også søker forklaring på selve energiutløsningen.

En mekanisk analogi vil antyde karakteren av en slik teori i motsetning til den teori vi betraktet i punkt 8504.

Vi betrakter en pendel som svinger under friksjon, idet dens bevegelser holdes vedlike ved en mekanisk anordning i pendelen selv. Dette kan f. eks.

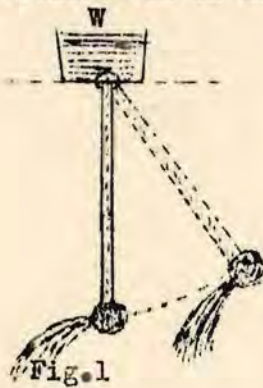


Fig. 1

ordnes på følgende måte: Over ophengningspunktet anbringes en vannbeholder W i fig. 1, fra hvilken et rør fører ned gjennom pendelen med utløp på venstre side av denne. Vi lar pendelen starte f. eks. i den loddrette stilling. Når vannet begynner å strømme ut, vil reaksjonen drive pendelen over mot høyre. Når utslaget har nådd en viss størrelse, vil tyngdekraften begynne å virke på pendelen i motsatt retning (mot venstre) så pendelen svinger tilbake igjen. Hvis vannet ikke strømmer helt jevnt, men litt uregelmessig, vil pendelens svingninger fortsette. Svingetiden (perioden) vil være bestemt vesentlig ved pendelens indre bygning. Den normal omkring hvilken pendelen vil svinge

vil bli en linje som ligger litt tilhøyre for ophengningspunktet. Hvis vannstrømmen var helt jevn, vilde pendelen tilslutt komme til ro i denne normalstilling. Også i det nu betraktede tilfelle er det de små tilfeldige forstyrrelser som forklarer vedlikeholdsprosessen, men vi har gått et skritt videre enn i punkt 8504: Nu har vi også antydning om karakteren av den strøm som utløser impulsene.

Vi skal nu se hvorledes systemet kan endres slik at vi får inn et fundamentalt nytt element hvor vedlikeholdet ikke avhenger av de tilfeldige små forstyrrelser, men hvor energiutløsningen foregår i takt med selve svingningen. Sett at vi forsyner vannbeholderen over pendelen med en ventil som åpnes når pendelen går mot høyre, men lukkes når den svinger tilbake mot venstre. Den energikilde som vannbeholderen representerer, brukes altså til å drive systemet (pendelen), og utløsningen av energien skjer på grunn av selve svingningen. Her er både svingningens form og vedlikeholdet forklart ved ting som ligger innenfor systemet selv: Bevegelsen er auto-vedlikeholdt.

Dog, dette er en sats som kun gjelder med visse modifikasjoner. Den energikilde vi regner med er jo nemlig ikke uuttømmelig. Eftersom vannet synker i beholderen, blir trykket og dermed drivkraften mindre, og når beholderen er helt tom, vil all energitilførsel opphøre. Hvis vi betrakter systemet som absolutt avsondret fra omverdenen, får vi altså igjen et døpat system. For i lengden å vedlikeholde bevegelsen må vi også her ty til et utenforliggende element nemlig påfylling av vannbeholderen. Dog, det er her et utenforliggende element av en høyere orden; vi har her gått betydelig lenger enn i punkt 8504 for å forklare energiutløsningen

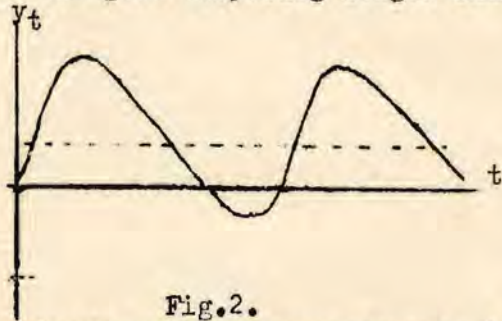


Fig. 2.

som et indre fenomen i det studerte system. Derfor kan vi her med en viss rett tale om auto-vedlikeholdte bevegelser.

Tidsformen på en slik bevegelse blir ikke symmetrisk som ved sinuskurven, men til en viss grad skjev: Den gjør brått opsving og langsommere nedgang. (Se fig. 2).

De mekaniske analogier vi har trukket frem kan til en viss grad tjene som illustrasjon til Schumpeters konjunkturteori. Schumpeter fremhever særlig innovasjonenes betydning (tekniske oppfinnelser, finansielle nydan- nelser, etc.) som impulsfenomener i konjunkturbevegelsen. Vannstrømmen i vår mekaniske analogi kan illustrere disse innovasjoner, og pendelens svingning illustrerer konjunkturteoriene. Tilgangen på nye oppfinnelser og idéer kan være mer eller mindre jevn, men utnyttelsen skjer ikke jevnt. Den skjer rykkevis. Nogen av idéene blir kanskje aldri utnyttet. I vår analogi representeres dette av de vannpartikler som stadig blir i beholderen. Andre oppfinnelser blir imidlertid utnyttet under en viss fase i cyklen f. eks. i opgangstider. Rent konkret sett er det gjerne visse slags oppfinnelser som utnyttes under opgangen, andre under nedgangen. Vi behøver bare å komplisere vårt mekaniske bilde en smule for å illustrere også dette: Vi kan anordne to utløp på vår pendel, et på venstre side som åpnes når pendelen går mot høyre og et på høyre side som åpnes når pendelen går mot venstre. Pendelen vil da drives av vanntrykket både når den går mot venstre og når den går mot høyre. Det representerer at det er drivende krefter som såvel under konjunkturupgangen som under nedgangen.

Hittil har vi kun betraktet autovedlikeholds-teorien som en teori om selve den cykliske bevegelse, mens den underliggende langtidsbevegelse: den langsiktige evolusjon, ikke er kommet med i betraktningen. Det er et typisk trekk ved flere konjunkturteorier - ikke minst Schumpeters - at de forsøker å knytte en forbindelse mellom den cykliske bevegelse og langtidsprogresjonen. Konjunktur-

bevegelsen blir ofte oppfattet som de "skippertak" gjennom hvilke fremskridtet skjer.

Også denne tankogang kan illustreres ved litt yderligere komplikasjon av vårt mekaniske eksempel med pendelen. Sett at pendelens befestigelsespunkt ikke er fast, men kan gli i en tynn renne som går opover mot høire. Hvis venstre utløp har det sterkeste trykk, vil pendelen, samtidig som den svinger, ake sig opover mot høire. En hver svingning blir altså et av de hopp hvorved systemet kommer op på et høiere nivå i sin utvikling.

Man må selvfølgelig ikke legge mere inn i disse mekaniske analogier enn en støtte for tanken. De gir oversikt over den type av forklaring som man kan forsøke å gi.

8506. Det mikroøkonomiske kontra det makroøkonomiske synspunkt.

Den dynamiske betraktningssmåte vi har utviklet i det foregående kan få anvendelse på en rekke områder, dels på generelle områder, dels på spesielle. Hvis vi anvender den dynamiske analyse på spesialområder (eksempelvis et enkelt marked, en enkelt bedrift og dens produksjonsproblem, en enkelt families økonomi o.s.v.), taler vi om mikrodynamisk analyse. Ved en sådan analyse tenker man sig at visse ting, som beskriver samfundsmaskineriet som helhet, er gitt. Hvis vi f. eks. analyserer hvotomarkedet i Chicago og dets fluktuasjoner, så gjør vi visse forutsetninger om de generelle konjunkturfaktorer, (f. eks. et konstant verdensprisnivå, eller et jevnt stigende prisnivå, en gjennomsnittlig stasjonær arbeidslønn o.s.v.). I den mikrodynamiske analyse er det ikke disse generelle faktorer som er problemet. På det spesielle område som går inn i en mikrodynamisk analyse kan det meget vel bli plass for tidsvariasjoner og svingninger og en dynamisk teori selv om de generelle faktorer er stasjonære eller jevnt stigende. Den mikrodynamiske teori forklarer hvorledes et enkelt hjul i samfundsmaskineriet vil bevege sig i forhold til hele systemet, hvorledes det tilpasser sig - f. eks. ved dempede svingninger - når dets forhold til det øvrige er blitt forrykket.

Det er klart at det har stor betydning å kunne legge slike spesialområder under mikroskopet. Man kan derved komme på spor etter ting som kan tjene som elementer til å bygge op en generell teori. Den makrodynamiske analyse tar sikte på et annet mål nemlig å forklare samfundsmaskineriet i dets helhet, forklare hele samfundets samlede økonomiske utvikling, og herunder forklare de almindelige konjunkturbevegelser som erfaringsmessig er felles for nesten alle deler av produksjons- og omsetningslivet.

Også ved denne totalitetsanalyse må vi selvfølgelig stille op en dynamisk teori som er determinert og samtidig kan forklare bevegelsens tidsform. Men for å kunne gjøre det på det makrodynamiske område må vi gjøre sterke forenklinger av problemstillingen, sterkere forenklinger enn ved den mikrodynamiske analyse. Hvis formålet bare var å opstille en formell teori, kunde vi selvfølgelig trekke inn detaljer ad libitum. Vi kunde føre inn symboler med fotskrifter og toppskrifter for så mange variable det skulde være. Spesifikasjonsproblemet blev da nærmest et typografisk spørsmål. Og determinasjonsproblemet blev bare et spørsmål om å telle op ligninger og variable. En slik teori vilde imidlertid ha en meget begrenset, vesentlig formell interesse. Den vilde nemlig ikke gi nogen forklaring av det annet hovedproblem i analysen nemlig tidsformen på løsningene, hvorledes periode-lengden, "laggene" o.s.v. bestemmes av strukturbetingelsene for systemet. En slik analyse kan man først gjennomføre når man går til sterke forenklinger i problemstillingen. Vi må trekke begrepene sammen i store hovedgrupper. Vi kan f. eks. trekke de enkelte produserte kvanta sammen til en generell produksjonsindeks. Vi kan samle all konsumsjon til en konsumsjonsindeks o.s.v. Dette at de forskjellige enkeltfenomener trekkes sammen til store gjennomsnitt er karakteristisk for den makrodynamiske analyse.

8507. Et makrodynamisk tableau economique.

I den makrodynamiske analyse av den økonomiske utvikling går man inn for en betraktning av de økonomiske fenomener i deres sammenheng. Samfundets produksjon, omsetning, fordeling, konsumsjon analyseres som et sluttet kretsløp.

Det er fysiokratens fortjeneste å ha utformet denne totalitetstanke: sammenhengen mellom fenomenene, sirkulasjons-karakteren av det som skjer, det at en ting som går ut av én del av systemet, nødvendigvis må havne i en annen del. For å illustrere dette totalitetssynspunkt opstilte fysiokratene sitt tableau economique.

Et slikt tableau economique vil også vi her benytte, om det enn blir utformet noget anderledes enn fysiokratens.

Visse deler av den økonomiske virksomhet lar sig best fremstille som "beholdere", som "lagre", mens andre naturlig kan betraktes som "maskiner". I det nedenfor fremstilte tableau economique er maskinene fremstillet som firkanter,

mens beholderne er tegnet som cirkler. Det er ialt tre store grupper av maskiner, nemlig den menneskelige maskin, produksjonsmaskineriet for konsumsjonsgodter og

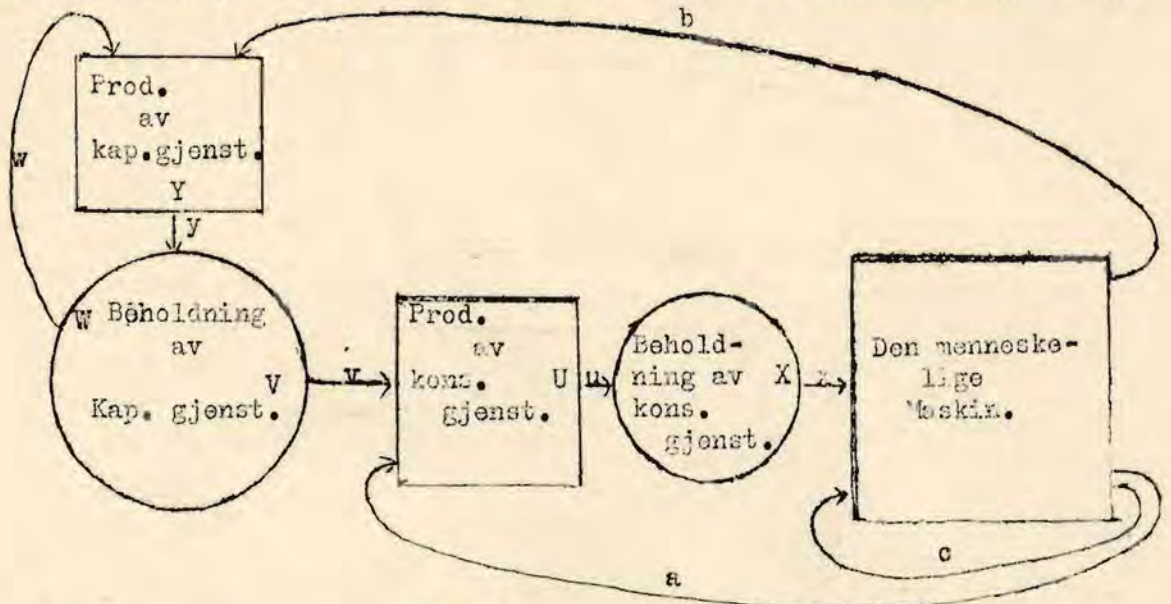


Fig. 1.

produksjonsmaskineriet for kapitalgjenstander. Der er to beholdninger, nemlig beholdningen av kapitalgjenstander og beholdningen av konsumsjonsgjenstander. Forskjellen mellom disse er nærmest en gradforskjell.

Mellom de enkelte beholdere går der forskjellige strømmer (se fig.1.), som illustrerer sirkulasjonsprosessen i samfundet. Dette system av beholdningsbegreper og strømningsbegreper danner et sluttet system, men der er ikke tatt noget hensyn til naturkreftenes medvirkning i produksjonsprosessen. Dette kan imidlertid lett innpasses i systemet. Se fig. 2.

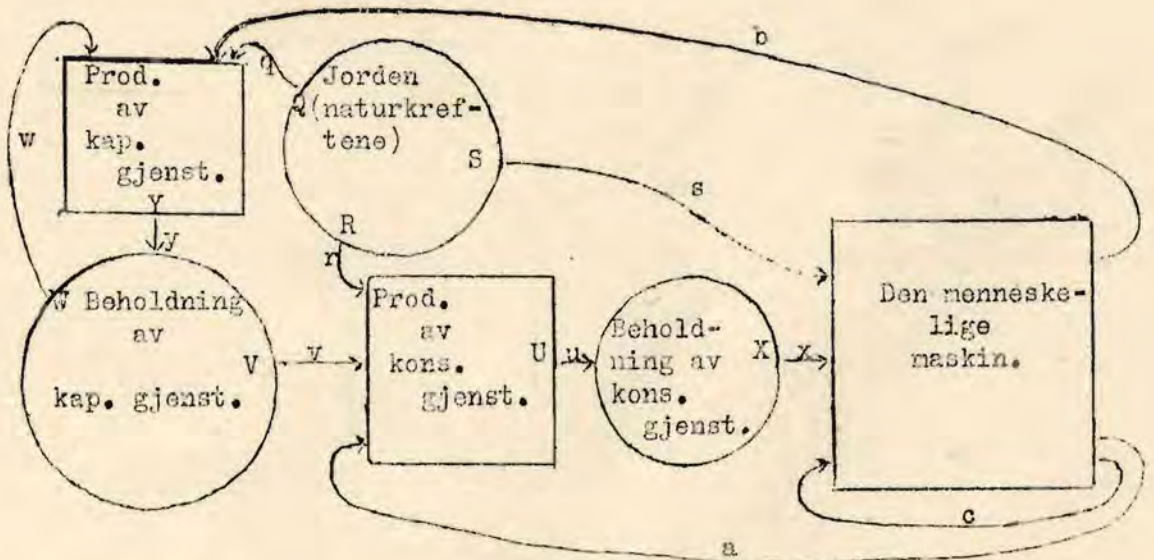


Fig. 2.

Vi skal forsøke å standardisere noen symboler og samtidig beskrive sirkulasjonsprosessen i systemet.

I systemet av betegnelser er beholdningsbegrepene representert ved store bokstaver, strømningsbegrepene ved små bokstaver. Vi begynner med "den menneskelige maskin". Fra denne fører tre strømmer nemlig a som representerer arbeide i konsumsjonsproduksjonen, b som representerer arbeide i kapitalproduksjonen og c som antyder direkte forbrukte personlige tjenester. Beholdningen av kapitalgoder består av to deler hvorav W står til disposisjon for kapitalproduksjonen og V for konsumsjonsproduksjonen, w og v betegner de tilsvarende produktive tjenester i form av kapitalslitning. U er mengden av konsumsjonsgodter som befinner sig under arbeide. Disse går, efter som de blir ferdige, gjennom u over i beholdningen av ferdige konsumsjonsgodter X, hvorfra der går en strøm i form av endelig konsumsjon, x, til den menneskelige maskin. Y er mengden av kapitalgjenstander som befinner sig under bygning. Strømmen av ferdigblevne kapitalgjenstande er y. Q, R, S, er de deler av naturkreftene som står til disposisjon for henholdsvis kapitalproduksjon, konsumsjonsproduksjon og til direkte forbruk. q, r, s representerer de tilsvarende strøm -

ningsbegreper.

La oss til illustrasjon ta et konkret eksempel: epleproduksjonen på en stor eplefarm. Til denne trenges jordens tjeneste r , gartnerarbeide a og redskaps-slitasje v . De ferdige epler går over til torvet, X , hvorfra de selges til konsumsjon x . For å erstatte slitet på redskapene trenges det ny kapitalproduksjon hvortil utkreves arbeide, b , jordtjenester, q , og kapitalslitasje, w . På den annen side, hvis fruktene vokser vilt og plukkes direkte til konsumsjon, får vi strømmens.

Den makrodynamiske teori består i å stille op visse struktur-relasjoner som beskriver funksjonsmåten av dette maskineri, forklare hvorledes systemet vil gå hvis det starter i en viss initialsituasjon. Hvis teorien leder til en tidsform som er dempet, reiser sig problemet om bevegelsens vedlikeholdelse.

I dette system har vi ikke innført nogen monetære faktorer. De forskjellige beholdninger og strømmer tenkes uttrykt som reelle kvanta. Samlebegrepene tenkes definert ved forskjellige fysiske indekser. Systemet tenkes med andre ord å gi uttrykk for en stadig sirkulasjon av realverdi. Senere kan man bygge på systemet: trekke det monetære inn. Det kan da bli behov for å utstyre vårt tableau economique med nye beholdere og strømmer som illustrerer pengebeholdninger, pengecirkulasjon o.s.v.

Selv med det sterkt reduserte system som er antydnet i fig. 1 og 2 er det ikke råd å ta fatt på hele analysen underrett. Vi må begynne med å angripe enkelte deler: vi må til en begynnelse konstruere op ennu mere reduserte systemer.

8508. Den hierarkiske orden av makrodynamiske systemer.

Vi vil i dette punkt opstille en fortegnelse over forskjellige makrodynamiske systemer som skal behandles i det følgende. Denne vil bl. a. tjene til å vise at det å opstille en konjunkturteori kan gjøres på et stort antall forskjellige måter. Med et paradoks kunde man si at det er forholdvis lett å opstille en konjunkturteori, men meget vanskelig å opdage hvori dens feil består. Selv de aller mest forskjelligartede konjunkturteorier kan nemlig lede til uyliske bevegelser, bare de inneholder dynamiske elementer. Man må derfor være uhyre forsiktig med å vurdere utsagnskraften i de forskjellige konjunkturteorier. Man må betrakte flere alternative teoretiske opbygninger og foreta en sammenligning mellom dem. Som regel vil teoriene ikke utelukke hverandre, men gjensidig supplere hverandre. Sammenligningen må være av kvantitativ natur. Kun på denne måte kan man nå frem til en virkelig verifikasjon og vurdering av de forskjellige teorier. Det fører til en intim forbindelse mellom økonomisk teori og økonomisk statistikk. Ofte er det vanskelig å si hvor teorien hører op og statistikken begynner.

Vi spesifiserer følgende makrodynamiske systemer:

1. Forenklede systemer som ikke fører til cykliske bevegelser.
2. Kapitalgjenstandenes slitningstid. Primerinvestering og re-investering.
3. Kapitalgjenstandenes konstruksjonstid. Diskrepansen mellom igangsettelse og videreføring av kapitalproduksjon.
4. Disproporsjonaliteten mellom de forskjellige produksjonsgrener.
5. Diskrepansen mellom total sparing og total investering.
6. Den rene spekulasjon som konjunkturfaktor.
7. Profitt-akkumulasjonen som konjunkturfaktor.
8. Feilfordeling av kjøpekraften mellom de forskjellige grupper.
9. Inflasjons- og deflasjonsmekanismen. Kredittgivning, gjeld og monetære faktorer i konjunkturforløpet.

851. Forenklede systemer som ikke fører til cykliske bevegelser.

Vi har i det foregående søkt å få en oversikt over arten av problemene i den makrodynamiske analyse. Vi skal nu gå over til en nærmere behandling av disse problemer. Først skal vi se på noen parametre som karakteriserer sammenhengen mellom visse viktige beholdnings- og strømningsbegreper i det makrodynamiske system.

8511. Slitningsprocent og kapitalutstysprocent.

I vårt tableau economique er den årlige nettoproduksjon av ferdige konsumvarer representert ved strømningsbegrepet u . Denne strøm kan betraktes som det endelige resultat av hele maskineriets virksomhet under stasjonære forhold. u er da så å si "frukten" av hele den økonomiske virksomhet. Hvis der er en utvikling i systemet mot et høiere nivå f. eks. økning av kapitalen, overgang til høiere teknikk osv., kan vi ikke ta u som en korrekt indikator av systemets nettoydelse. Da må vi også regne med produktive ydelser som inkorporeres i en økning av kapitalbeholdningen som altså ytrer sig ved en sparing i realøkonomisk forstand. Men under stasjonære forhold kan vi ta u som et uttrykk for nettoproduksjonen i samfundet.

Under stasjonære forhold er det derfor naturligt å ta u som et mål for størrelsen av systemet. I et stasjonært system er det forøvrig likegyldig om vi istedetfor u betrakter det effektive forbruk x (nasjonalinntekten), idet vi i et stasjonært system kan bortse fra svingninger i lagerbeholdningen X . Ved et passende valg av måleenheter for u og x , (hvorved der eventuelt kunde tas hensyn til svinn), kan vi i det stasjonære tilfelle simpelt hen sette $u = x =$ den samlede nasjonalinntekt. Dette gjelder for et sluttet system. (Ingen forbindelse med "utlandet").

Hvor stor kapitalbeholdning trenges for å holde denne strøm $u = x$ vedlike? Det trenges maskiner i fabrikkene, jernbaner etc. til transport, lagerhus osv. Dette blir hele nasjonens utstyr av realkapital. Under stasjonære forhold holdes denne kapitalstock konstant. Hvis u skulde holdes f. eks. dobbelt så stor, vilde det være nødvendig å ha en dobbelt så stor kapitalstock, forutsatt samme produksjonsteknikk. Forholdet mellom kapitalstocken og produksjonen av konsumgoder i et stasjonært samfund er altså en parameter som er bestemt av de spesielle produksjonsforhold i dette samfund. Denne parameter vil kjennetegne produksjonens oppbygning i det betraktede stasjonære system. Den uttrykker hvor sterkt kapitalistisk produksjonen er, (ordet kapitalistisk da tatt i den rent konkrete betydning av stor eller liten realkapital, ikke i betydningen av privatkapitalistisk kontra sosialkapitalistisk). Forholdet mellom kapital og konsumproduksjon (nasjonalinntekten) vil vi kalle μ , slik at vi under stasjonære forhold har

$$(1) \quad V + W = \mu x$$

hvor V og W er den del av kapitalen som er beskjeftiget henholdsvis i produksjonen av konsumgoder og i produksjonen av kapitalgoder. Hvis der f. eks. hvert år produseres 100 enheter nasjonalinntekt og det hertil trenges en tilsvarende kapital på 500 enheter, så vil μ være lik 5. μ kan opfattes som fabrikasjonskoefficienten for kapitalen som produksjonsfaktor. (Om begrepet fabrikasjonskoefficient se forelesninger over produktivitetslovene). Det er den totale fabrikasjonskoefficient for kapitalen, ti den omfatter alt det som trenges av kapital, både direkte og indirekte, for produksjonen av en konstant strøm u . μ kan også kalles kapitalutstysprocenten. Disse forskjellige betegnelser tjener til å belyse de forskjellige betydninger av denne parameter .

Kapitalutstysprocenten uttrykker forholdet mellom et beholdningsbegrep og et strømningsbegrep. Vi skal nu se på en koefficient som uttrykker forholdet mellom to strømningsbegreper. Vi spør: Hvor sterkt slites kapitalen pr. år? Dette spørsmål må ikke blandes sammen med spørsmålet om hvor stor μ er. μ uttrykker kun hvor stor beholdning av kapital som er tilstede, det spørsmål vi nu stiller refererer sig til hvor raskt kapitalen roulerer. Den totale slitning pr. tidsenhet er lik $v + w$. Denne størrelse setter vi nu i forhold til x , vi definerer m. a. o. en parameter, m , ved ligningen

$$(2) \quad v + w = mx.$$

m er den totale slitningsprocent. Forholdet m innbefatter altså all kapitalslitning som er nødvendig, både direkte og indirekte, for å vedlikeholde strømmen x .

Vi skal undersøke hvorledes m avhenger av de partielle slitningsprocenter for V og W . Disse betegner vi med henholdsvis h og k , og de er definert således at den direkte slitasje foranlediget ved konsumvareproduksjon er $v = hx$, og slitasjen foranlediget ved kapitalproduksjon, er $w = ky$. Det er rimelig å sette slitningen på V i forhold til x og slitningen på W i forhold til y (kapitalproduksjonen). Med disse betegnelser blir den totale slitning lik

$$(3) \quad mx = hx + ky.$$

Vi ønsker å finne den sammenheng som består mellom parametrene m , h og k . Denne

sammenheng er ennu ikke uttrykt ved (3) idet vi ennu ikke har kjennskap til forholdet mellom x og y som det vil ytre sig i det stasjonære system. Dette forhold avhenger imidlertid igjen av slitningsprocenten. Det er f. eks. klart at jo større årlig slitning, dess større blir y i forhold til x , og dess større blir slitningen på kapital i kapitalproduksjonen.

For å finne den sammenheng det her er tale om, vil vi først stille op en rent generell kinematisk sammenheng som uttrykker kapitalbeholdningens vekst. Har vi funnet en generell kinematisk sammenheng, så kan vi herav alltid finne en tilsvarende stasjonær sammenheng ved å sette de fremkomne tilvekstgrader lik 0. Dette er et hyppig anvendt knep som ofte er til stor nytte under analysen.

Den relasjon vi nu har for øie er følgende: Den samlede kapitalmasse betegner vi for korthets skyld $Z = V + W$. Tilvekstgraden for Z er differensen mellom tilgangen og avgangen i kapitalmassen pr. tidsenhet, altså

$$(4) \quad \dot{Z} = y - (hx + ky)$$

Dette er den kinematiske ligning for kapitalbeholdningens utvikling. Hvis der ingen utvikling skjer, har vi spesialtilfellet: en stasjonær kapitalbeholdning. Vi har altså da $\dot{Z} = 0$, d. v. s. i det stasjonære tilfelle er

$$(5) \quad y = hx + ky$$

d. v. s.

$$(6) \quad y = \frac{h}{1-k} x$$

Høire side i (5) er imidlertid det samme som mx , slik at vi i det stasjonære tilfelle også kan skrive

$$(7) \quad y = mx$$

Sammenlignes (6) og (7), ser vi at

$$(8) \quad m = \frac{h}{1-k}$$

Dette er den sammenheng mellom den totale slitningsprocent m og de partielle slitningsprocenter h og k som vi ønsket å finne. (8) viser f. eks. at når den direkte slitningsprocent h fordobles, men k er uforandret, så fordobles m .

Innholdet av formel (8) kan også belyses på en annen måte nemlig ved å følge behovet for kapital-reproduksjon skridt for skridt bakover. Hvis der pr. tidsenhet produseres en total nasjonalinntekt x , så bevirker dette en direkte slitning hx . Denne må erstattes ved produksjon av ny kapital hx . For å produsere en ny kapital hx pr. tidsenhet sliter vi imidlertid på kapitalen W . Slitningsprocenten her er k , slik at vi får kx å regne med en slitning lik hx . Også denne slitning må erstattes ved en kapitalproduksjon hvis systemet skal være stasjonært. Og denne sistnevnte kapitalproduksjon sliter igjen på kapitalen W , nemlig med k^2hx o. s. v. ad infinitum. Den totale slitning, som direkte og indirekte forårsakes ved den årlige konsumproduksjon x blir altså

$$(9) \quad mx = hx(1 + k + k^2 + \dots) = \frac{h}{1-k} x \quad \text{d.v.s.} \quad m = \frac{h}{1-k}$$

$(1 + k + k^2 + \dots)$ er summen av en konvergerende uendelig geometrisk rekke lik

$\frac{1}{1-k}$ når $|k| < 1$. Vi kommer altså ved dette resonnement til samme resultat som foran.

8512. Produksjonspolitikken ligning i en forenklet form.

I punkt 8511 har vi fremhevet et par viktige begreper som karakteriserer størrelsesforholdet mellom forskjellige beholdnings- og strømningsbegreper. Vi går nu over til å betrakte relasjoner som er essensielt dynamiske og som sier noget om produksjonspolitikken i samfundet.

La oss igjen betrakte vårt tableau économique. Sett at der av en eller annen grunn fremkommer et mer-forbruk så x vokser. Det tappes altså mere ut av X enn det kommer inn. En slik økning i forbruket vil normalt øve innflydelse på innstillingen hos dem som bestemmer produksjonens tempo, det være sig en privatkapitalistisk driftsherre eller en centralledelse. Vi vil stille op en ligning som tilnærmelsesvis karakteriserer intensiteten i denne virkning på produksjonsvirksomheten. Først og fremst vil vi forsøke å uttrykke hvorledes

endringer i forbruket påvirker kapitalproduksjonen. Vi vil studere den trykkforplantning som herunder kommer istand.

Det synes å være plausibelt å anta at hvis slitasjon på kapitalgjenstander, altså mx , tiltar så vil det stimulere kapitalproduksjonen y . Vi vil tenke oss at trykkforplantningen virker som om de der leder produksjonen tilnærmevis igangsetter så meget kapitalproduksjon at de holder slitasjonen stangen. Hvis x var stasjonær, kunde vi altså tenke oss at produksjonspolitikken ligning var

$$(1) \quad y = m x$$

Dette representerer imidlertid bare det ene hensyn som produksjonens ledere tenkes å ta: hensynet til vedlikehold av kapitalbeholdningen. Sett nu at den årlige konsumsjon ikke er konstant, men f. eks. stigende. Lederne av kapitalproduksjon får da et motiv til nemlig det å øke kapitalbeholdningen op til den høide som trenges for å vedlikeholde konsumvareproduksjonen på det nye nivå. Hvis eksempelvis konsumsjonen år om annet er 100 enheter, og der f. eks. må regnes med en total slitningsprocent på $m = 0,30$ og en total fabrikkasjonskoeffisient på $\mu = 5$, vil det hvert år måtte produseres 30 enheter kapital til vedlikehold, og kapitalbeholdningen måtte holdes på 500. Vi har altså $x = 100$, $y = 30$ og $Z = 500$. Sett nu at forbruket et visst år stiger fra 100 til 110 pr. år. Da må der det år produseres ikke bare 30 enheter kapital til vedlikehold, men dessuten 50 enheter kapital for å bringe kapitalbeholdningen op fra 500 til 550. Den nye konsumsjon av 110 krever nemlig en kapital på 550. Vi får altså det år en total kapitalproduksjon på 30 + 50 enheter. Fra neste år vil reinvesteringsbehovet bli 33 enheter. Her i talleksemplet har vi gjort "hele skridt", betraktet tilveksten pr. år. Den kontinuerlige betraktningssmåte kommer til uttrykk i ligning (2) nedenfor. En forholdvis liten økning i forbruket av ferdigvarer nødvendiggjør altså en relativt sett meget stor økning i kapitalproduksjonen.

Når vi tar i betraktning begge de her nevnte ting: både hensynet til kapitalproduksjon for reinvestering og kapitalproduksjon for nyinvestering, kan vi altså formulere produksjonspolitikken slik:

$$(2) \quad y = m x + \mu \dot{x}$$

hvor $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ er veksthastigheten av konsumsjonen m. h. p. tiden. Dette er et typisk eksempel på en dynamisk, nærmere bestemt en makrodynamisk, ligning, idet vi ved siden av størrelsen x har med veksthastigheten \dot{x} m. h. p. tiden. (I vårt talleksempel foran var $\dot{x} = 10$ enheter).

Ligning (2) uttrykker naturligvis produksjonspolitikken kun i en uhyre forenklet form. Vil vi gi en mere detaljert beskrivelse, må vi gå bakenfor totalbegrepene, se på virkningen av tilbud og etterspørsel, monetære faktorer o.s.v. Her gjør vi de forenklete forutsetninger for å få en situasjon som er simpel nok til at vi etterhvert kan arbeide oss frem til en determinert teori.

Den virkning som er uttrykt ved annet ledd i (2) er særlig blitt fremhevet av J. B. Clark. Dette at lederne av kapitalproduksjonen diskonterer en økning i konsumsjonen som et nytt stasjonært nivå hvor der trenges en ny høide på kapitalbeholdningen, blev av Clark tatt som ett av de viktigste ledd i forklaringen av konjunkturbevegelsene.

Spørsmålet blev først reist i sin precise form av den amerikanske statistiker og konjunkturforsker Wesley C. Mitchell. Mitchell hadde rent statistisk konstatert at hvis man følger kapitalproduksjonens og konsumsjonens størrelse statistisk gjennom en konjunkturcykle, så vil man som regel finne at kapital-

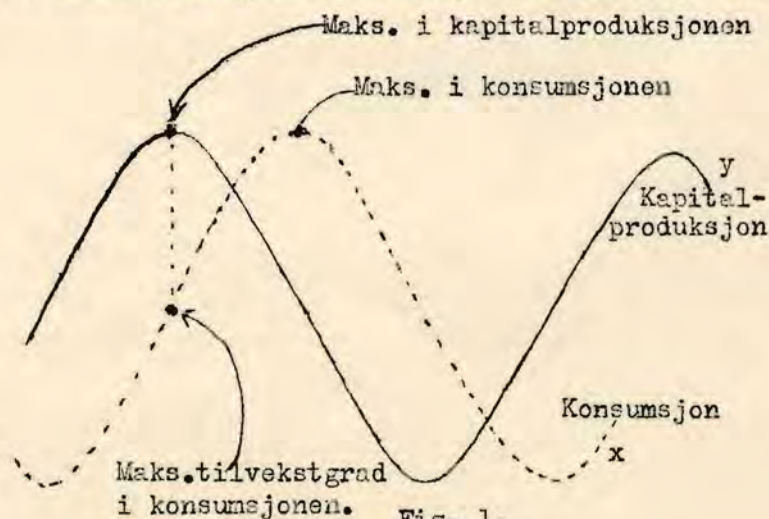


Fig. 1.

produksjonen kulminerer før konsumsjonen. (Se fig. 1. For det foreliggende spørsmål kan vi med tilstrekkelig nøiaktighet si at produksjonen av konsumvarer og salget av konsumvarer er det samme).

Herav drog så Mitchell den slutning at endringen i kapitalproduksjonen må være "årsaken" til omslaget, og at endringene i konsumsjonen først kommer som en sekundær "virkning". Clark hevder at visstnok er den rekkefølge Mitchell har påvist, ubestri-

delig, men Mitchells fortolkning er feilaktig. For - sier Clark - sammenhengen mellom produksjonen av kapitalgjenstande og konsumsjonen er ikke en sammenheng mellom de absolutte størrelser x og y , men en sammenheng mellom y og tilvekstgraden \dot{x} . Clark tenker altså på den virkning som er uttrykt ved annet ledd i ligning (2). Hvis vi bare tar hensyn til dette ledd, får vi $y = \mu \dot{x}$, d. v. s. y som en første tilnærmede proporsjonal med \dot{x} . Det er på grunnlag av en slik tilnærmede at vi har tegnet de to kurver i fig. 1. Man vil finne at \dot{x} vil være størst (kurven x brattest) ca. $1/4$ periode foran kulminasjonspunktet i x . Og dette punkt svarer til maksimum av y . Hvis vi har $y = \mu \dot{x}$ er det jo klart at kapitalproduksjonen vil nå maksimum, ikke i det punkt hvor x er størst, men i det punkt hvor x har den største brattethet. Altså, sier Clark, kan vi like godt fortolke Mitchells statistiske resultater ved å si at det er konsumsjonen som "virker" på produksjonen og ikke omvendt.

I og for sig er dette en riktig bemerkning av Clark. Den ryddet av veien en misforståelse som begynte å bre sig ved Mitchells påstand om kapitalproduksjonen som den "primære kraft". Clarks synspunkt blev også akseptert av Mitchell.

Men Clark gikk videre, og her begår han en feil. (Mitchell aksepterte også denne siste feilaktige del av Clarks resonnement. Se om hele denne diskusjon polemikk mellom professor Frisch og professor Clark i Journal of Political Economy 1931 -32). Clark sier: Det er klart at konsumsjonen kan ikke stadig fortsette med \dot{x} med en hastighet. Der vil der komme en i alle fall brattethets avta. Og fra det øieblikk m. kapitalproduksjonen avta absolutt sett. Og derved er nedgangen satt igang. Clark mente altså at den her betraktede sammenheng mellom konsum og kapitalproduksjon var tilstrekkelig til å forklare at der før eller senere med nødvendighet må komme et omslag. Alvin H. Hansen har presisert denne feilaktige del av Clarks påstand. Hansen sier: Sett at vi befinner oss på en opadgående gren for produksjonen og konsumsjonen. Siden produksjonsmidlenes mengde er begrenset, kan konsumsjonen ikke stige til uendelig. Det er en viss øvre grense for konsumsjonen. Afortiori må der altså komme et punkt da tilvekstgraden \dot{x} for konsumsjonen avtar. Og fra og med dette øieblikk, sier

Hansen, må kapitalproduksjonen, på grunn av proporsjonaliteten $y = \mu \dot{x}$, begynne å falle absolutt sett.

Feilen her består for det første i at man ikke har tatt hensyn til reinvesteringen, altså til første ledd i (2). Hvis dette gjøres, viser det sig at selv om konsumsjonen er gitt som en cykle, vil ikke maksimum for kapitalproduksjonen nøyaktig falle sammen med maksimum for \dot{x} .

Der er et lite tidsintervall mellom de to kulminasjonspunkter. Dette kan regnes ut.

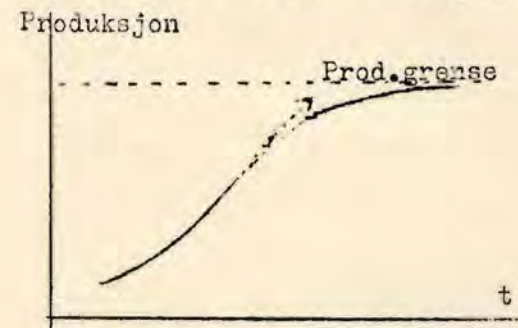


Fig. 2.

I dette lille tidsrum er det nettop at "konjunktorenes gåte" ligger. Det er det som skjer her som forklarer mekanikken i omslaget. Ved å gjøre forutsetningen $y = \mu \dot{x}$ eliminerer man dette tidsrum og abstraherer derved igrunnen fra solve den ting som trenger forklaring.

Det annet hovedpunkt er det at hvis vi formulerer sammenhengen på den mere korrekte måte (2), da er ikke lenger produksjonsmidlenes begrensede mengde tilstrekkelig betingelse for at y skal begynne å synke. Det kan da nemlig tenkes f. eks. at utviklingen går mot et stasjonært nivå som øvre grense for produksjonen. (Se fig. 2). Noget konjunkturomslag kan da altså ikke med nødvendighet utledes. Det er klart at det må være så. Ti slik som problemet er formulert av Clark og Hansen er det indeterminert: vi har jo bare en ligning, nemlig produksjonspolitikens ligning, men vi har to variable x og y . Vi kan altså ikke forklare utviklingen av x og y i tiden, og altså heller ikke trekke "noen bestemt slutning om tidsformen. For å kunne gjøre det, måtte vi ha en relasjon til, f. eks. en betingelse på konsumsjonssiden. Først da blir problemet determinert. Tidsformen vil da selvfølgelig avhenge av arten av den konsumsjonsbetingelse man trekker inn. Det kan oppstilles forenklede betingelser på konsumsjonssiden, som ikke leder til cykliske bevegelser, og der kan oppstilles betingelser som leder til cykliske bevegelser. Eksistensen av de ikke cykliske løsninger er et tilstrekkelig bevis mot den siste del av Clarks resonnement.

Tilføielse til 8511. 3dje avsnitt.

Størrelsen μ gir bare et uttrykk for kapitalens størrelse i forhold til produksjonens totale størrelse. Den sier intet om blandingsforholdet mellom faktorene. Dette tenkes hele tiden optimalt, og da kan med en viss tilnærmede μ betraktes som konstant.

8513. En bremsningsligning på grunn av kassabehovet.

For å bestemme tidsformen (tidskurvene) for konsumsjonen x og kapitalproduksjonen y trenges to uavhengige ligninger, og ligningsystemet må være dynamisk. (To statiske ligninger mellom x og y vilde jo nemlig løse x og y fast som to konstanter). Vi har allerede oppstillet en ligning mellom x og y , nemlig produksjonspolitikken ligning. For å finne en ligning til er det naturlig å betrakte den omstendighet at produksjonen krever et særskilt apparat for å omsettes: Bank- penge- og kredittvesen. Det ligger utenfor vårt formål å diskutere de forskjellige sider av omsetningsapparatet i detalj. Vårt formål her er bare å ta et raskt tverrsnitt gjennom omsetningsmekanismen for derved å komme på spor etter ett eller annet som kan tenkes å bremse utviklingen under en oppgangsperiode. Denne sammenheng vil danne en ny betingelse som sammen med den allerede behandlede betingelse (produksjonspolitikken ligning) vil gjøre systemet determinert.

Det er klart at et slikt bremsningsmoment eksisterer rent konkret sett. Under en oppgangsperiode f. eks. vil den økende vareomsetning kreve en stadig ekspansjon i penge- og kredittvesenet. Herunder opparbeides imidlertid etter hvert en sterkere og sterkere motstand mot en videre utvidelse av penge- og kredittvesenet på grunn av vanemessig bestemte, konservative, faktorer i omsetningsmekanismen.

Det er det helt generelle prinsipp om en motstand mot utslag fra det tilvante som her gjør sig gjeldende på det spesielle monetære område. Denne motstand virker som et elastisk tilbaketrekk som blir sterkere jo større utslaget er. Vi kan illustrere dette ved en mekanisk analogi. Sett at vi har en kule som er forbundet med et punkt ved en strikk. Trekkes kulen ut til siden, vil der oppstå et elastisk tilbaketrekk (p. g. s. stramningen i strikken) Dette elastiske tilbaketrekk er dess sterkere jo lenger kulen trekkes bort fra punktet. Trekket i snoren illustrerer den stramning som tilslutt opparbeider sig på penge- og kredittmarkedet når en konjunkturoppgang har bragt penge- og bankomsetningen opp på et nivå som ligger langt over det som man er vant til.

Vi vil forsøke å oppstille en ligning som gir et tilnærmet uttrykk for dette elastiske tilbaketrekk på det monetære område. Herunder skal vi feste oppmerksomheten vedlig ved det som Walras kaller "encaisse désirée", "den forønskede kassabeholdning" eller, som vi for korthets skyld vil kalle det: "kassabehovet".

Teoretisk sett kan man tenke sig at en hvilken som helst pengemengde, selv om den var aldri så liten, -f. eks. 100 kr.-, vilde kunne besørge et lands hele omsetning bare pengemengden sirkulerte fort nok. Det er imidlertid klart at slike forutsetninger har ingen realitet. I sanfundet har der utviklet sig visse omsetningsformer som gjør at det er en viss fysisk grense for betalingsmidlenes sirkulasjonshastighet. Pengene må sedvanemessig hvile en viss tid i forskjellige kasser hos dem som deltar i omsetningen. For å besørge en viss omsetningsmengde må der altså ligge hos publikum en viss samlet kassabeholdning. (Vi tenker her ikke på seddelbankens seddelreserve).

Dette kassabehov tenker vi oss, som en første tilnærming, proporsjonalt med vareomsetningens størrelse. Proporsjonalitetsfaktoren vil være forskjellig på de forskjellige områder av omsetningsapparatet. Her gjennomfører vi en todeling, idet vi betrakter omsetningen av konsumgoder og omsetningen av nyproduserte kapitalgjenstande hver for sig. La rx være kassabehovet i omsetningen av konsumvarer og sy kassabehovet i omsetningen av kapitalgoder. Det totale kassabehov blir da

$$(1) \quad \omega = rx + sy$$

r og s er "kassabeholdningskoeffisientene". De uttrykker den sanlede effekt av to forskjellige sett faktorer som skaper kassabehovet, på den ene side pengenes sirkulasjonshastighet, på den annen side varenes sirkulasjonshastighet. En høi sirkulasjonshastighet for pengene gjør r og s liten, men en høi sirkulasjonshastighet for varene gjør r og s stor. Forutsetningen om proporsjonalitet mellom kassabehovet og omsetningens størrelse betyr at r og s er konstanter.

Når x og y vokser under en oppgangsperiode, vil kassabehovet ω øke tilsvarende d. v. s. vi kan ta økningen i ω som et tilnærmet uttrykk for konsumsjonens størrelse. Den bremsende kraft som herunder oppstår vil vi anta først og fremst rammer forbruket. Rent konkret sett synes det ganske plausibelt å knytte bremsningselementet til konsumsjonen. Konsumsjonen er et av de første elastiske elementer som gir etter for det trykk, det spenningsforhold som oppstår på grunn av penge- og kredittmarkedets stramning. Forretningsfolk som under oppgangen har utvidet sin konsumsjon til rene luksusvarer, vil ved den inntredende stramning iallefall nedsette stigningstempoet i konsumsjonens utvidelse, selv om de ikke straks lar konsumsjonen synke absolutt sett. Hvis vi som en første tilnærming

tenker oss at denne bremsende virkning som utgår fra kassabehovet til forbrukets veksthastighet er en simpel proporsjonalitet, så kan vi altså skrive

$$(2) \quad \dot{x} = c - \lambda \omega$$

hvor c og λ er positive konstanter. c er en positiv konstant som uttrykker den underliggende "optimistiske" tendens til å oprettholde og om mulig utvide konsumsjonen, mens λ er en positiv proporsjonalitetsfaktor som uttrykker styrken av bremsningen.

8514. Et system med trend-bevegelse.

Vi skal nu kombinere den forutsetning som ligger i produksjonspolitikkens ligning med forutsetningen om et bremsningselement. Det vil gi et determinert system som bestemmer utviklingens tidsform. Dette vil bli den første essensielle makrodynamiske analyse som vi støter på i disse forelesninger. Problemstillingen vi nu betrakter er selvfølgelig kolossalt forenklet. Men det eksplisiterer iallefall arbeidsmåten ved den makrodynamiske analyse.

Vi har følgende 3 ligninger å gå ut fra:

$$(1) \quad y = mx + \mu \dot{x}$$

$$(2) \quad \dot{x} = c - \lambda \omega$$

$$(3) \quad \omega = rx + sy$$

Ligning (3) er en statisk relasjon. Derfor kan vi eliminere ω direkte ved innsetning i (2), hvilket gir

$$(4) \quad \dot{x} = c - \lambda(rx + sy)$$

Da både (1) og (4) inneholder \dot{x} , kan vi gå et skritt videre og eliminere \dot{x} . Av (1) får vi

$$(5) \quad \dot{x} = \frac{y - mx}{\mu}$$

På ethvert tidspunkt må altså \dot{x} i ligning (4) og \dot{x} i ligning (5) være like, d.v.s. $y - mx/\mu = c - \lambda(rx + sy)$ eller

$$(6) \quad (1 + \lambda\mu s)y - (m - \lambda\mu r)x = \mu c$$

Siden (6) er oppådd indirekte etter en eliminasjonsprosess og bare beskriver hvorledes x og y vil variere sammen (hvis våre forutsetninger er oppfylt), kaller vi (6) en faserelasjon i motsetning til de opprinnelige strukturrelasjoner (1) og (2).

Løses (6) m. h. p. y , får vi

$$(7) \quad y = \frac{m - \lambda\mu r}{1 + \lambda\mu s} x + \frac{\mu c}{1 + \lambda\mu s}$$

Forbindelsen mellom x og y er en rett linje (fig. 1) av formen $y = A + Bx$, hvor A og B er konstanter hvis størrelse uttrykt ved strukturparametrene m, μ etc. fremgår av formel (7). Linjen $y = A + Bx$ kunde tenkes observert statistisk som en regresjonslinje i et spredningsdiagram for x og y . Med de sterkt forenkende forutsetninger vi har gjort, vilde vi neppe få nogen særlig god verifikasjon av teorien, (vi skal senere se på mere kompliserte og mere realistiske skjemaer), men for å illustrere metoden la oss foreløpig tenke oss at der foreligger en statistisk bestemmelse av linjen, d. v. s. av konstantene A og B .

Vi vil da kunne trekke visse slutninger om størrelsen av strukturparametrene m, μ etc., idet vi jo har

$$(8) \quad A = \frac{\mu c}{1 + \lambda\mu s}, \quad B = \frac{m - \lambda\mu r}{1 + \lambda\mu s}$$

De to ligninger (8) er selvfølgelig ikke tilstrekkelig til å bestemme alle strukturparametrene. Men ligningene sier iallefall noget om dem. Hvis vi velger et vilkårlig sett verdier for m, μ osv., vil dette sett sannsynligvis ikke tilfredsstillende ligningene (8). Sett f. eks. at vi hadde observert $B = 1$ og $A = 2$. Setter vi eksempelvis $\mu = 0,3, c = 5, \lambda = 1, s = 0,4$, får vi at A skulde være lik $0,13$, altså i strid med vårt observasjonsmateriale. Ved de to relasjoner for A og B har vi forminsknet antallet av frihetsgrader i strukturparametrene.

Vi skal nu se på tidsformen for utviklingen. Ligning (7) skrevet på formen $y = A + Bx$ uttrykker y lineært ved x, A og B . La oss innføre dette uttrykk i (1). Det gir

$$(9) \quad A + Bx = mx + \mu \dot{x}$$

Dette er en vekstligning med den ene ukjente x . Våre forutsetninger er altså ekvivalent med å forutsette at der mellom x og \dot{x} eksisterer relasjonen $\dot{x} = A/\mu + (B - m/\mu) \cdot x$ eller kortere

$$(10) \quad \dot{x} = a + bx$$

hvor $a = A/\mu$ og $b = B - m/\mu$ er konstanter der er entydig bestemt ved strukturparametrene. Mellom x og \dot{x} eksisterer altså en rettlinjet sammenheng som antydnet i fig. 2., idet a sannsynligvis er positiv og b negativ. Denne sammenheng må ut fra våre forutsetninger gjelde på ethvert tidspunkt.

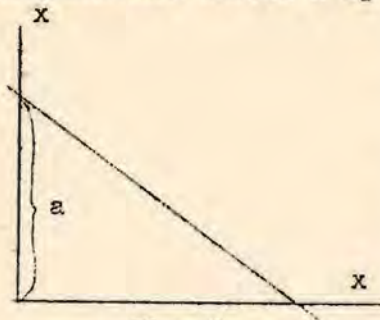


Fig. 2

$x_s = 2$, $s = 0$, så får vi

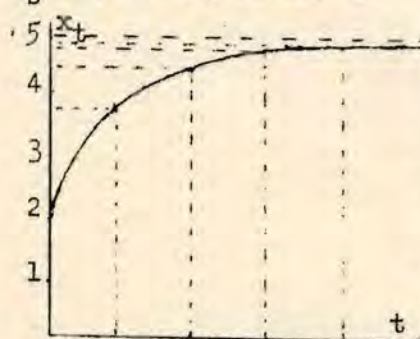


Fig. 3.

Hvis vi har påvist relasjonen $\dot{x} = a + bx$, følger av 8503 formel (8) og (9) at tidsformen for x må bli en jevn utvikling uten sykler. Vi skal illustrere dette ved et talleksempel. Ligning (9) i 8503 kan skrives på formen

$$a + b x_t = (a + b x_s) e^{b(t-s)}$$

hvor s er initialtidspunktet. Setter vi $a = 5$, $b = -1$,

$$x_t = 5 + 3 e^{-t} \quad \text{hvor } e = 2,7183.$$

Dette gir en tidsform på x_t som antydnet i fig. 3. Når tidsformen for en av de variable er gitt, kan tidsformen for de øvrige lett bestemmes ved i en av strukturbetingelsene nå å anta den først bestemte variable som kjent.

Vi har her altså vist at ut fra de her antatte for- enklende forutsetninger vil systemet utvikle sig efter en dempet eksponentialkurve (som en kapital satt på negativ rente).

Det at vi her ikke får sykler kan også sees av den omstendighet at vi som antydnet i fig 2 får en linear sammenheng mellom x og \dot{x} . Hvis x skulde forløpe cyklisk som under en konjunktur bølge, måtte jo \dot{x} først stige når x stiger (i oppgangens første del) og senere avta når x stiger (i oppgangens siste del).

Den teorien vi her har utviklet er altså, som konjunkturteori betraktet, helt rudimentær. Den har interesse kun som simplifisert eksempel på hvordan man må gå frem når man vil utvikle en teori som er determinert og dynamisk. Vi skal senere komplisere forutsetningene slik at vi får en tidsform som er cyklisk.

852. Kapitalgjenstandenes slitningstid. Ny-investering og re-investering.

8521. Ekko-fenomenet. Eilert Sundts lov.

Før vi forfølger tankegangen fra §851 og kompliserer forutsetningene skal vi se litt på begrepene nyinvestering og re-investering. Vi kan illustrere disse begreper ved hjelp av den lov i befolkningslæren som går under navn av Eilert Sundts lov. Denne sier at hvis der et bestemt år (eller i en bestemt kortere periode) som f. eks. et tre-år) har vært svært mange fødsler, vil der efter ca. 27 år (en generasjon) igjen bli svært mange fødsler, efter nye 27 år igjen mange fødsler osv. Det blir flere efterkommere efter store kull enn efter små kull. Vi får altså en generasjonscykle på ca. 27 år. Eilert Sundt studerte også fødselsbølgens forplantning til andre demografiske fenomener: aldersopbygningen, ekteskapslyppigheten osv. Her interesserer vi oss imidlertid kun for selve generasjonsvekslingen, altså den ene fødselsbølges virkning på næste fødselsbølge.

Lignende fenomener kan iakttas på en rekke andre områder, bl. a. på mange rent økonomiske fenomener. Vi betegner det generelt som "ekko"-fenomenet.

Ekkofenomenet gjør sig også gjeldende for fornyelsen av samfundets kapitalutstyr. Vi har her et "regenereringsfenomen" som er fullstendig analogt med forholdet på det befolkningsmessige område. Kapitalgjenstandene slites ut og må erstattes, og jo flere maskiner det lages et visst år, dessto flere må det efter en tids forløp bli å erstatte for at kapitalstokken skal opprettholdes.

For å klarlegge problemstillingen vil vi først ta et stilisert eksempel som viser dette kapitalistiske ekkofenomen i dets ytterste renhet.

La oss anta at der produseres bare ett slags maskiner, og at alle disse varer nøiaktig like lenge, nemlig 10 år. Vi antar at det på et bestemt tidspunkt f. eks. i 1905, tilkommer en ny-investering på 1000 slike maskiner. Disse representerer altså en økning av kapitalmassen. Det er i og for sig intet urealistisk i det å forutsette at en hel del nye maskiner kan lages plutselig i et bestemt år, her

1905. Når først de store faste anlegg som trenges for å lage maskiner er tilstede, tar det ikke lang tid å øke maskinproduksjonen. Det faste anlegg kan gå en del år med liten kapasitetsutnyttelse, og så plutselig spy ut produkter når ordrene kommer. Et eksempel gir den amerikanske jernproduksjon, hvis kapasitetsutnyttelse ved nyttår 1933 bare var ca. 15%, men ved midten av juli 1933 var ca 59%. Vi skal forøvrig ikke her gå nærmere inn på spørsmålet om hvor raskt en slik ny-investering kan komme istand. Det er et spørsmål om kapitalgjenstandenes konstruksjonstid, og her interesserer vi oss for deres slitningstid. Det er nemlig slitningstiden som bestemmer sammenhengen mellom nyinvestering og reinvestering.

Forutsetningen om at alle maskiner varer nøyaktig like lenge er selvfølgelig i høi grad urealistisk, og det av følgende grunner:

For det første er naturligvis kapitalgjenstandenes varighet avhengig av hvor hårdt de brukes. I §851 trakk vi nettopp inn sammenhengen mellom slitning og utnyttelse.

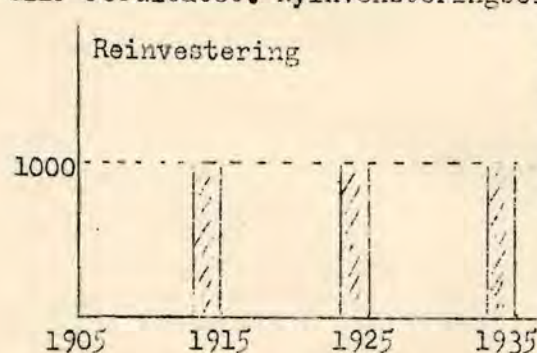
For det annet kan nye oppfinnelser, den av depresjonen fremtvungne rasjonalisering osv. bevirke at maskinene blir utrangert før de er teknisk opbrukte, altså før deres tekniske "varighet" er utløpet.

For det tredje vil bedriftenes evne til å fornye kapitalen være avhengig av deres finansielle stilling. En finansielt svakt stillet bedrift må "kjøre med fillene".

For det fjerde kan selve produksjonens volum være så innskrenket at driftsherrerne ikke finner det påkrevet å lage nye maskiner, selv om de har finansiell styrke til det. (Freia Chokoladefabrikk, Oslo, gir et konkret eksempel på dette. Fabrikken har stor ledig kapital, men den kjører allikevel nu med gamle maskiner fordi dette uten vanskelighet dekker den relativt lille efterspørsel i den nuværende depresjonstid.).

Det vilde altså vært mere realistisk å si at kapitalgjenstandenes levetid avhenger av den fase i konjunkturutviklingen hvor vi befinner oss, slik at altså levetiden selv er en ukjent variabel i vårt makrodynamiske system. Som en første tilnærmelse kan det imidlertid være interessant å se hvorledes utviklingen vilde blitt hvis levetiden virkelig var konstant. Derefter kan vi så se på hvilke modifikasjoner som må gjøres for å bringe teorien mere i overensstemmelse med virkeligheten.

La oss gå ut fra det simple eksempel hvor der i et visst år 1905 blev laget 1000 nye maskiner, som alle har en levetid på nøyaktig 10 år. Ut fra disse forutsetninger er det ikke vanskelig å se hvad slags reinvesteringskurve som blir resultatet. Nyinvesteringselementet 1000 maskiner vil skape et reinvesteringsbehov av 1000 maskiner hvert 10. år. (Se fig. 1). Tall og tidspunkter i disse eksempler er selvfølgelig vilkårlig valgt.). Vi har her et tydelig "ekko" som går igjen fra 1905 hvert 10. år. I dette simplifiserte eksempel blir styrken av hvert ekko nøyaktig det samme som styrken av nyinvesterings-dosen.



Det er særlig i to retninger dette system må generaliseres for å bli mere realistisk:

For det første har ikke alle maskiner like lang levetid. De kan tenkes inndelt i grupper etter levetiden (10-årige, 8-årige osv.). Virkningen av en slik varighetsfordeling vil være at tidsformen på reinvesteringen, (den reinvestering som følger av en enkelt nyinvesteringsdose), bli en dempet bevegelse. Reinvesteringen vil først gjennomløpe visse svingninger og så nærme sig mot et stasjonsart nivå.

For det annet må vi tenke oss at det ikke bare er en enkelt nyinvesteringsdose, men suksessive nyinvesteringsdoser fordelt på forskjellige tidspunkter.

Begge disse ting vil gjøre at reinvesteringen blir et sammensatt fenomen. Vi får en hel symfoni av ekkoer, som dels kan forsterke hverandre dels svekke hverandre. Det er sammensetningen av slike ekkoer som vi skal studere i denne § 852.

8522. Dempnången av ekko-utslagene. Kapitalgjenstandenes fordeling etter varighet.

La oss tenke oss en enkelt nyinvesteringsdose med en viss varighetsfordeling. Som et eksempel la oss anta at nyinvesteringsdosen består av 26 maskiner med følgende varighetsfordeling:

	2 stk.	1	1	årlige maskiner	
	5 "	2	"	"	
Tabell 0.	10 "	3	"	"	
	6 "	4	"	"	
	3 "	5	"	"	
					ialt 26 maskiner.

Ovenstående tabell er som man ser intet annet enn en vanlig statistisk hyppighetsfordeling.

Vi spør nu: Hvis på en bestemt tid disse 26 maskiner tilkommer som en nyinvesteringsdose, hvorledes blir tidsformen på den fremtidige reinvestering som må følge av denne nyinvesteringsdose hvis den nyskapt kapital skal opprettholdes? For å besvare dette spørsmål må vi ta for oss hver enkelt varighetsgruppe for sig. (Se tabell 1). De 2 ettårige maskiner må erstattes hvert år. Dette betyr at der hvert år må lages 2 maskiner, som angitt på første linje i tabell 1. De 5 toårige maskiner må erstattes hvert annet år, hvilket er angitt på annen linje i tabell 1 osv.

Tabell 1.

Nyinvest. tidspunkt t = 0		Reinvestering på tidspunktet t (idet det tidspunkt da nyinvesteringen skjer velges som tidens null-punkt.).																				
Antall maskiner i nyinvest. dosen.	Maskine- nes varighet.	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1 år.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2 "		5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
10	3 "			10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
6	4 "				6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	5 "					3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Ialt 26	Samlet år- lig reinv.	2	7	12	13	15	17	2	13	12	10	2	23	2	7	15	13	2	17	2	16

Summerer vi nu de enkelte kolonner i tabell 1, så får vi den samlede reinvestering i de enkelte år. Disse års-sommer er angitt i bunntinjen i tabell 1. Der er som man ser en viss tendens til en 3-års bølgebevegelse med maksimum omkring 3, 6, 9 år osv. Dette er hvad vi kunde vente, idet 3 år er tyngdepunktet i varighetsfordelingen. Der er imidlertid sterke uregelmessigheter i tallenes forløp. Disse uregelmessigheter skyldes den omstendighet at kapitalgjinstendene i eksemplet er ordnet bare i 5 grove varighetsklasser. I virkeligheten vil varighetsfordelingen være meget jevnere, der er nogen kapitalgjinstander som varer litt over 1 år, nogen 1 1/2 år osv. For å få et bedre eksempel vil vi ta en varighetsfordeling som den der er angitt i tabell 2 og grafisk fremstillet i fig. 1.

Tabell. 2. Vårighetsfordeling.

Varighet (år)	Antall kapitalenheter	Varighet (år)	Antall kapitalenheter
1	0	26	257
2	1	27	300
3	2	28	330
4	3	29	346
5	4	30	350
6	5	31	343
7	6	32	324
8	7	33	280
9	9	34	220
10	11	35	166
11	14	36	120
12	17	37	89
13	21	38	64
14	26	39	50
15	32	40	39
16	39	41	30
17	47	42	22
18	56	43	16
19	66	44	12
20	80	45	8
21	95	46	6
22	115	47	3
23	140	48	2
24	170	49	1
25	212	50	0

Ialt 4556.

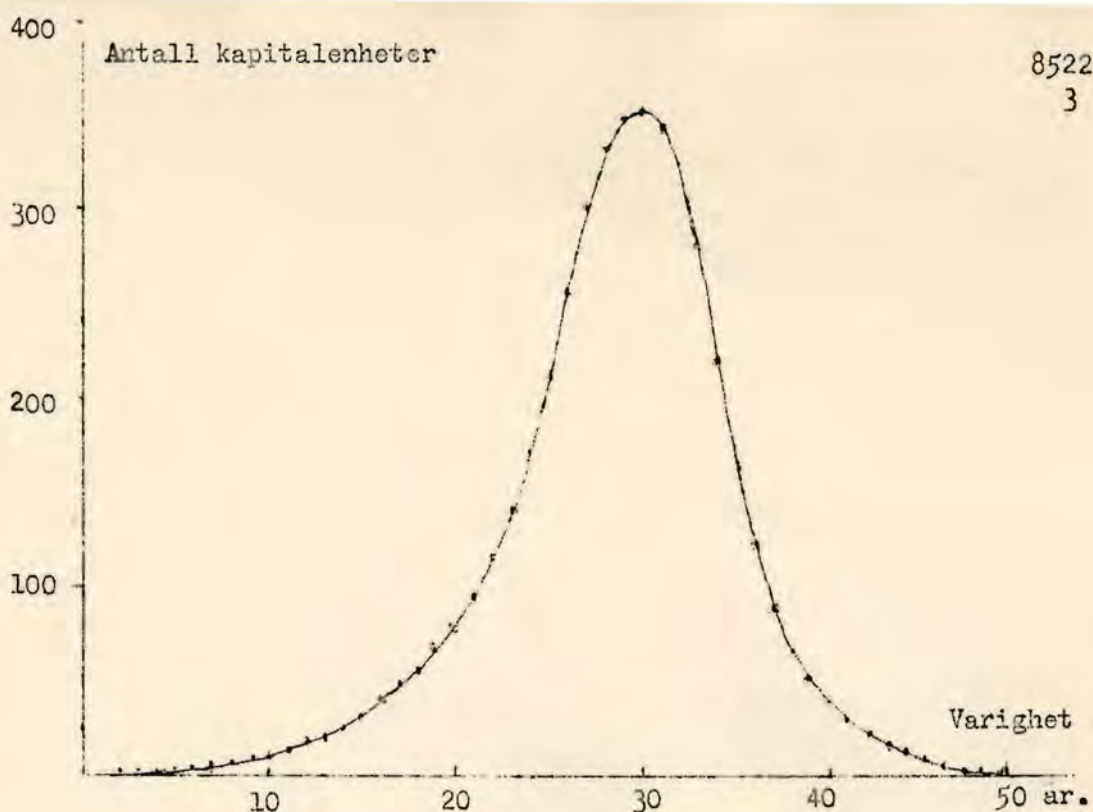


Fig. 1.

Som man ser er denne varighetsfordelingen meget jevn. Hvis denne varighetsfordeling behandles på samme måte som tabell 1, vil vi finne at den samlede årlige reinvestering blir som angitt i tabell 3. Resultatet er fremstillet grafisk i fig. 2.

Tabell 3.

t	Samlet re- invest.	t	Samlet re- invest.	t	Samlet re- invest.	t	Samlet re- invest.
1	0	26	279	51	49	76	134
2	1	27	311	52	281	77	20
3	2	28	366	53	0	78	79
4	4	29	346	54	373	79	0
5	4	30	405	55	18	80	184
6	8	31	343	56	372	81	311
7	6	32	374	57	68	82	31
8	11	33	296	58	347	83	0
9	11	34	268	59	0	84	485
10	16	35	176	60	505	85	51
11	14	36	213	61	0	86	17
12	28	37	89	62	344	87	348
13	21	38	131	63	112	88	152
14	33	39	73	64	374	89	0
15	38	40	145	65	25	90	478
16	50	41	30	66	417	91	27
17	47	42	157	67	0	92	149
18	73	43	16	68	271	93	345
19	66	44	145	69	142	94	4
20	99	45	55	70	214	95	70
21	103	46	147	71	0	96	570
22	130	47	3	72	390	97	0
23	140	48	246	73	0	98	34
24	205	49	7	74	90	99	305
25	216	50	228	75	250	100	311

Tyngdepunktet i varighetsfordelingen (tabell 2) er ved 30 år. Vi skulde derfor vente et maksimum i den samlede reinvestering omkring 30 år. Dette maksimum fremgår også tydelig av fig. 2. Vi skulde også vente et sekundært ekko ved 60 år og et ved 90 år. Disse ekkoer eksisterer også i fig. 2. Men der er her to ting å merke.

For det første ser vi at eftersom vi går utover tidsaksen i fig. 2 blir kurven mer og mer uregelmessig. I begynnelsen f. eks. op til omkring $t = 30$ er kurven stort sett meget regelmessig. Omkring $t = 40$ begynner uregelmessighetene å bli temmelig følbar, og fra omkring $t = 60$ setter den inn for alvor. Lenger ute f. eks omkring $t = 90$ er uregelmessigheten blitt meget sterk. Denne økning av uregelmessigheten skyldes imidlertid bare den omstendighet at vi fremdeles opererer med et talleksempel med en diskret varighetsfordeling. Vi skal senere

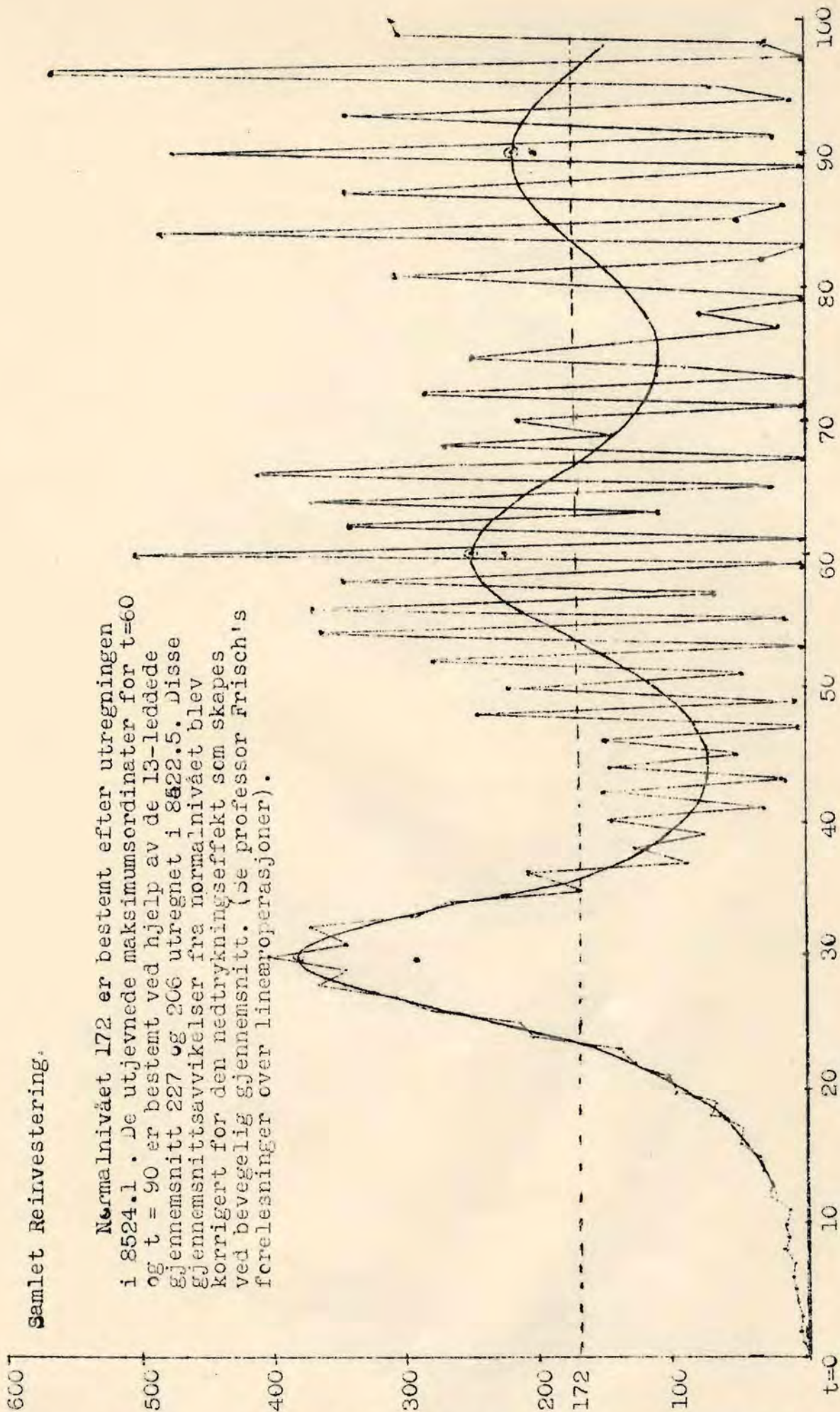


Fig. 2.

gi en nærmere forklaring av dette fenomen. Foreløbig nøier vi oss med å bemerke at det kun skyldes den vilkårlige karakter av det valgte talleksempel og ikke må tillegges nogen reell økonomisk betydning.

For å få øie på det økonomisk relevante må vi altså se bort fra disse uregelmessigheter. Den underliggende bevegelse som da kommer frem er i fig. 2 angitt ved den jevne helt optrukne kurve. Denne underliggende bevegelse har tydelige maksima ved 30, 60 og 90 år, den angir altså ekkoene. Men det er nu tydelig at utslagene i ekkoene svækkes eftersom vi går mot høire.

Den optrukne kurve i fig. 2 slynger sig omkring et visst "normalnivå" der er angitt ved den prikkede vertikale linje. (Dette gjennomsnittlige reinvesteringnivå er nærmere analysert i pkt. 8524). Og utslagene fra normalnivået avtar i styrke eftersom vi går mot høire. Vi ser det tydelig av den helt optrukne jevne kurve i fig. 2, og vi kan også verifisere det ved tallene i tabell. 3. Vi kan f. eks. ta et 13-leddet gjennomsnitt med centrum i hvert av tidspunktene 30, 60 og 90 år. Gjør vi det så får vi henholdsvis $3795/13 = 292$, $2857/13 = 227$, $2696/13 = 207$. Maksimums amplituden som svarer til tidspunktene 30, 60 og 90 er altså avtagende. Dette vil vi kalle ekkoenes dempningsfenomen. Dette er et reelt økonomisk fenomen som skyldes den ting at ikke alle kapitalgjenstander i nyinvesteringsdosen har nøyaktig samme varighet, men har en viss varighetsfordeling. Derved blir reinvesteringsbehovet endel spredt utover i tiden. Det melder sig ikke lenger så koncentrert omkring de typiske tidspunkter 30, 60 og 90 som det vilde gjort om der ikke hadde vært nogen spredning i kapitalgjenstandenes varighet. Og denne spredning av reinvesteringsbehovet gjør sig emu sterkere gjeldende ved de senere ekkoer. Spredningen øker ved hvert nytt ekko. Og fordi reinvesteringen blir spredt utover et stort tidsrum må selvfølgelig aktiviteten bli mindre sterk i selve maksimumsårene, d. v. s. utslagenes amplitude må avta.

I neste punkt skal vi studere dette spredningsfenomen ut fra et litt annet synspunkt, nemlig reinvesteringens oppløsning i komponentkurver, idet hver komponent representerer den "årsak" som skaper et bestemt av ekkoene.

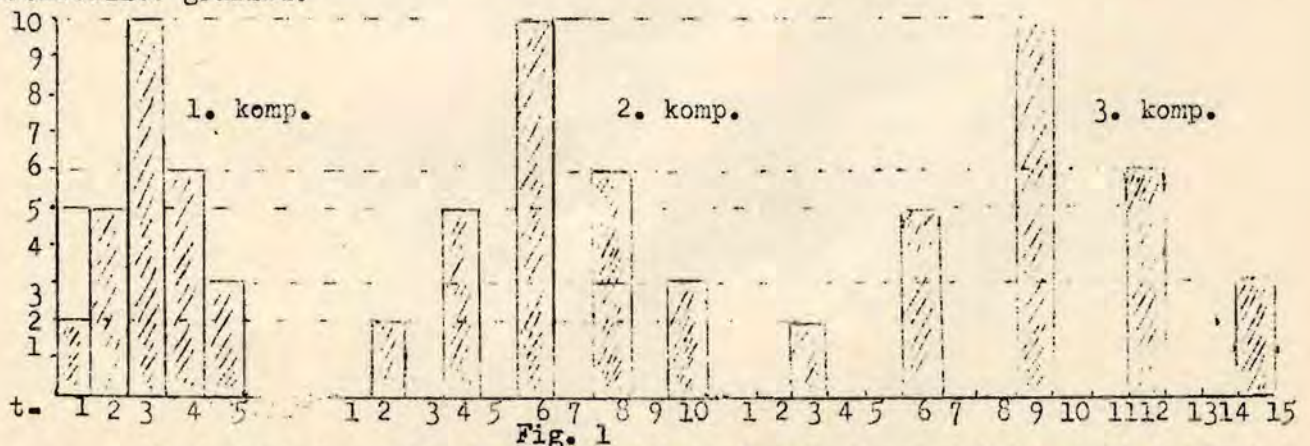
8523. Reinvesteringens oppløsning i komponenter (partialkurver).
"Porøse" og kontinuerlige komponenter.

La oss i tabell 8522.1 betrakte de nedadgående skrålinjer. Den første skrålinje har helningen 1 på 1. Den representerer all førstegangsreinvestering (første ekko). Den neste skrålinje har helningen 1 på 2, den representerer all annengangs reinvestering (annet ekko). Den derefter har helningen 1 på 3 osv. Vi skal inndele reinvesteringselementene i grupper efter den skrålinje de tilhører. Reinvesteringen langs første skrålinje kaller vi første komponent (første partialkurve), den langs annen skrålinje kaller vi annen komponent (annen partialkurve) osv. Hver av disse komponenter kan åpenbart opfattes som en tidsrekke. Resultatet av denne ordning blir som antydnet i tabell 1.

Tabell. 1.

Komponenter	Reinvestering på tidspunktet t.																			
	t=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1. komponent	2	5	10	6	3															
2. "		2		5		10		6		3										
3. "			2			5			10		6				3					
	o. s. v.																			

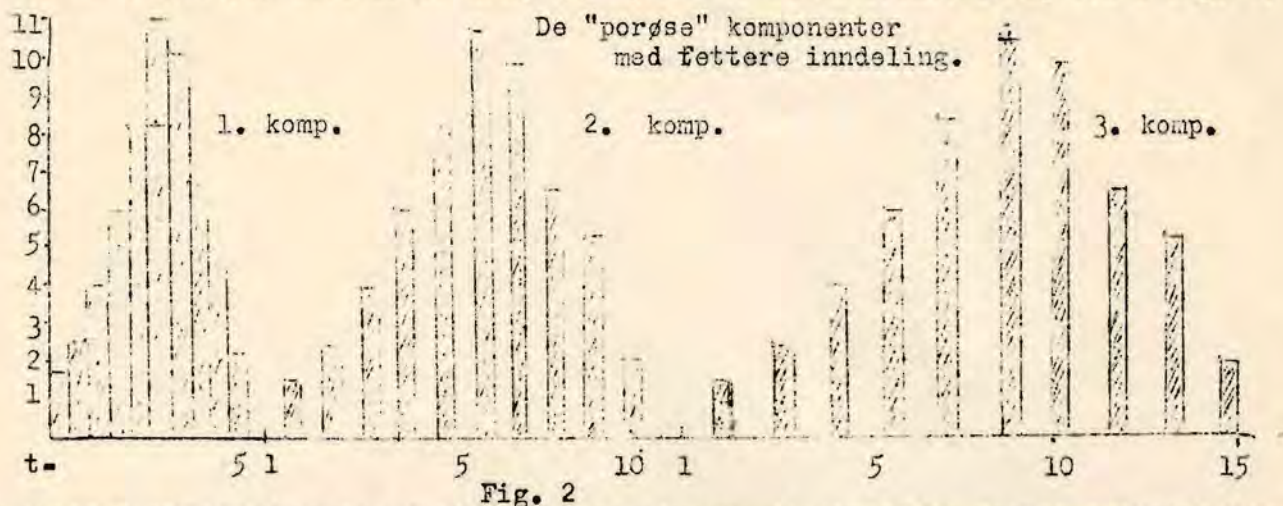
Denne opdeling i komponenter er uttømmende og entydig; d. v. s. når vi har ordnet tallene i komponenter som i tabell 1 her, så vil vi ha fått med samtlige av tallene i tabell 8522.1 og hvert tall bare en gang. I fig. 1 er de tre første komponenter fremstillet grafisk.



Av tabell 1 og fig. 1 fremgår det at første komponent har tall i hvert tidspunkt, annen komponent i hvert annet tidspunkt, tredje komponent i hvert tredje tidspunkt osv. Vi sier derfor at komponentene i tabell 1 og fig. 1 er "porøse". Det er dette som er grunnen til uregelmessighetene i den samlede reinvesteringsskurve. Om vi ser f. eks. på 3. komponent i fig. 1, så virker jo den

som en slags treårs-cykle, ti det er her tall bare på hvert tredje tidspunkt. Fjerde komponent vil gi inntrykk av en fireårs-cykle osv. Disse cykler skapt ved komponentenes "porøsitet" gjør den samlede reinvestering uregelmessig. Og da "porøsiteten" er større for de høiere komponenter må uregelmessigheten i den samlede reinvesteringsskurve øke eftersom vi kommer ut til de høiere ekkoer. Dette er forklaringen på den stigende uregelmessighet i fig. 8522.2.

Ved å gi varighetsfordelingen en finere inndeling, f. eks. regne med halvårsgrupper istedenfor årsgrupper, vil vi få en fremstilling som i fig. 2.



De høiere komponenter er altså fremdeles porøse, ja forholdet mellom søylebredden og det frie mellomrum ved en gitt komponent f. eks. 3. komponent er nåaktig det samme som tidligere. Men vekslingen mellom søile og fritt mellomrum skjer nu hyppigere. Hvis inndelingen blir meget fin, vil vi på denne måte få istand en virkning av ganske samme art som den der kommer istand når mange små "årsaker" utjevner hverandre ved de store talls lov. Når inndelingen er meget fin, vil derfor den fremkomne kurve for total-reinvesteringen bli jevnere. Det er nettop derfor at kurven i fig. 8522.2 viser et meget jevnere forløp enn tallene i tabell 8522.1.

Det er klart at i virkeligheten vil der finnes kapitalgjensstander med de mest forskjellige varigheter. Varighetsfordelingen er praktisk helt kontinuerlig. For å få et realistisk bilde av det som foregår, bør vi derfor ikke hefte oss synderlig ved den omstendighet at i våre talleksempel de enkelte komponenter er "porøse" (og at derfor en viss uregelmessighet gjør sig gjeldende i den totale reinvesteringsskurve), men heller se på hvorledes det skraverte areal i gjennomsnitt er fordelt utover tidsaksen. M. a. o. det som interesserer oss er å kjenne, for hver enkelt komponent, den gjennomsnittlige reinvesteringsaktivitet pr. år regnet. Vi tenker oss altså at den samlede aktivitet langs en gitt komponent blir spredt utover tidsskalaen slik at aktiviteten kommer til å foregå kontinuerlig.

Rent geometrisk kan vi tenke oss dette gjort på følgende måte: For komponent nr. 2 i fig. 1 blir hver søile å spre utover en basis lik 2 istedetforen basis lik 1. Og midtpunktet av søilens basis må bli liggende stille for at disse elementer av reinvestering i gjennomsnitt skal bli knyttet til samme tidspunkt som før. Den første søile i 2. komponent må altså, istedetfor en basis som dekker det 2. år, få en basis som dekker siste halvdel av første år, hele annet år og første halvdel av tredje år. Annen søile vil, istedetfor en basis som dekker 4. år, få en basis som dekker siste halvdel av tredje år, hele fjerde år og første halvdel av femte år osv. Siden alle søiler i 2. komponent på denne måte får sin basis fordoblet, må deres høide nedsettes til halvparten. Hvis f. eks. en aktivitet som har foregått gjennom det annet år skal spres også over siste halvdel av første og første halvdel av tredje år, må intensiteten selvfølgelig nedsettes til halvparten for at den samlede aktivitet skal bli uforandret. 2. komponent antar da den form der er gjengitt i fig. 3. Ved 3. komponent vil alle søilene få sin basis tredoblet og følgelig sin høide nedsatt til tredjeparten osv. Se fig. 3.

Vi skal føre utjevningen ennu et skritt videre. Høiden på søilene ved de forskjellige komponenter i fig. 3 angir den gjennomsnittlige reinvesteringsaktivitet pr. tidsenhet. Det er klart at det er ingen grunn til å anta at den i praksis vil forløpe i trappetrin som antydnet på figuren. Trappetrinnene skriver sig bare fra den omstendighet at vi oprinnelig gikk ut fra et talleksempel med diskret varighetsfordeling. Det er mere realistisk å ta det siste skritt i utjevningen nemlig å forutsette at høidene på søilene forandrer sig efter en kontinuerlig kurve. Dette er gjort i fig. 4. De derved fremkomne komponenter kaller vi de kontinuerlige komponenter. Den samlede reinvestering som foranlediges ved en nyinvesteringsdase med varighetsfordeling som første komponent i fig. 4 vil altså være en kontinuerlig kurve som er summen av alle kurvene i fig. 4.

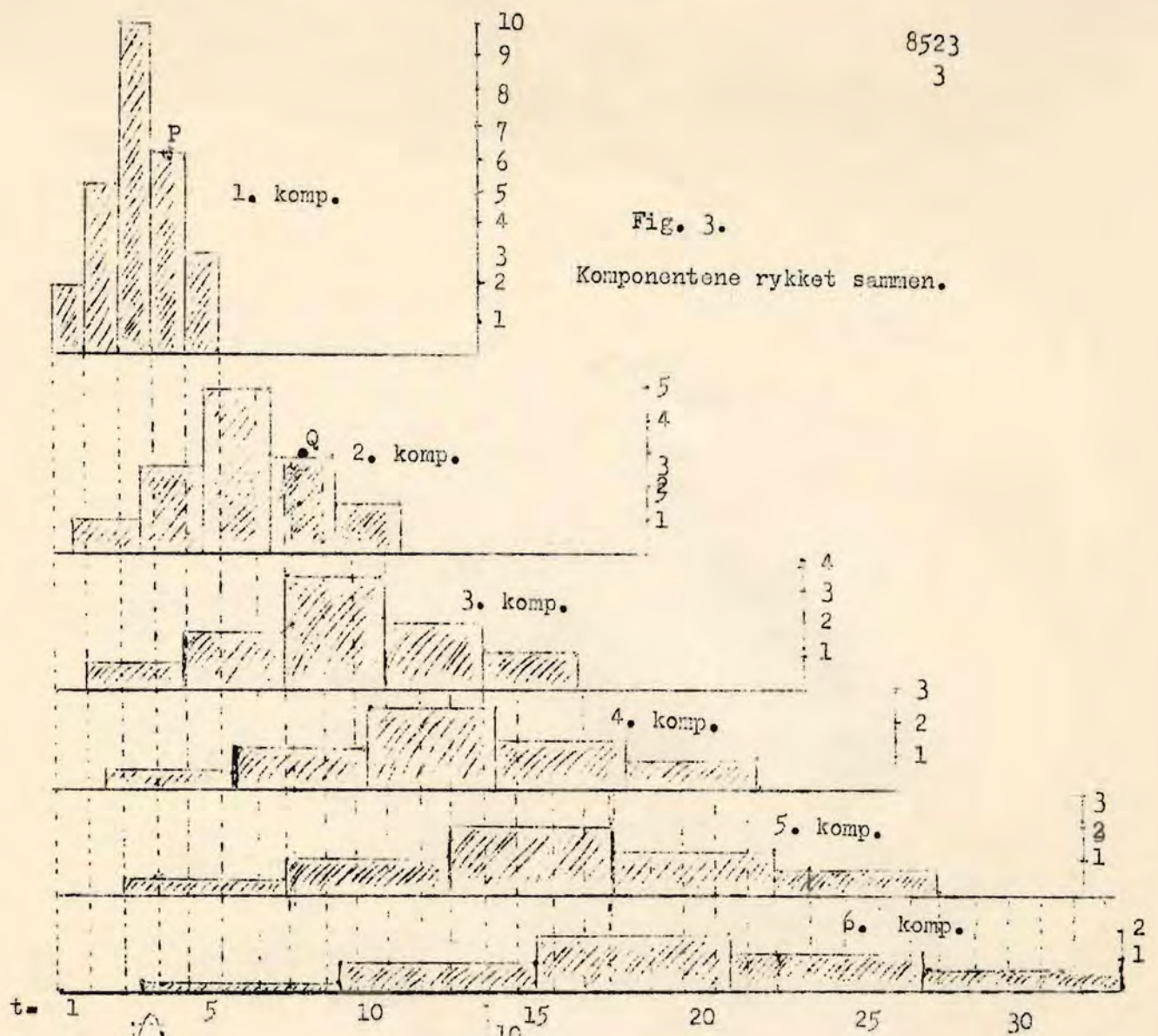


Fig. 3.
Komponentene rykket sammen.

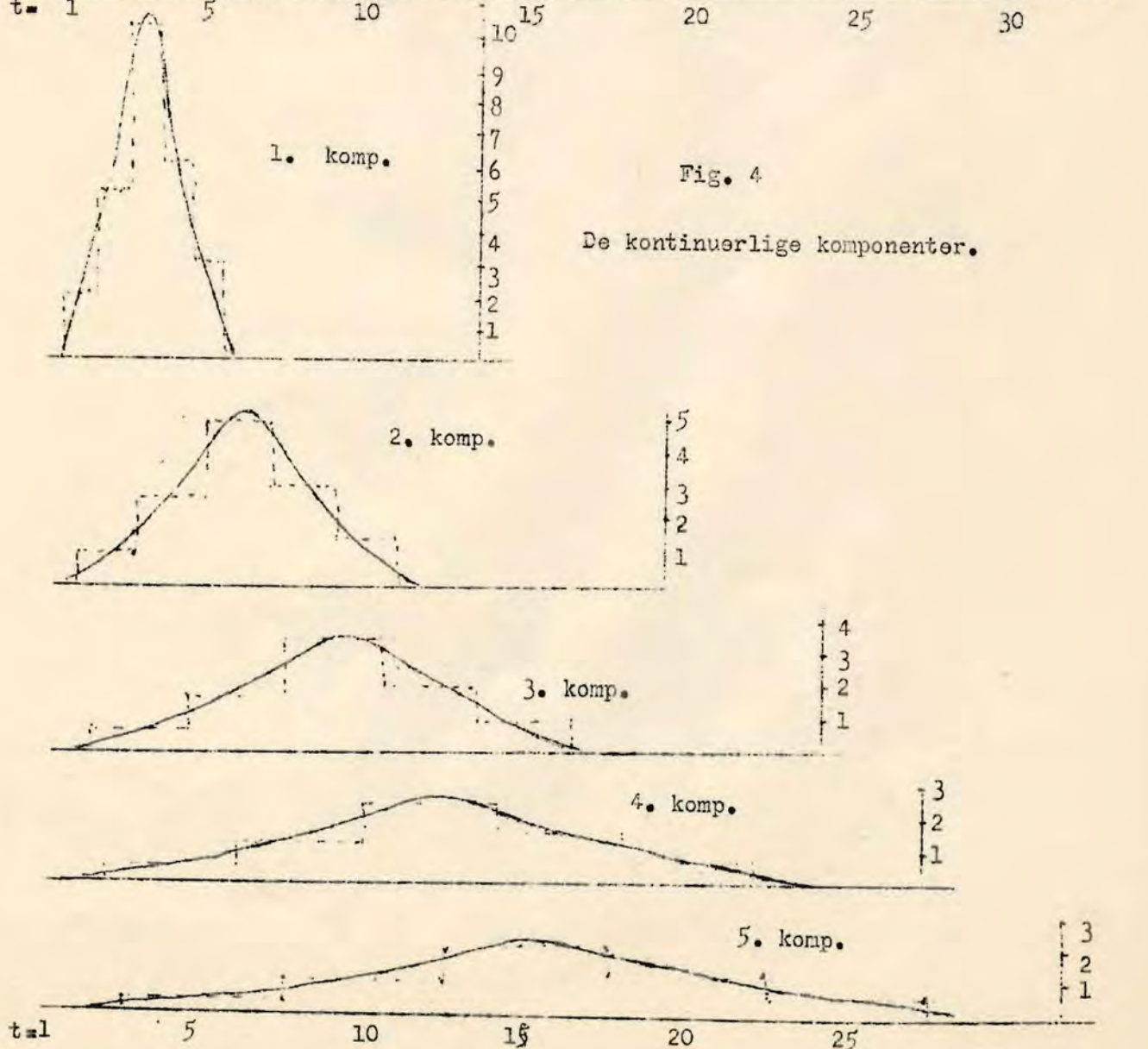


Fig. 4
De kontinuierlige komponenter.

8524. Det analytiske uttrykk for den k-te partialkurve og for den totale reinvesteringsskurve. Det gjennomsnittlige reinvesteringnivå som svarer til en gitt dose av nyinvestering.

Den inverse fordelingsfunksjon.

Av den måte hvorpå figurene 1 - 3 i 8523 blev dannet er det lett å se hvad det analytiske uttrykk for partialkurvene (komponentene) blir. La oss f. eks. se på punktet P på første komponent. P ligger midt i 4. år, altså på tidspunktet $t = 4$ (idet det tidspunkt da nyinvesteringen skjedde velges som nullpunkt for tiden). Det punkt Q på 2. komponent som svarer til P på første komponent ligger midt i det 8. år altså på tidspunktet $t = 8$. Dette tidspunkt er nøyaktig dobbelt så stort som det første. På den annen side er ordinaten for Q bare halvparten av ordinaten for P. Det var jo nemlig slik 2. komponent blev konstruert. Det samme gjelder om vi betrakter midtpunktet av en hvilken som helst søile. Hvis vi ikke betrakter midtpunktet av komponentens søiler, men f. eks. begynnelsespunktet blir der en liten uoverensstemmelse. Denne forsvinner imidlertid når vi gjør inndelingen finere og finere. For de kontinuerlige kurver i fig. 8523.4 kan vi derfor si at 2. komponent er fremkommet ved en transformasjon av 1. komponent, idet vi har tatt hvert punkt på 1. komponent og forøket abscissen til det dobbelte og samtidig nedsatt ordinaten til halvparten. Kort uttrykt: vi har trukket kurven ut til dobbelt lengde og presset den ned til halv høyde. La

$$(1) \quad y_1(t) = f(t)$$

være ligningen for 1. komponent. y_1 er altså ordinaten på tidspunktet t for 1. komponent, og $f(t)$ er fordelingsfunksjonen for kapitalgjensstande med varighet t . Ligningen for 2. komponent vil da være

$$(2) \quad y_2(t) = 1/2 f(t/2)$$

hvor y_2 er ordinaten på 2. komponent i tidspunktet t . Ligning (2) uttrykker jo nemlig bare at hvis t er et gitt tidspunkt på annen komponent, så kan jeg finne den hertil svarende ordinat y_2 ved å gå til tidspunktet $t/2$ på første komponent, der avlese ordinaten $f(t/2)$ og så dividere denne ordinat med 2. På samme måte blir ligningen for 3. komponent $y_3(t) = 1/3 f(t/3)$ og generelt for den k-te komponent (den k-te partialkurve)

$$(3) \quad y_k(t) = 1/k f(t/k)$$

Siden den totale reinvestering er summen av partialkurvene så får vi herav følgende sats:

Hvis der på tidspunktet $t = 0$ skjer en nyinvestering hvis kapitalenheter har en varighetsfordeling gitt ved funksjonen $f(t)$, (således at der altså er $f(t) dt$ kapitalenheter med en varighet mellom $t - 1/2 dt$ og $t + 1/2 dt$) og hvis alle kapitalenheter alltid blir fornyet når de er utslitt, så vil denne foranledige en fremtidig reinvestering hvis tidskurve er gitt ved formelen

$$(4) \quad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k f(t/k)$$

De enkelte ledd i denne formel kalles partialkurver. Det k-te ledd representerer k-te gangs reinvestering (det k-te ekko).

Vi så i fig. 8522.2 at den samlede reinvesteringsskurve svinget omkring et visst normalnivå. Bortsett fra de tilfeldige avvikelser som skyldes "porøsiteten" i komponentene (og som ikke uttrykker noget reelt økonomisk fenomen), vil bevegelsen etterhvert nærme sig mot dette normalnivå. Størrelsen av dette normalnivå kan berègnes a priori bare vi kjenner varighetsfordelingen. Hvis vi har en diskret varighetsfordeling med hyppighetstallene $f_1, f_2 \dots f_n$, således at der er f_1 ett-årige kapitalenheter, f_2 toårige osv., så vil det omtalte normalnivå være

$$(5) \quad \bar{y} = f_1/1 + f_2/2 + \dots + f_n/n$$

De ettårige kapitalgjensstander må nemlig fornyes hvert år, hvert år må der altså produseres f_1 enheter av dem. De toårige må fornyes hvert annet år, det gir gjennomsnittlig $f_2/2$ pr. år osv. Den totale reinvestering regnet gjennomsnittlig pr. år blir altså (5). I eksemplet i tabell 8522.2 har vi $y = 1/2 + 2/3 + \dots + 2/48 + 1/49 = 172$, hvilket er ordinaten for den prikkede linje i fig. 8522.2. Hvis fordelingsfunksjonen for varighet er kontinuerlig, blir tilsvarende

$$(6) \quad \bar{y} = \int_{s=0}^{s=\infty} f(s)/s ds$$

Både (4) og (6) viser at reinvesteringsforløpet (under forutsetning av at all ny-investering stadig blir fornyet i fremtiden uten noget forfall) i høi grad avhenger av forløpet av fordelingsfunksjonen for de små varighetsklasser. Man kan si at de kortvarige kapitalgjenstander kommer igjen så hyppig at de får en dominerende innflydelse på hele det fremtidige forløp. Av (4) ser vi f. eks. at hvis $f(s)$ nærmer sig en fast grense $f(0)$ større enn 0 når s går mot 0, så vil reinvesteringen bli uendelig. For store k vil nemlig (under fastholden av t) $f(t/k)$ gå mot $f(0)$ større enn 0. Vi kan da sette tilnærmelsesvis

$$(7) \quad y(t) = f(0) \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$$

men dette uttrykk er ikke konvergent.

Av formel (4) sees at undertiden er det naturlig å fortolke t som en varighet, undertiden som et tidspunkt. Når t optrer som den uavhengige variable i $f(t)$ betyr t varighet. Men tidskurven $y_1(t)$ for første komponent er som vi har sett simpelt hen lik $y_1(t) = f(t)$ hvor nu t betegner tidspunkt.

Den totale reinvestering $y(t)$ på et gitt tidspunkt t kan også uttrykkes ved hjelp av den inverse fordelingsfunksjon.

Den inverse fordelingsfunksjon er definert slik: Vi går ut fra den opprinnelige fordelingsfunksjon $f(t)$. (For eksempel $f(t)$ gitt ved den kontinuerlige kurve i fig 8522.2. Så danner man for hvert enkelt punkt ~~det rektangel hvis grunnlinje~~ det rektangel hvis grunnlinje er punktets abscisse og hvis høide er punktets ordinat. Arealet av dette rektangel er lik $t f(t)$. Rektangelarealet varierer altså som en funksjon av t . Istedetfor å studere hvorledes rektanglet varierer med t kan vi naturligvis like godt studere hvorledes det varierer med $1/t$. Det betyr bare at vi betrakter $1/t$ som den nye uavhengige variable istedetfor t . Den funksjon som uttrykker hvorledes arealet avhenger av $1/t$ er nettopp det vi kaller den inverse fordelingsfunksjon. Vi betegner denne funksjon $g(s)$ hvor g er rektanglets areal og s den ting hvorav arealet avhenger. Funksjonen $g(s)$ blir altså definert ved relasjonen

$$(8) \quad g(1/t) = t f(t)$$

La oss ta et numerisk eksempel på relasjonen (8). La oss f. eks. opfatte tallene i tabell 8522.0 som opplysning om 5 punkter på en kontinuerlig fordelingsfunksjon $f(t)$. Ved (8) kan vi da beregne de korresponderende 5 punkter på den inverse fordelingsfunksjon $g(s)$. Dette er gjort i tabell 1.

Tabell 1.

Kapitalgjenstandenes varighet	Antall kapitalgjenstander (den opprinnelige fordelingsfunksjon $f(t)$)	Den inverse fordelingsfunksjon $g(s)$	Den ting hvorav den inverse fordelingsfunksjon avhenger.
1	2	1.2 = 2	1/1 = 1
2	5	2.5 = 10	1/2 = 0,5
3	10	3.10 = 30	1/3 = 0,333
4	6	4.6 = 24	1/4 = 0,25
5	3	5.3 = 15	1/5 = 0,2

De to siste kolonner i tabell 1 definerer funksjonen $g(s)$. F. eks. når $s = 0,2$ så er $g(s) = 15$, når $s = 0,25$ så er $g(s) = 24$ osv. Formen på den fremkomne kurve blir som den tykt optrykte linje i fig. 1. De fem markerte punkter er de som fremgår av tabell 1.

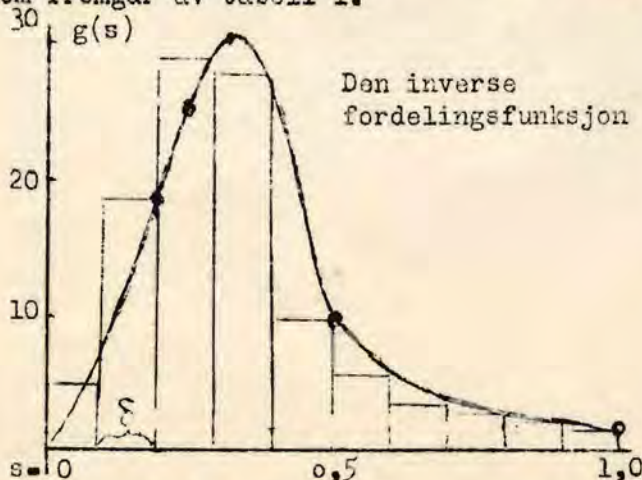


Fig. 1.

På samme måte kunde man konstruere den inverse fordelingsfunksjon ved talleksempel i tabell 8522.2. Så sant $f(t)$ har en unimodal form som i de to betraktede eksempler slik at $f(t)$ forsvinner meget raskt i begge ender, vil $g(s)$ få en lignende unimodal form.

Sammenhengen mellom funksjonene f og g kan skrives

$$(9) \quad f(t) = 1/t g(1/t)$$

Det følger simpelt hen ved å dividere med t i (8). På den annen side, ved å sette $1/t = s$ i (9) får vi

$$(10) \quad g(s) = 1/s f(1/s)$$

Sammenlignes (9) og (10) så ser vi at den måte hvorpå vi kan beregne funksjonen g ut fra kjennskapet til f er nøkiaktig den samme som den måte hvorpå vi kan beregne f ut fra kjennskapet til g . Dette er en bemerkelsesverdig egenskap ved sammenhengen mellom funksjonen f og g . Vi kaller det inversjonsegenskapen. Dette er en egenskap av lignende art som den der karakteriserer sammenhengen mellom almindelige inverse tall. F. eks: Det inverse tall til 5 er 0,2. Og tar vi igjen det inverse av dette nye tall 0,2 så kommer vi tilbake til det oprinnelige tall 5. Iflg. (9) og (10) gjelder det samme om overgangen mellom funksjonene f og g .

Den inverse fordelingsfunksjon er altså like karakteristisk for kapitalgjensstandenes varighetsfordeling som den oprinnelige fordelingsfunksjon, den kan direkte utledes av den oprinnelige funksjon, og for mange formål er den bedre å bruke.

Den samlede reinvestering $y(t)$ på et gitt tidspunkt kan f. eks. uttrykkes ved den inverse fordelingsfunksjon på en meget simpel måte. Det skjer slik: Når tidspunktet t er gitt vil de punkter på varighetsskalaen som inngår i formelen (4) være punktene $t/1, t/2, t/3 \dots$ på abscissen for den inverse fordelingsfunksjon. Den konstante interdistansen δ mellom disse punkter er simpelthen

$$(11) \quad \delta = 1/t$$

Uttrykket (4) for $y(t)$ blir altså simpelt hen en sum av en rekke ordinater på den inverse fordelingskurve. Det eksakte uttrykk for summen bestemmes lett, idet vi først husker at (4) kan skrives

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k f(t/k) = 1/t \sum_{k=1}^{\infty} t/k f(t/k)$$

men ifølge (10) er

$$t/k f(t/k) = g(k/t) = g(k\delta) \quad \text{altså}$$

$$(12) \quad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k\delta) \cdot \delta = [g(\delta) + g(2\delta) + \dots] \cdot \delta$$

hvor interdistansen δ er den inverse verdi av t .

Summen (12) kan illustreres grafisk som summen av alle de rektangler hvis bredde er lik den konstante interdistansen δ og hvis høyde er de suksessive ordinater på den inverse fordelingskurve. F. eks. hvis vi har en dose av nyinvestering der har en kontinuerlig varighetsfordeling angitt ved kurven i fig. 1, så vil den samlede reinvestering på tidspunktet $t=10$ bli summen av alle de skrevne rektangler i fig. 1. Bredden av disse rektangler er konstant lik $\delta = 1/t = 0,1$.

Men det er ikke alt. Hvert enkelt av rektanglene i fig. 1 har sin særskilte betydning. Det første rektangel fra venstre representerer alt det som på tidspunktet t reinvesteres for første gang (første komponent), det annet rektangel det som på tidspunktet t reinvesteres for annen gang (annen komponent) osv.

For den praktiske anvendelse av teorien, særlig med hensyn til mulige forsøk på statistiske verifikasjoner, er den ordning av reinvesteringselementene som vi nu har nådd frem til, særlig bekvem. Vi har nu så å si ordnet investeringselementene i grupper etter deres praktiske viktighet, og dessuten knyttet hver elementgruppe til formen på en viss del av fordelingskurven. Det er klart at for praktiske formål er dette fordelaktig. I praksis vil første gangs reinvesteringen bli det viktigste, derefter annengangs reinvesteringen osv. Jo lenger vi kommer ut i reinvesteringenes nummerorden, desto mindre plausibel blir nemlig den teoretiske forutsetning vi har gjort om at reinvesteringen opprettholdes fra gang til gang helt uavkortet. Det er derfor av betydning å ha et simpelt middel til å kunne studere særskilt de forskjellige grupper.

Formel (12) og den grafiske fremstilling i fig. 1 kaster også lys over den måte hvorpå reinvesteringen nærmer sig mot sitt normalnivå \bar{y} eftersom tiden går. Hvad vil det nemlig si at t stiger? jo, at interdistansen δ i fig. 1 blir mindre og mindre. Vi får altså flere og smalere rektangler. Etersom denne prosess skrider frem, er det klart at summen av rektanglene simpelt hen blir lik det samlede areal under kurven $g(s)$. På grunn av inversjonssammenhengen mellom funksjonen f og g er dette det samme som det ved (6) definerte gjennomsnitt. Etersom tiden går, nærmer altså reinvesteringen sig til å bli lik normalnivået

$$(13) \quad \bar{y} = \int_{t=0}^{\infty} 1/t f(t) dt = \int_{s=0}^{\infty} g(s) ds.$$

På ethvert tidspunkt t er reinvesteringens avvikelse fra normalnivået, altså differensen $y(t) - \bar{y}$, simpelt hen lik forskjellen mellom rektangelsummen i fig. 1 (når interdistansen settes lik $1/t$), og hele arealet under kurven.

8525. Printallsutslagene ved de "porøse" komponenter. Faren ved å bruke diskrete talleksempler til å illustrere økonomiske lovmessigheter.

De tilfeldige utslag som vi iakttok i den totale reinvesteringsskurve i det numeriske eksempel i tabell 8522.3 har en sammenheng med fordelingen av primtallene og med antallet av tall som går op i et gitt tall. Dette gir en ny belysning av det forhold som allerede tidligere er nevnt nemlig at disse utslagene ikke har nogen reell økonomisk forklaring. Sammenlign f. eks. reinvesteringen på tidspunktene $t = 18, 19$ og 20 . Tallet for $t = 19$ ligger betydelig lavere enn de to nabo-tall, det har ikke fulgt med i den sterke stigning som foregår over dette område. Forklaringen er at 19 er et primtall mens det er 5 tall som går op i 18 , nemlig $2, 3, 6, 9, 18$, og 5 tall som går op i 20 , nemlig $2, 4, 5, 10, 20$. Reinvesteringen på tidspunktet $t = 19$ slik som talleksemplet er valgt - omfatter altså bare 19 -årige kapitalgjenstande, mens reinvesteringen på tidspunktet 20 omfatter både $2, 4, 5, 10$ og 20 -årige gjenstander. Lenger ute i tabellen (8522.3) blir dette forhold enn mer utpreget. Sammenlign f. eks reinvesteringen på tidspunktene $59, 60$ og 61 (59 og 61 er primtall).

Slike fiktive cykliske bevegelser viser hvor farlig det kan være å bruke talleksempler som bevismateriale i økonomiske undersøkelser.

Rettelse:

Side 8514.1, 6. linje nedenfra står A lik 0,3, skal være A lik 1,3.

8526. Oprettholdelsesprocenten. Den korrigerte reinvestering.

I det foregående har forutsetningene vært at alle elementer av nyinvestering blir oprettholdt ved reinvestering på forfallsdagen. Vi har ikke "mistet nogen maskiner på veien". Dette er naturligvis til en viss grad urealistisk. I virkeligheten vil det alltid være en del kapitalgjenstander som ikke blir fornyet. (Fabrikken går konkurs og nedlegges, maskinene selges som skrapjern på grunn av overgangen til en helt ny fremstillingsmåte osv.) Følgen av dette er at på reinvesteringstidspunktet er det bare en viss prosent av den oprinnelige kapital som fornyes. Vi får å regne med visse sannsynligheter for reinvestering av en gitt dose av nyinvestering. La oss anta at der er en sannsynlighet P_1 for en første gangs reinvestering (jfr. første skrålinje i tabell 8522.1), en viss sannsynlighet P_2 for at kapitalen ennogså skal bli reinvestert for annen gang osv. Rekken P_1, P_2, P_3 osv. vil danne en rekke av tall som er ikke tiltagende. (Se fig. 1). Sannsynligheten for at en kapitalgjenstand f. eks. skal reinvesteres 3 ganger må jo nemlig være mindre eller i høiden lik sannsynligheten for at den skal bli reinvestert 2 ganger osv. P kalles oprettholdelsesprocenten.

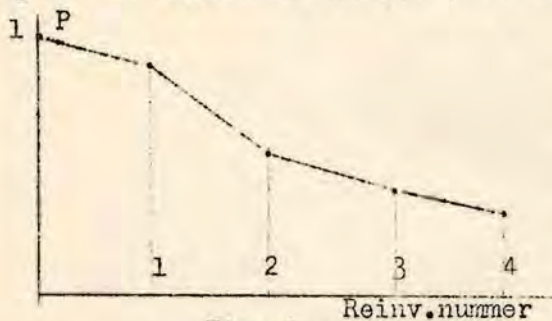


Fig. 1.

Det er lett å se hvilke modifikasjoner en slik synkende oprettholdelsesprocent medfører for reinvesteringens forløp. Tenker vi oss den totale reinvestering sammensatt av komponenter som antydnet i 8523.3, så vil vi nu få å regne med en reduisert størrelse av hver av disse komponenter. Reduksjonsfaktorene er nettop tallene P_1, P_2 osv. Når alle reinvesteringer blev oprettholdt uforminset, var den k -te komponent $y_k(t)$. Isteden får vi nu å regne med den reduserte k -te komponent, nemlig

$$(1) \quad y_k(t) = P_k \cdot y_k(t)$$

Den totale reduserte reinvestering blir følgelig

$$(2) \quad y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots = P_1 \cdot y_1(t) + P_2 \cdot y_2(t) + \dots$$

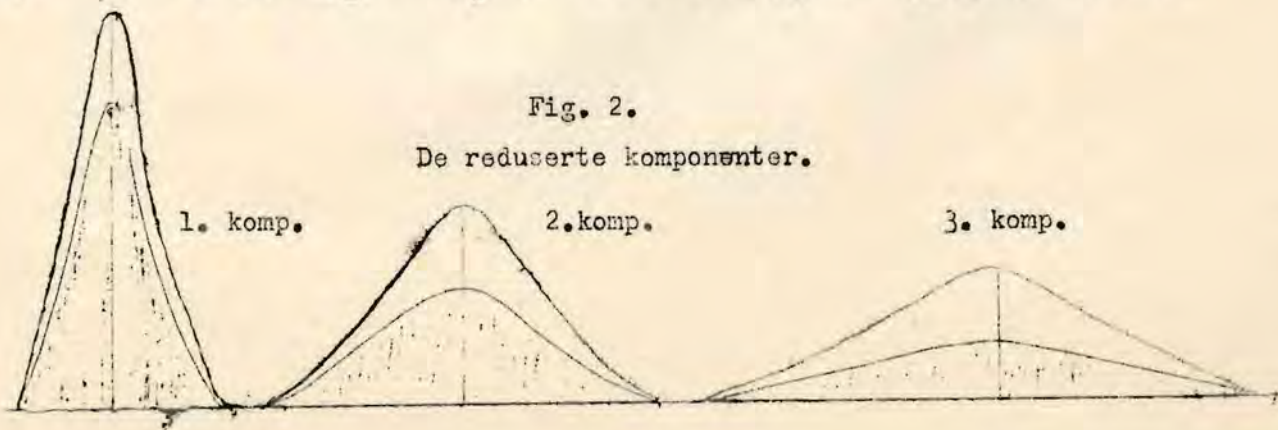
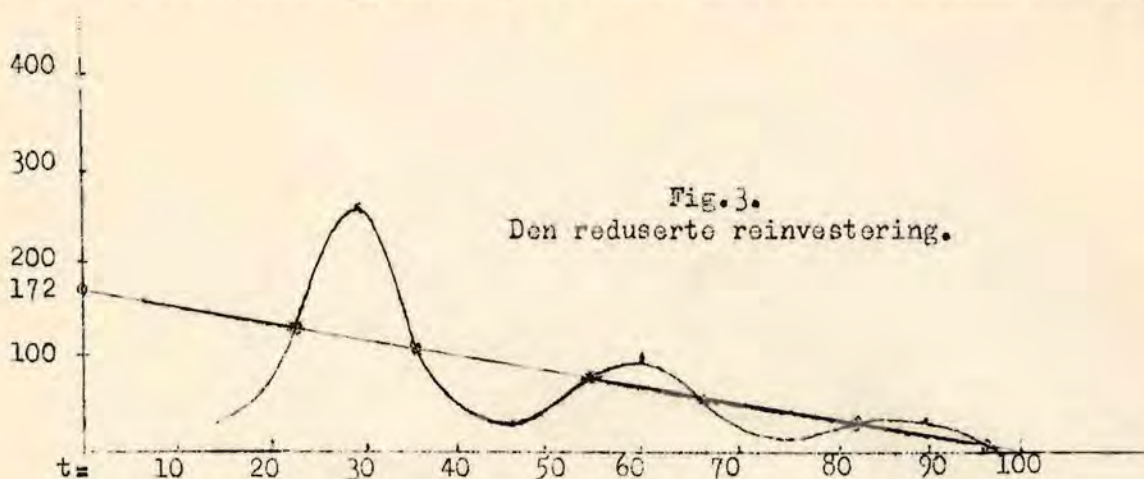


Fig. 2.

De reduserte komponenter.

Denne reduksjon av komponentene er grafisk fremstillet i fig. 2. (De prikkede kurver antyder de reduserte komponenter).

I 8522.4 har vi vist at den totale reinvesteringsskurve vil forløpe som en dempet cykle. Tar vi hensyn til oprettholdelsesprocentens synkning, vil bevegelsen bli ennu sterkere dempet, og dessuten får vi en nedadgående trend. (Se fig. 3. Dette er samme figur som 8522.2 (forminsket målestokk), men ordinatene er redusert med oprettholdelsesprocenten, idet denne er forutsatt å synke med 1% pr. år.)



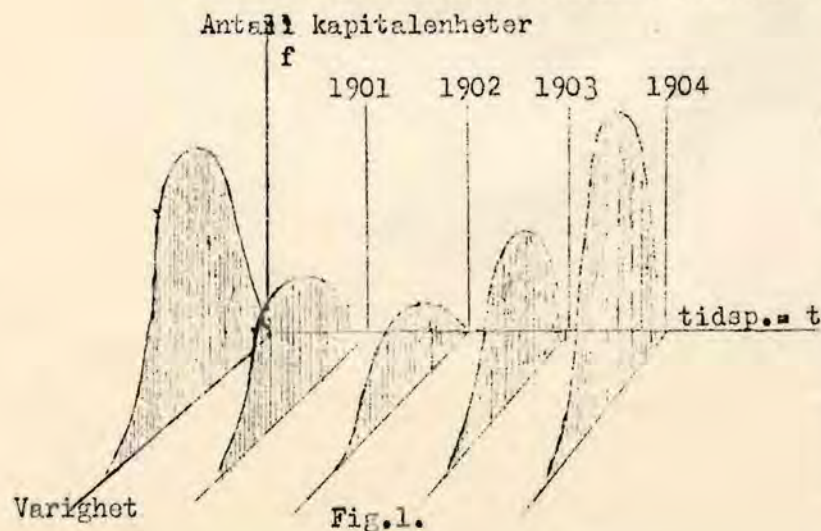
Den reinvestering som følger av en enkelt nyinvesteringsdose vil altså på denne måten tilslutt dø helt ut. Det er klart at en slik analyse hvor vi etter hvert gjør oss ferdig med de virkninger som skyldes nyinvesteringer der ligger langt tilbake i tiden, er mere realistisk. For i praksis å dømme om reinvesteringssforløpet i den nærmeste fremtid, la oss si op til år 1950, har det selvfølgelig liten interesse å studere nyinvesteringene som fant sted på Karl den Stores tid.

Ofta vil det selvfølgelig i praksis være slik at samtidig med at reinvesteringen av en oprinnelig nyinvesteringsdose dør ut, kommer der nye doser av nyinvestering til. Det reiser sig da et rent definisjonsmessig problem om hvad som skal regnes for nyinvestering og hvad for reinvestering. I det enkelte konkrete tilfelle vil det som regel ikke være vanskelig å avgjøre om en kapitaldose representerer nyinvestering eller reinvestering. Når en fabrikk f. eks. utrangere 3 maskiner og kjøper en ny til erstatning for disse, er dette utvilsomt en reinvestering selv om den nye er en mere moderne maskin. I alle tilfelle hvor den tekniske kapasitet av de nye og de gamle kapitalgjenstander er direkte sammenlignbar, er det nokså lett å avgjøre spørsmålet. Da kan vi si at der skjer en reinvestering såsant ved utskiftningen av maskiner og andre kapitalgjenstander, kapasiteten holdes uforandret. Og er kapasiteten av det nye materiell større, kan vi kalle det overskytende for nyinvestering.

Hvis der skjer en overgang til en ny produksjonsmåte med definitiv utrangering av gammelt materiell og anskaffelse av nye typer av maskiner avpasset efter den nye produksjonsmåte, så vil der ikke være noget teknisk begrep der tillater direkte sammenligning mellom kapasiteten før og efter forandringen. I dette tilfelle vil det være naturlig å si at der ikke har funnet sted nogen reinvestering, men at den gamle reinvestering er dødd ut, uten å bli oprettholdt, og at en ny dose av nyinvestering er kommet til.

Vi er hermed kommet inn på det spørsmål hvorledes reinvesteringen vil bli når der skjer suksessive nyinvesteringer.

8527. Variierende nyinvestering. Nyinvesteringeintensiteten som funksjon både av tidspunktet og varigheten. Korrespondansediagrammet mellom nyinvestering og reinvestering.



La oss anta at der hvert år tilkommer en viss dose kapital som representerer nyinvestering, og hver av disse doser har en viss varighetsfordeling. For enkelhets skyld antar vi at de forskjellige varighetsfordelinger er likodannede. Vi kan da fremstille de suksessive nyinvesteringer i et tredimensjonalt diagram. Hvis hver nyinvesteringsdose tenkes knyttet til begynnelsen av hvert år, får vi en frem-

stilling som i fig. 1 hvor hver av de skraverte plan tenkes å representere en dose av nyinvestering: En stor dose i 1900, en litt mindre i 1901, ennu mindre i 1902, derefter litt større i 1903 osv. Men reinvesteringsevne er naturligvis ikke på denne måte knyttet til enkelte tidspunkter. Nyinvesteringen i løpet av 1900 er fordelt utover året. Og nyinvesteringen i 1901 er fordelt utover dette

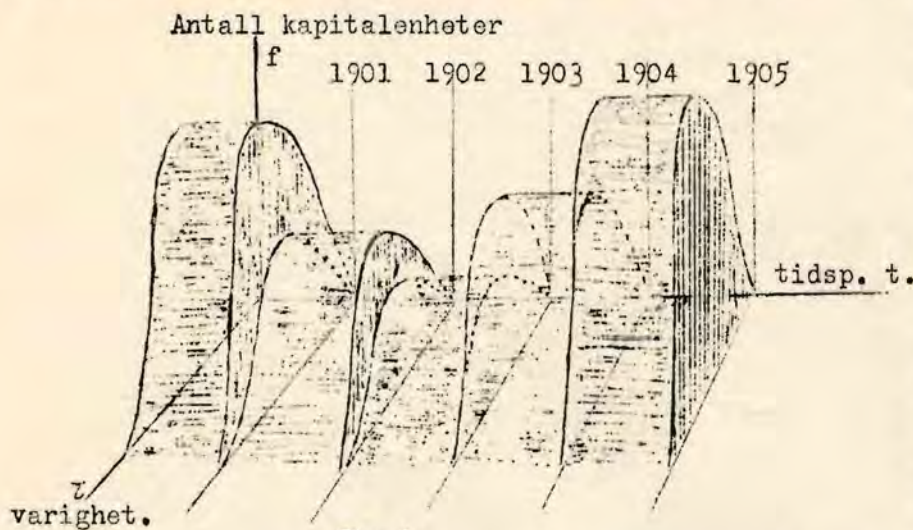


Fig. 2.

I fig. 2 har vi fremstillet nyinvesteringen som den vilde arte sig hvis den var like stor gjennom hvert enkelt år og kun forandret sig ved overgangen fra det ene år til det annet. Det er ingen grunn til å anta en slik diskontinuerlig forandring. Når bevegelsen i sine grove trekk er som angitt i fig. 2, er det naturligere å anta at nyinvesteringen var mindre i slutten av 1900 enn i begynnelsen av 1900. Hvis vi betraktet nyinvesteringen f. eks. kvartalsvis, så måtte treklossen for 1900 skjæres op i fire smale treklosser istedenfor den ene brede. Og

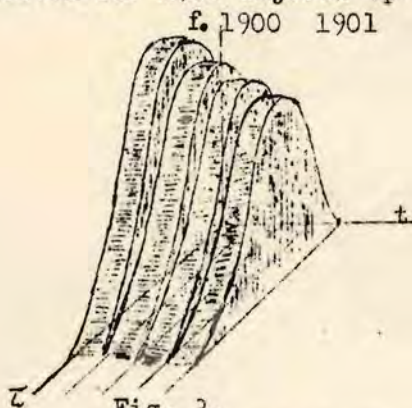


Fig. 3.

høidene på klossene måtte gjøres avtagende som i fig. 3. De fire klosser i fig. 3 skal altså tenkes å erstatte den ene klossen lengst tilvenstre i fig. 2. Det er imidlertid heller ikke nogen grunn til å anta at nyinvesteringen er trappetransformert for hvert kvartal. Det er mere naturlig å foreta en ennu finere inndeling, f. eks. månedlig, ukentlig eller kanskje daglig, slik at overgangene praktisk talt blir kontinuerlige. Istedenfor trappetransformasjonen i fig. 2, vilde vi da få en kontinuerlig flate som i fig. 4.

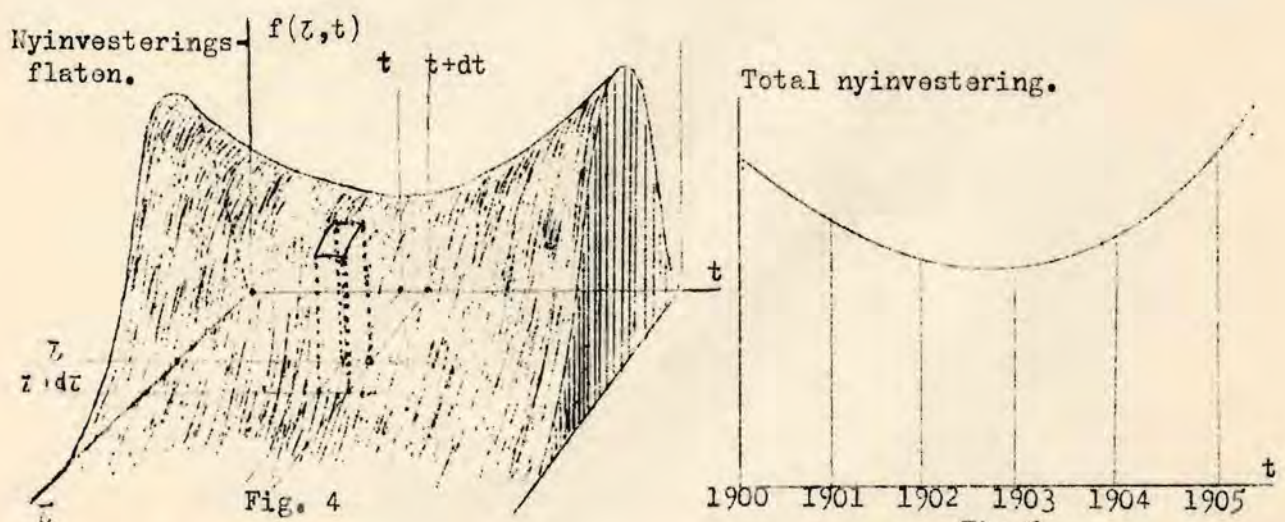


Fig. 4

1900 1901 1902 1903 1904 1905

Fig. 5.

i fig. 5 svarer til bøiningen i det "sadelformede" legeme i fig. 4, idet vi har forutsatt at formen på varighetsfordelingen er den samme på ethvert tidspunkt.

Ordinaten i fig. 4 er å opfatte som en intensitet regnet pr. tidsenhet og pr. varighetsenhet. For å klargjøre hvad der ligger i det, skal vi først ta et eksempel som illustrerer intensitetsbegrepet i en variabel.

La oss anta at vi har opgaver over alkoholforbruket pr. innbygger i

i Norge pr. år regnet. (Se fig. 6). Høiden av de skraverte søiler representerer da en intensitet pr. år, og arealet av et av av et av rektanglene representerer den totale konsumsjon i løpet av et år. For å bostemme intensiteten av et fenomen pr. år er det ikke nødvendig å iakttta fenomenet gjennom et helt år. La oss anta at vi har kvartalsvise oppgaver over alkoholforbruket. Dette er f. eks. for første kvartal 1900 = 0,90 liter. Hvis forbruket blev fortsatt i samme tempo hele året, vilde dette altså resultere i et forbruk på 3,60 liter pr. år. Sett at forbruket for annet kvartal 1900 er 0,85 liter. Hvis befolkningen fortsatte et helt år i dette forbruk av 3,40 liter osv. På denne

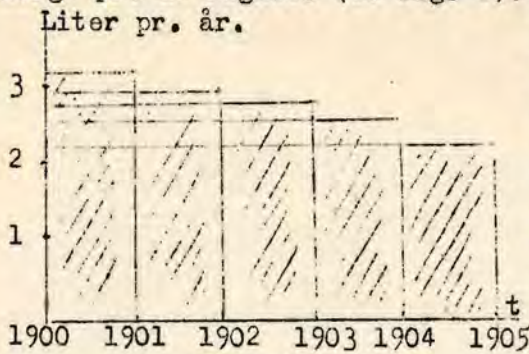


Fig. 6.

ningen fortsatte et helt år i dette forbruk av 3,40 liter osv. På denne

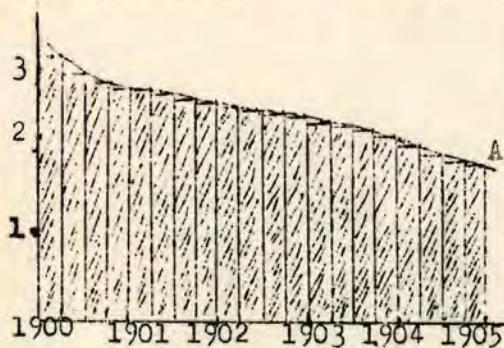


Fig. 7

smalere og følgelig arealet så meget mindre.

Teoretisk sett kunde vi gjøre sprangene langs t-aksen stadig mindre slik at vi tilslutt fikk en kontinuerlig inndeling. Hertil vilde svare en kontinuerlig intensitetskurve (A i fig. 7). Denne kurve illustrerer forbrukstempoet. Dette tempo er uttrykt pr. år (nemlig som det totale forbruk der vilde komme istand hvis vedk. tempo blev oprettholdt uforandret et år), men det er tenkt observert ved at vi har data for et uendelig lite tidsrum. Intensiteten er altså uavhengig av det tidsrum man bruker til observasjonene, men avhengig av det tidsrum pr. hvilket den måles. Intensiteten pr. måned vil altså være representert ved en lavere ordinat enn forbruket pr. år regnet.

Hvis intensiteten pr. år regnet og observert på tidspunktet t er $f(t)$, så kan jeg finne det absolutte forbruk i tidsrummet mellom t og $t+dt$, (dette forbruk er selvfølgelig en meget liten størrelse når lengden av tidsrummet, altså dt , er meget liten), ved å danne produktet $f(t).dt$, idet det da praktisk talt ikke er nogen forskjell på ordinatene for punktet t og $t+dt$, slik at arealet kan betraktes som et rektangel med grunnlinje = dt og høide = $f(t)$.

Nøiaktig samme resonnerement som det vi her har gjennomført, lar sig anvende på fig 4 foran. Det er bare den forskjell at vi der måler intensiteten pr. to ting istedenfor pr. en ting. Vi betrakter der nemlig nyinvesterings-intensiteten pr. tidsenhet og pr. varighetsenhet. Vi betrakter et lite flateelement liggende mellom t og $t+dt$ og mellom τ og $\tau+d\tau$. Dette representerer altså kapital som nyinvesteres mellom tidspunktene t og $t+dt$ og hvis varighet ligger mellom τ og $\tau+d\tau$. Hvor meget kapital vilde dette bli pr. år? Dette illustreres ved volumet av søilen på det betrakte flateelement, idet søilens høide representerer intensiteten. Hvis $f(\tau, t)$ er søilens høide i punktet (τ, t) , blir $f(\tau, t).dt.d\tau$ den samlede mengde kapitalgjenstander som her betraktes. Betrakter vi et mindre flateelement, f. eks. ved å gjøre dt mindre, så får vi en tynnere søile. Dette illustrerer bare at der lages færre maskiner på 3 dager enn på 4 dager forutsatt at arbeidstempoet (=søilens høide) er det samme. Produktet av søilens høide og det betrakte flateelement blir altså den totale mengde nyinvestert kapital som produseres mellom t og $t+dt$, og som har en varighet mellom τ og $\tau+d\tau$.

Vi vil nu betrakte den reinvestering som følger av en slik søile av nyinvestering.

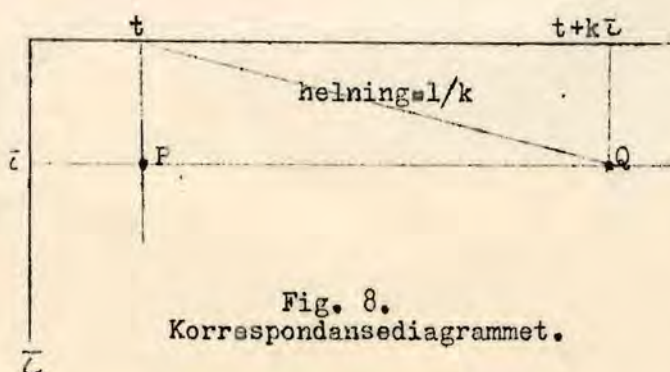


Fig. 8.

Korrespondansediagrammet.

La oss først tenke på et enkelt kapitalelement (en enkelt maskin) som nyinvesteres nøiaktig på tidspunktet t , og som har en varighet nøiaktig lik τ . Vi vil undersøke når dette element blir reinvestert for k -te gang. (Vi forutsetter her at elementet virkelig blir reinvestert på forfallsdagen). Vi vil se på forholdet grafisk. La P være punktet (τ, t) som antydnet i fig. 8. Vi finner da

k-te gangers reinvestering ved å trekke en linje fra t med helning $= \frac{1}{k}$ (jfr. tabell 8522.1), og bestemme skjæringspunktet mellom denne linje og horisontal-linjen τ .

La oss derefter betrakte en gruppe av nyinvestering som kommer til mellom t_1 og t_2 og hvis varighet ligger mellom τ_1 og τ_2 . (Se fig. 9). Vi vil bestemme hvorledes den k-te gangers reinvestering forløper for dette element.

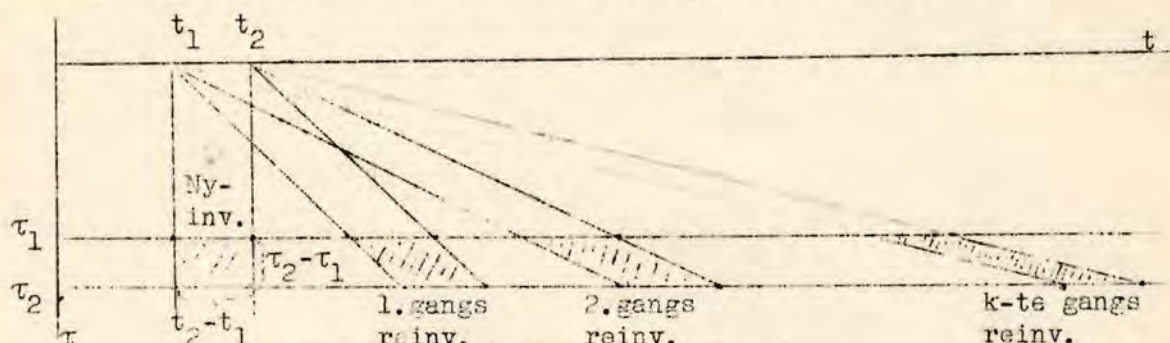


Fig 9. Korrespondansediagrammet.

Vi ser på de skraverte flater i fig. 9. Disse flater representerer kun hvorledes kjennetegnene τ og t overføres fra nyinvesteringen til reinvesteringen. De uttrykker ikke hvor stort det samlede antall kapitalgjenstander er. Dette siste avhenger av nyinvesteringsflatens høyde over (τ, t) planet. Nyinvesteringsflatens høyde er ikke representert i fig. 9. (men i fig. 4).

Hjørnepunktene i rektanglet til venstre (nyinvesteringen) danner yttergrensene for fordelingen etter alder og varighet innenfor den betraktede gruppe. Følgelig må vi kunne finne den tilsvarende reinvesteringsgruppe ved å bestemme hvor det blir av hjørnepunktene ved de senere reinvesteringer. Behandlingen av hvert enkelt hjørnepunkt kan utføres som vist i fig. 8. På denne måten finner vi at første gangers reinvestering blir representert ved et parallelogram hvis sider har helningen 1, annen gangers reinvestering ved et parallelogram hvis sider har helningen $\frac{1}{2}$, og generelt k-te gangers reinvestering ved et parallelogram hvis sider har helningen $\frac{1}{k}$. Hjørnepunktet lengst til venstre i dette k-te parallelogram representerer altså "den første svale om våren" : det første element som melder sig for k-te gang. Punktet lengst til høyre er den siste forsinkede "svale" som kommer frem ut på "høstparten".

Når man i praksis vil forsøke å danne sig et bilde av reinvesteringens fremtidige forløp, får man bruk for slike betraktningmåter som de vi har antydnet foran. Som et eksempel kan nevnes at det store amerikanske telegraf- og telefonselskap A.T.T. ("American Telephone and Telegraph Company") har en egen statistisk og matematisk avdeling, hvor de forskjellige anleggs og apparaters slitningstid, reinvesteringsbehovet osv. analyseres på denne måte.

Lignende undersøkelser vil også bli av betydning når man vil undersøke et helt samfunns samlede realkapital og dets behov for reinvesteringer.

Rettelser.

Side 8524.2. st 10. linje ovenfra står "konvengent", skal være "konvergent").

Side 8526.1. Formel (1) og (2). Betegnelsen for den k-te reduserte komponent og den reduserte reinvestering skal være henholdsvis $y_k^*(t)$ og $y^*(t)$.

Tilføielser etter diskusjon.

Ad. 8505.2.

1. Hvis pendelen kommer igang ved at vannet slippes plutselig på, og hvis der ingen friksjon er i ophengningspunktet og vannet strømmer jevnt, vil svingningene stadig fortsette med samme styrke, på lignende måte som en almindelig pendel, der etter igangsettelse svinger omkring sitt "normal"-punkt uten friksjon. Ved "vann"-pendelen vil dog under de spesifiserte forutsetninger "normalen" ikke være i vertikalstillingen, men noget ut til høyre.

2. Hvis der er friksjon i ophengningspunktet, får vi en dempet bevegelse omkring det skjeve normal-nivå.

3. Er der visse ujevnheter i vannstrømmen, vil pendelen bli stående og svinge omkring den skjeve normalstilling. Dette vil i tilfelle bli et kumulatifenomen og altså ikke karakteristisk for auto-vedlikehold.

4. Men hvis pendelen forsynes med en ventil, (som antydnet i 8505.2), får vi et eksempel på en auto-vedlikeholdt bevegelse.

Ad. 8506.

Det at den makrodynamiske teori tar sikte på å forklare samfundsmaskineriet "i dets helhet" betyr selvfølgelig ikke at den tar sikte på å forklare alle detaljer. Dette er jo nettop orrådet for den mikrodynamiske analyse. Dessuten er betraktningen innskrenket til den økonomiske side ved fenomenene.

Ad. 8522.4.fig. 2.

Vi skal gi en nærmere forklaring av den nedtrykningseffekt som skapes ved bevegelig gjennemsnitt. La oss anta at vi har en jevn cyklisk kurve som i

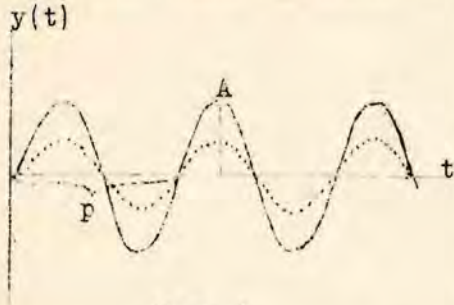


Fig. 1

fig. 1. (F. eks. en sinuskurve). Anvendes et bevegelig gjennemsnitt av lengde = p, blir det intet igjen av kurven. Vi får jo da nemlig overalt den algebraiske sum av leddene i gjennemsnittet = 0. Sett dernæst at vi anvender et bevegelig gjennemsnitt som er kortere, f. eks. $\frac{1}{2} p$. Den kurve som da fremkommer, vil være en kurve som er en mere eller mindre tro kopi av den opprinnelige, men ordinatene er blitt mindre. Kurven er blitt multiplisert med en faktor, nedtrykningsfaktoren. Betraktet nemlig den opprinnelige kurves maksimumsordinater, vil jo disse ved det bevegelige gjennemsnitt bli erstattet med gjennemsnittet av ordinatene på begge sider, og dette må være mindre enn det største ledd i gjennemsnittet, nemlig A. Og noget lignende gjelder om gjennemsnittets midtpunkt ligger på andre steder på kurven. Vi får altså en kurve som den prikkede i fig. 1. Dette er nedtrykningseffekten. Hvis gjennemsnittet hadde vært kortere, vilde nedtrykningen blitt mindre. Nedtrykningsfaktoren avhenger på en karakteristisk måte av lengden av det bevegelige gjennemsnitt i forhold til periodelengden. Når disse lengder er kjent, kan vi finne nedtrykningsfaktoren (ved den teori som er utviklet i prof. Frisch's forelesninger over lineæroperasjoner). Men når nedtrykningsfaktorens størrelse på denne måte er kjent, kan vi korrigere for nedtrykningseffekten. Vi kan "blåse" kurven op igjen" til naturlig størrelse. Metoden er elastisk idet den lar sig anvende også på kurver som ikke er jevne, men stort sett har et lignende forløp som fig. 1. (Se f. eks. fig. 2). Resultatet av

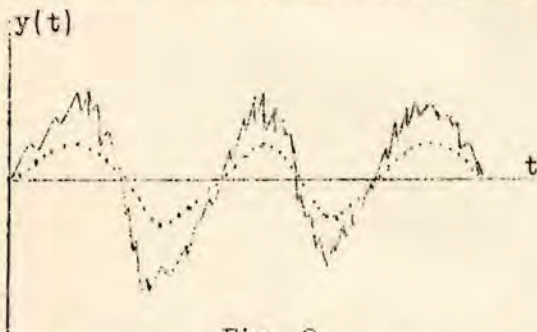


Fig. 2

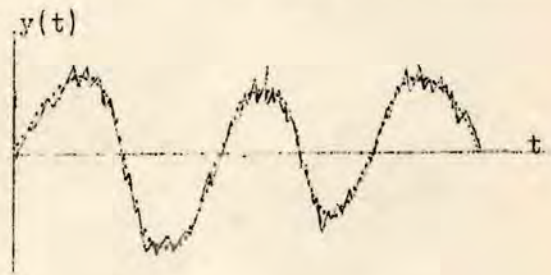


Fig. 3.

et bevegelig gjennemsnitt blir en utjevnet kurve som er blitt noget nedtrykket. (Se den prikkede kurve i fig. 2). Ved å multiplisere kurven med den inverse verdi av nedtrykningsfaktoren, får vi kurven tilbake i naturlig størrelse, men nu utjevnet. Se. fig. 3. Det er denne metode som er anvendt i 8522.4.fig. 2 for å bortskaffe de erratiske utslag.

Ad. 8524.

Formel (4) sier intet annet enn at den fremtidige reinvestering kan utledes når vi kjenner varighetsfordelingen. Alle komponenter kan avledes av første komponent idet denne ikke er noget annet enn kapitalens varighetsfordeling. Sett f. eks. at vi ønsker å finne den samlede reinvestering på tidspunktet $t=3$. Dette blir summen av alle komponentenes ordinater på $t=3$. La oss betrakte de to

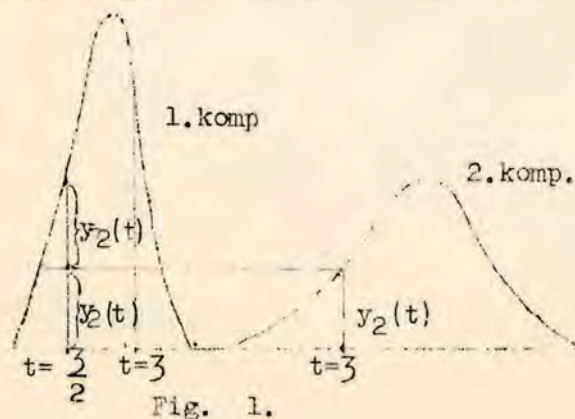


Fig. 1.

(Fig. 1). Vi har

$$(1) \quad y_1(3) = r(3)$$

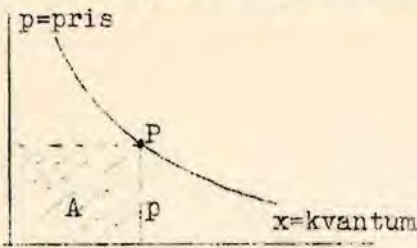
$$(2) \quad y_2(3) = \frac{1}{2} y_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} r\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(3) \quad y_3(3) = \frac{1}{3} y_1\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{3} r\left(\frac{3}{3}\right)$$

o. s. v.

(Jfr. 8524.1, avsnittet under formel (2) Formel (4) i 8524 er simpelt hen det uttrykk som fremkommer ved å summere ligning (1), (2), (3) osv. ovenfor.

For å forklare den inverse fordelingsfunksjon, vil vi ta en analogi med en almindelig efterspørselskurve. I stedet for å undersøke hvorledes prisen varierer når vi varierer kvantum, kan det ha interesse å se hvorledes den totale salgsverdi varierer. Denne er grafisk fremstillet ved det skraverte areal i fig. 2. Jeg kan studere hvorledes arealet varierer med kvantum, altså eftersom punktet P beveger sig langs kurven.



På nøyaktig samme måte kan jeg betrakte variasjonen i arealet B ved kapitalgjenstandenes varighetsfordeling. Se fig. 3. B er lik $f(t) \cdot t$. Vi kan tegne en ny kurve som viser hvorledes dette areal varierer med t. (Se fig. 4). Maksimum av B finnes som det punkt hvor de to tangentstykker X og Y i Fig. 3 er like. (Marshall's linealregel for elasticiteten). Dette punkt blir i fig. 3. litt til høire for kurvens maksimumspunkt. Det er klart at når t er gitt så er også $\frac{1}{t}$ gitt, og omvendt. Derfor kan jeg like godt betrakte B som funksjon av $\frac{1}{t}$. Når jeg nu tegner en tredje kurve hvor jeg som ordinat bruker arealet og som abscisse $s = \frac{1}{t}$, får jeg nettop den inverse fordelingsfunksjon $g(s)$. Hvad den inverse fordelingsfunksjon skal brukes til, fremgår av ligning (12) 8524.

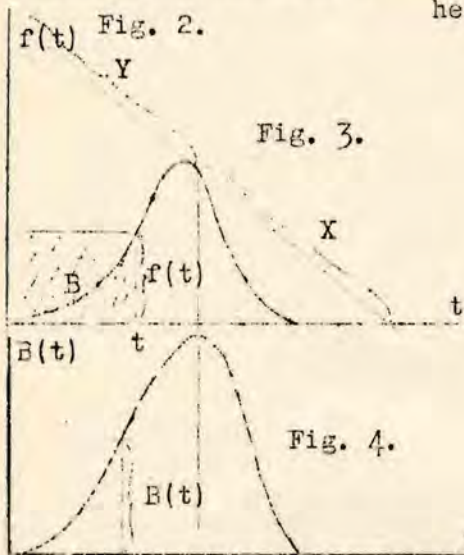


Fig. 9 viser hvorledes den k-te gangs reinvesteringstidspunkter kan ut

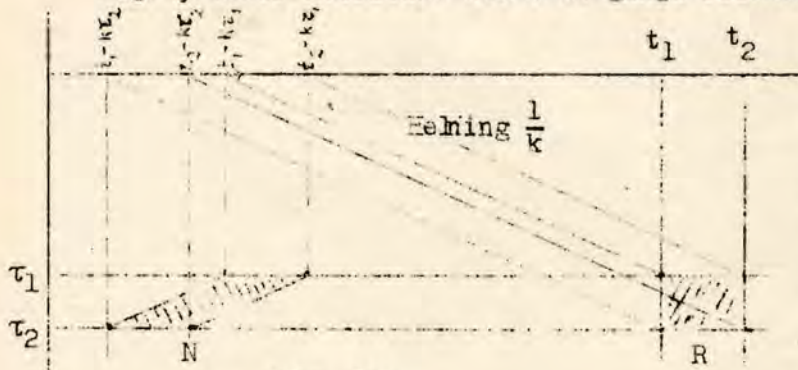


Fig. 10.

Vi har aktså gitt arealet R mellom t_1 og t_2 og τ_1 og τ_2 i fig 10. Det hertil svarende oprinnelige nyinvesteringselement blir da arealet N. Det første nyinvesteringselement som her kommer i betraktning, er $t_1 - k\tau_2$, det siste $t_2 - k\tau_1$.

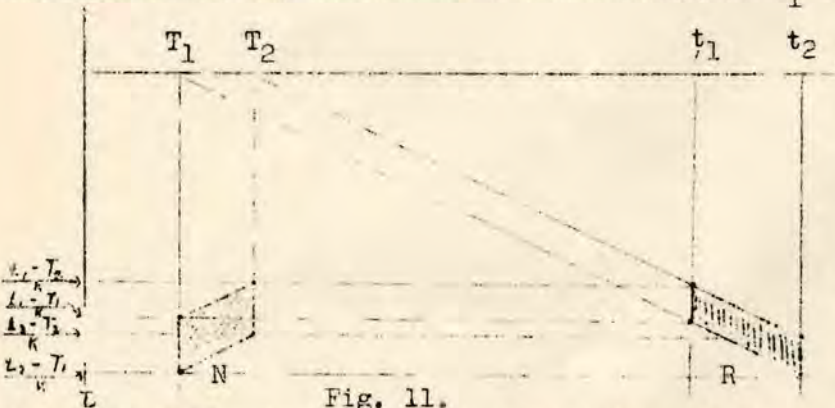


Fig. 11.

Som et tredje tilfelle kunde det tenkes at vi kjente tidsintervallene for såvel nyinvesteringen som reinvesteringen, og at vi ønsker å bestemme de tilsvarende varighetsgrenser. Da kan vi finne nyinvesteringselementet N og reinvesteringselementet R som vist i fig. 11. (t_1, t_2) og (T_1, T_2) er henholdsvis tidsintervallene for reinvesteringen og nyinvesteringen. Arealet R representerer k-te gangs reinvestering, og N den hertil svarende oprinnelige nyinvestering. Disse fremstillinger gir ikke uttrykk for størrelsen av reinvesteringen og nyinvesteringen, men kun for hvorledes kjennetegnene: nyinvesteringstidspunkt, reinvesteringstidspunkt og varighetsklasse henger sammen. (Jfr. faktordiagrammet i produktivitetsteorien. Det viser kun faktorkombinasjonen, ikke produktmengden. (Analoge grafiske fremstillingsmåter anvendes i befolkningslæren. Jfr. f. eks. Emanuel Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Band, S. 95 ff. "Zeuners metode". Se også Westergaard, Statistikkens teori i grundrids, Side 364 ff.)

Vi går nu over til å studere hvorledes størrelsen av den samlede reinvestering blir bestemt når der skjer en rekke suksessive nyinvesteringer. La oss f. eks. undersøke all den reinvestering som skjer i 1930. Denne består av kapitalgjenstander av forskjellig varighet. Der må også tas hensyn til at der i 1930 er kapitalgjenstander som reinvesteres for 1. gang, 2den gang osv. La oss f. eks. se på de kapitalgjenstander som i 1913 reinvesteres for 3dje gang. Vi kan fordele disse etter nyinvesteringstidspunkt og varighet. Se tabell 1. Vi har forutsatt at den største varighet er 10 år. Alle 10-årige maskiner som reinvesteres for 3dje

gang i 1930, er altså nyinvestert i 1900, de som er av varighet $9\frac{2}{3}$ år og som blir reinvestert for 3dje gang i 1930 blev nyinvestert i 1901 osv. (Se tab. 1). Den samlede mengde kapitalgjenstander som i 1930 reinvesteres for 3dje gang, blir altså

Tabell 1.

Nyinvesteringstidspunkt.	Varighet	Reinvestert		
		1. gang	2. gang	3. gang
1900	$\frac{1930-1900}{3} = 10$	1910	1920	1930
1901	$\frac{1930-1901}{3} = 9\frac{2}{3}$	$1910\frac{2}{3}$	$1920\frac{1}{3}$	1930
:	:	:	:	:
1929	$\frac{1930-1929}{3} = \frac{1}{3}$	$1929\frac{1}{3}$	$1929\frac{2}{3}$	1930
1930	$\frac{1930-1930}{3} = 0$	1930	1930	1930

$$(1) \quad y_3(1930) = \frac{1}{3} \left[f\left(\frac{1930-1930}{3}, 30\right) + f\left(\frac{1930-1929}{3}, 29\right) + \dots \right]$$

idet $f(\tau, t)$ er nyinvesteringsintensiteten for τ -årige kapitalgjenstander på tidspunktet t . Den tredje komponent på tidspunktet 1930, $y_3(1930)$ er altså sammensatt av en rekke forskjellige 3. gangs reinvesteringer. Summasjonen i (1) fortsettes inntil vi har fått med alle varighetsklasser.

Generelt får vi for den k -te komponent på tidspunktet t

$$(2) \quad y_k(t) = \frac{1}{k} \left[f\left(\frac{0}{k}, t-0\right) + f\left(\frac{1}{k}, t-1\right) + \dots \right] = \frac{1}{k} \sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} f\left(\frac{\tau}{k}, t-\tau\right)$$

Ligning (2) er altså en summering bakover fra de siste nyinvesteringer til de første som har den egenskap at de for k -te gang kommer igjen på tidspunktet t . Hvis vi må regne med en viss oprettholdelsesprocent P_k , får vi den k -te korrigerede komponent

$$(3) \quad y_k^*(t) = \frac{P_k}{k} \sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} f\left(\frac{\tau}{k}, t-\tau\right)$$

I det tilfelle da vi betrakter en kontinuerlig varighetsfordeling, får vi

$$(4) \quad y_k(t) = \frac{1}{k} \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f\left(\frac{\tau}{k}, t-\tau\right) d\tau$$

Vi forutsetter selvfølgelig at $f(\tau, t) = 0$ for $\tau = 0$. (Ingen 0-årige).

Hvis det bare hadde skjedd nyinvestering på tidspunktet 0, (i vårt tall-eksempel, tabell 1, år 1900), så vilde der bare bli ett ledd igjen i summasjonen (2), nemlig leddet $\tau=t$. Vi vilde følgelig fått

$$(5) \quad y_k(t) = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

Formel (3) pkt. 8524.1 fremkommer altså som et spesialtilfelle av (2) ovenfor.

Den samlede reinvestering på tidspunktet t (alle komponenter tilsammen) finnes ved å summere (3) over k , altså

$$(6) \quad y^*(t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_k}{k} \sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} f\left(\frac{\tau}{k}, t-\tau\right)$$

eller når varighetsfordelingen er kontinuerlig

$$(7) \quad y^*(t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_k}{k} \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f\left(\frac{\tau}{k}, t-\tau\right) d\tau = \sum_{k=1}^{k=\infty} P_k \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f(\tau, t-k\tau) d\tau$$

Hvis vi har det spesialtilfelle da den relative varighetsfordeling er konstant (altså som i 8527 fig. 1-4), får vi

$$(8) \quad f(\tau, t) = \eta(t) \cdot f(\tau)$$

hvor η angir dosens størrelse, idet vi her tenker oss at alle varighetsfordelingene er relative fordelinger, slik at summen av hyppighetstallene blir =1, altså

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \cdot d\tau = 1.$$

Hvad blir den gjennomsnittlige reinvesteringssintensitet når der skjer suksessive nyinvesteringer? Hvis nyinvesteringssintensiteten av τ -årige kapitalgjenstander på tidspunktet t er $f(\tau, t)$, og hvis $d\tau$ og dt er meget små, så vil den totale nyinvestering i tidsintervallet t til $t+dt$ og varighetsintervallet τ til $\tau + d\tau$ være $f(\tau, t)dt d\tau$. Dette nyinvesteringselement $f(\tau, t)dt d\tau$ kommer igjen hvert τ -te år, (hvis oprettholdelsesprocenten $P_k=1$). Det gir en gjennomsnittlig reinvestering pr. år av $f(t, \tau)dt d\tau/\tau$. Hvis vi vil bestemme den gjennomsnittlige totale reinvestering pr. år, må vi altså summere uttrykket $f(t, \tau)dt d\tau/\tau$ over alle forskjellige varigheter τ og alle tidspunkter t som ligger foran det tidspunkt T da beregningen av gjennomsnitts-reinvesteringen utføres. Det gir

$$(9) \quad \bar{y}(T) = \int_{t=-\infty}^T \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \frac{f(\tau, t) \cdot dt \cdot d\tau}{\tau}$$

Dette gjennomsnitt behøver ikke å bli et stasjonært nivå som i 8522.4 fig 2.

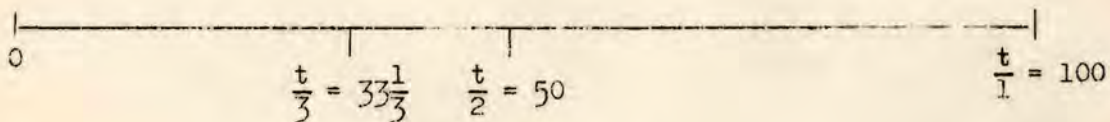
Rettelser:

- S. 8524.1, 10. linje ovenfra står: "Dette tidspunkt osv. ", bør stå: "Abcissen for Q er nøyaktig dobbelt så stor som abcissen for P."
- Siste side i 8524 skal ha nummeret "8524.3".
- S. 8527.7 formel 6 står " $\tau=0$ " over summasjonstegnet, skal være " $\tau=\infty$ "

Bemerkning til 8524.3.

Avstanden mellom punktene $\frac{t}{1}, \frac{t}{2}, \frac{t}{3}$ osv. på varighetsskalaen er naturligvis ikke konstant. Men hvis vi avsetter de punkter på den inverse fordelingskala som svarer til $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ osv. nemlig punktene $\frac{1}{t}, \frac{2}{t}, \frac{3}{t}$ osv., så blir avstanden mellom disse konstant nemlig lik $\delta = \frac{1}{t}$. (Se fig. 1).

Varighetsskala



Den inverse fordelingskala.

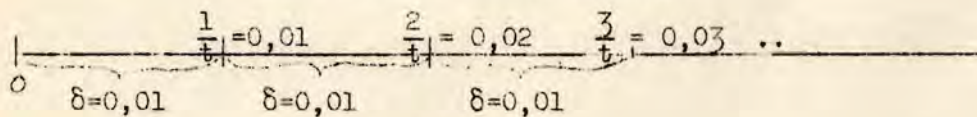


Fig. 1

8528. Nyinvestering og reinvestering som et determinert system hvis bevegelser er vedlikeholdt av erratiske støt.

Vi har i det foregående analysert den sammenheng som er tilstede mellom nyinvestering og reinvestering. Vi har vist hvorledes den fremtidige reinvestering kan utledes når vi går ut fra en eller flere kjente nyinvesteringsdoser. Spørsmålet blir nu om vi på grunnlag herav kan opstille en teori som er determinert, en teori som ikke bare forklarer hvorledes utviklingen i den ene variable, f. eks. reinvesteringen, blir når den annen variable (nyinvesteringen) er kjent, men en teori som forklarer, samtidig, utviklingen i begge variable.

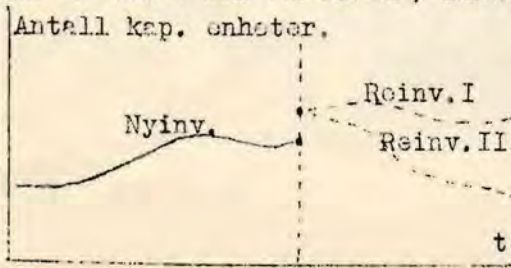


Fig. 1.

Sett at vi kjenner den nyinvestering som skjer op til et vist tidspunkt t_0 . Se fig. 1. Forutsetter vi nu f. eks. at der fra t_0 av ikke skjer mere nyinvestering, vil investeringsvirksomheten etter t_0 kun bestå av reinvestering. Det kan bli en utvikling mot et stasjonært nivå (som i 8522.4 fig. 2), eller hvis vi må regne med en synkende oprettholdelsesprocent, kan vi få en utvikling som antydnet i 8526.2 fig.3. Den fremtidige reinvestering er altså bestemt

ut fra kjennskapet til den forutgående nyinvestering. Det kunde da se ut som vi her har en fullt determinert teori om sammenhengen mellom nyinvestering og reinvestering. Dette er imidlertid ikke tilfelle. Vi har jo utledet den fremtidige reinvestering under den spesielle forutsetning at all nyinvestering ophører fra t_0 av. Men dette er jo nettop å forutsette at utviklingen av den ene variabel, nemlig nyinvesteringen, er kjent på forhånd. Vi kunde for så vidt like godt ha forutsatt at nyinvesteringen fra t_0 av følger en hvilken som helst annen kjent tidsskurve enn den spesielle (nemlig nyinvesteringen konstant lik 0) som vi forutsette for et øieblikk siden. I en teori som skal være determinert er begge forutsetninger like uantagelige.

Det er to måter hvorpå vi kan føre teorien frem til å bli determinert: Vi kan angripe problemet som et kumulantproblem i erratiske støt, eller som et problem om autovedlikholdts bevegelse. (Se 8504 og 8505). Vi besandler i dette punkt kumulantproblemet.

La oss anta at all den nyinvestering som skjer kom er en virkning av tilfældige utenfra givne støt. Det kan være nye oppfinnelser, spontane mar eller mindre irrasjonale beslutninger hos enkelte driftsherrer osv. Naturligvis er i virkeligheten slike "støt" selv til en viss grad påvirket av hele den økonomiske situasjon. Men de inneholder allikevel visse faktorer som virker på egen hånd, spontant, slik at man nærmest må si de er av ikke-økonomisk art. Vi skal ta som gitt at der stadig går en strøm av slike tilfældige støt. Vi forutsetter ikke at de individuelle støt er kjent, vi skal ikke utlede den fremtidige bevegelse ut fra kjennskapet til hvert enkelt støt, (ti det vilde jo ikke være noget annet enn å arbeide med en indeterminert teori av den foren nevnte type). Vi forutsetter kun at nyinvesteringsstøtene er fordelt på en tilfældig måte. Hvis vi vet det, så kan vi - selv uten at vi kjenner de enkelte støt - si visse ting om hele systemets utvikling fremover i tiden.

Styrken av vedlikholdet avhenger av oprettholdelsesprocenten P_k .

Sett først at denne er lik 1 d.v.s. alle kapitalgjenstander blir reinvestert uten at nogen av dem tillates å forfalle. Da er det innlysende at den totale reinvesteringskurve må bli stigende. (Se fig. 2).

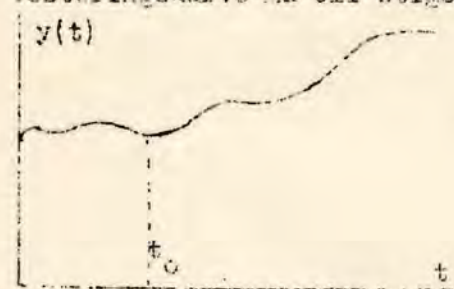


Fig. 2.

allerede tilstedeværende kapitalmengde opprettholdes, men dermest krever hver ny tilfældig dose av nyinvestering sin reinvestering. Det blir som når der drypper tilfældige dråper ned i en beholder hvorfra der ikke skjer noget uttak eller "fordampning": Beholdningen må stadig vokse.

En "fordampning" inntreffer når P_k er avtagende. Nedgangen i P_k vil motvirke den stigende tendens i reinvesteringskurven. Der vil etterhvert innstille sig en tilnærmet likevekt hvorved nedgangen

i P_k nettop opveies av de stadig nytilkomne tilfældige nyinvesteringsimpulser. Vi får altså en bevegelse der fluktuerer omkring et "normal"-nivå. Hvis det ikke er skjedd nyinvestering på noget tidspunkt foran vårt begynnelsestidspunkt, vil selvfølgelig reinvesteringskurven bli stigende fra begynnelsespunktet inn til den når op omkring normalnivået. (Se den prikkede del av kurve 2 i fig. 4.). Både høiden av "normal"nivået og de viktigste trekk ved formen på fluktuationene omkring normalnivået kan utledes uten at vi kjenner den nøiaktige fordeling av de individuelle "støt" For å bestemme amplitudene i reinvesteringsens svingninger trenges bare at vi kjenner den gjennomsnittlige intensitet av støtene. Og selv om denne ikke kjennes, kan visse viktige ting med hensyn til reinvesteringsens tidsform utledes.

Hele tankegangen her er nøiaktig analog med den vi brukte ved pendeleksemplet i 8504. Vi har her et økonomisk eksempel som viser hvad analogien med pendelen kan tjene til. På ganske samme måte som ved det mekaniske eksempel i 8504 vil der nemlig her skapes cykler hvis karakteristiske trekk er uavhengig av støtenes fordeling, men avhengig av kumulasjonsmåten, bestemt ved den teknisk givne variighetsfordeling og ved kurven for oprettholdelsesprocenten P_k .

Vi skal nu se litt nærmere på reinvesterings-kumuleringen som følge av de tilfældige støt. En enkelt nyinvesteringsdose, et enkelt "støt" vil fremkalle en reinvesteringskurve som vist i fig 8522.2. I det tilfelle da vi har flere støt som følger etter hverandre, (som f. eks. skjer på tidspunktene t_1, t_2, t_3 osv.), får vi en reinvesteringskurve som er en sum av slike partiel-cykler. (Se fig. 3).

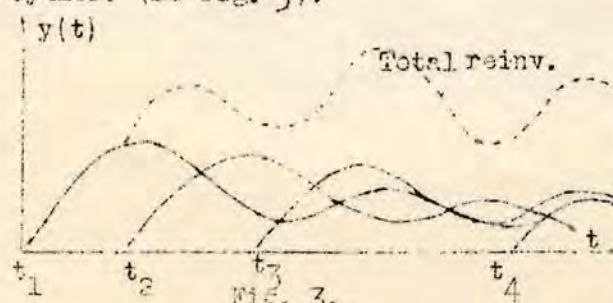


Fig. 3.

Vi vil ta et enkelt talloksompe som viser denne sammenheng. Vi forutsetter for enkelthets skyld at den relative variighetsfordeling holder sig konstant, og at støtene fordeler sig ekvidistant i tid. Disse forutsetninger er imidlertid ikke vesentlige for resultatet. Nyinvesteringene tenkes å springe helt tilfeldig, altså uavhengig av konjunkturforløpet. Se tallene

Tab. 1.

Reinvestering som følge av successive tilfeldige nyinvesteringer.
(Opretholdelsesprocenten konstant=1).

Varighet. år	Relativ varig- hetsfor- deling. o/o	Nyinvestering på tidspunktene:								
		År 1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807	1808
		45	17	103	2	50	60	30	110	10
1	4		1.80	1.80 0.68	1.80 0.68 4.12	1.80 0.68 4.12 0.08	1.80 0.68 4.12 0.08 2.00	1.80 0.68 4.12 0.08 2.00 2.40	1.80 0.68 4.12 0.08 2.00 2.40 1.20	1.80 0.68 4.12 0.08 2.00 2.40 1.20 4.40
2	20			9.00	3.40	9.00 20.60	3.40 0.40	9.00 20.60 10.00	3.40 0.40 12.00	9.00 20.60 10.00 6.00
3	40				18.00	6.80	41.20	18.00 0.80	6.80 20.00	41.20 24.00
4	30					13.50	5.10	30.90	0.60	13.50 15.00
5	6						2.70	1.02	6.18	0.12
Ialt 100										
Total reinvest.			1.80	11.48	28.00	56.58	61.48	101.40	61.66	156.10

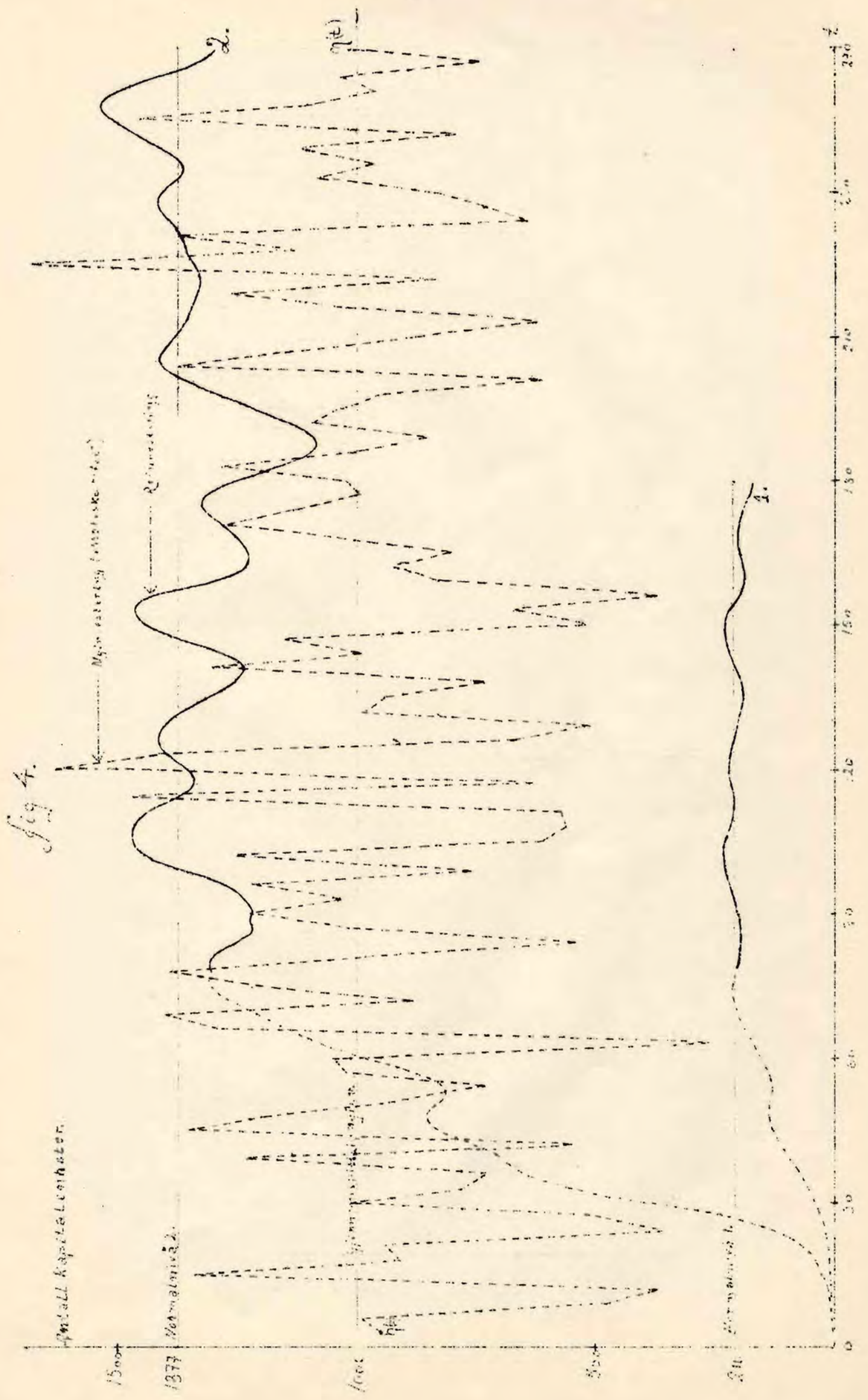
Tabell 2.

Redusert reinvestering som følge av successive tilfeldige nyinvesteringer.
(Synkende opretholdelsesprocent)

Varighet. år	Relativ varig- hetsfor- deling o/o	Nyinvestering på tidspunktet:								
		År 1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807	1808
		45	17	103	2	50	60	30	110	10
1	4		1.80	0.90 0.68	0.45 0.34 4.12	0.23 0.17 2.06 0.08	0.11 0.09 1.03 0.04 2.00	0.06 0.04 0.52 0.02 1.00 2.40	0.03 0.02 0.26 0.01 0.50 1.20 1.20	0.01 0.01 0.13 0.01 0.25 0.60 0.60 4.40
2	20			9.00	3.40	4.50 20.60	1.70 0.40	2.25 10.30 10.00	0.85 0.20 12.00	1.13 5.15 5.00 6.00
3	40				18.00	6.80	41.20	9.00 0.80	3.40 20.00	20.60 24.00
4	30					13.50	5.10	30.90	0.60	6.75 15.00
5	6						2.70	1.02	6.18	0.12
Ialt 100										
Samlet reinvest.			1.80	10.58	26.31	47.94	54.37	68.31	46.45	89.76

45, 17, 103 osv. i tabell 1. I tabell 1 er P_k forutsatt lik 1.

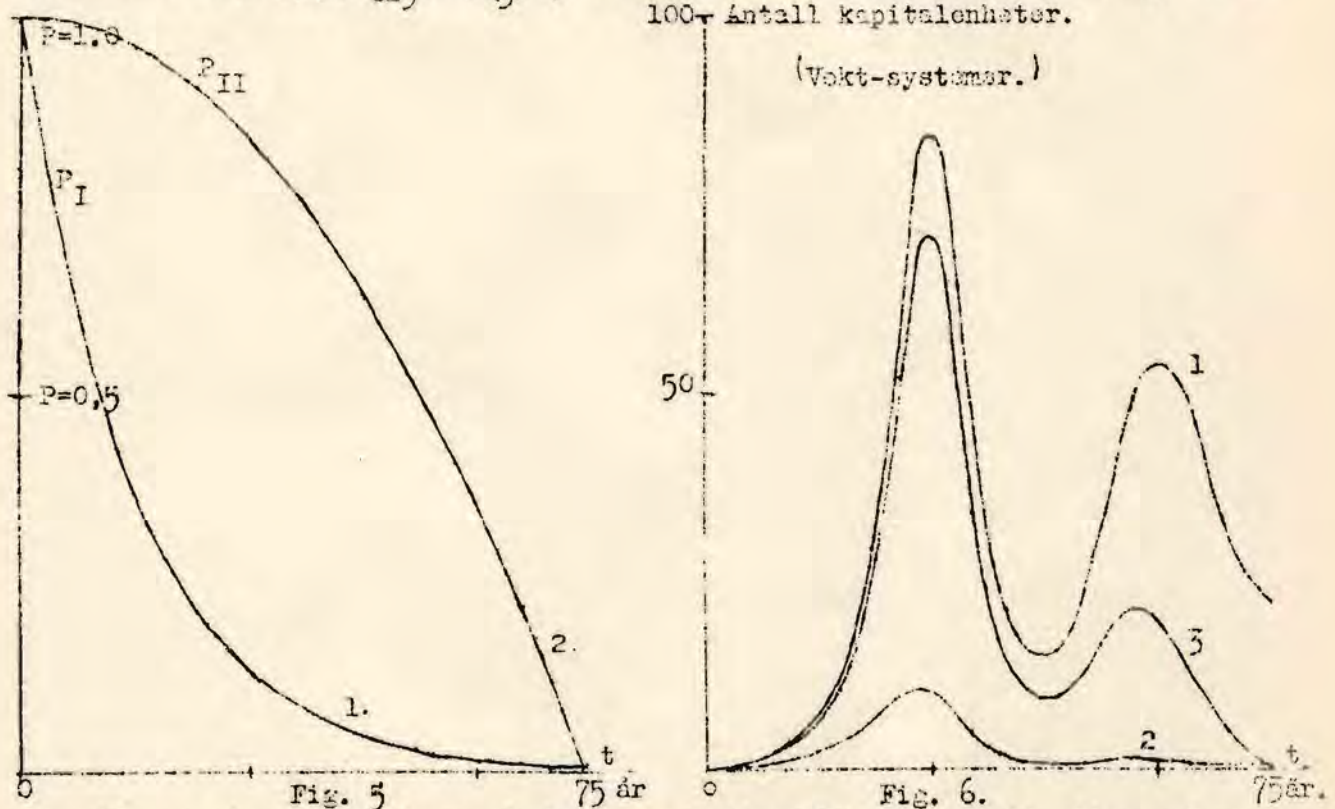
Av dosen 45 kommer derfor 4 prosent.d. v. s. 1.80 igjen hvert år:



1801, 1802 osv. 20 procent av 45 d.v.s. 9 kommer igjen hvert annet år, altså i 1802, 1804 osv. Av dosen 17 kommer 4 procent, altså 0.68, igjen i årene 1802, 1803 osv.

Vi kunde imidlertid også ta hensyn til en synkning i P_k , f. eks. sette $P_k = 1/2^{k-1}$. Dette er gjort i tabell 2. All første gangs reinvestering har altså $P_k = 1$, all annen gangs reinvestering $P_k = 1/2$ osv.

Ved en diskret fordeling som i tabell 1 og 2 vil printallsutslagene bli dominerende. For å få frem en jevn cykle må vi regne med en kontinuerlig varighetsfordeling. Dette er gjort i følgende to tall eksempler, kurve 1 og 2 i fig. 4. Den relative varighetsfordeling er her den samme for alle nyinvesteringsdoser og lik den som er gitt i fig. 1 pkt. 8522. Denne fordeling er forutsatt kontinuerlig. Som tilfældige nyinvesteringsstøt er valgt en tilfældig variabel konstruert på grunnlag av endesifre i trekninger i Det Norske Penge Lotteri, ($\eta(t)$, prikket i fig. 4.). De enkelte støt er avsatt ukvidistant med 3 års mellomrum. Kurven $\eta(t)$ gir altså den erratiske nyinvestering som årlig gjennomsnitt for 3 og 3 år. Den gjennomsnittlige nyinvesteringsintensitet er 1000 kapitalenheter pr. år. Kurve 1. i fig. 4 viser den reinvestering pr. år som vil følge av $\eta(t)$ når vi regner med en oprettholdelsesprocent P som synker som vist i fig. 5 kurve 1. ($P_1 = e^{-1.15 \cdot t}$). Kurve 2. i fig. 4 viser reinvestering pr. år når P synker som kurve 2. i fig. 5, ($P_2 = \frac{1}{625} (625 - \frac{t}{3})^2$). De valgte P -funksjoner er altså her, for å



forenkle regningene, satt som funksjon av t , (den tid som er gått siden nyinvesteringen), og er altså ikke avhengig av k (uten forsåvidt som $t=kt$, slik at vi kan skrive vårt $P(t) = P(kt)$).

Kurve 1 i fig. 6 er første del av den utjevnete reinvesteringskurve fig. 2 pkt. 8522, omregnet svarende til en engangs nyinvestering på 1000 enheter, (ikke som i 8522 4556 enheter). Som før nevnt tenker vi oss den relative varighetsfordeling i den nyinvesterte dose kontinuerlig, altså betrakter vi også den kontinuerlige reinvesteringskurve. Kurve 2 og 3 i fig. 6 er ikke annet enn kurve 1 i fig. 6 ledd for ledd multiplisert med P , (henholdsvis fra 1 og 2 i fig. 5), d.v.s. de viser reinvesteringen som følger av en dose på 1000 nyinvesterte kapitalenheter når oprettholdelsesprocenten synker som henholdsvis P_I og P_{II} . (Reinvestering etter mer enn 75 års forløp etter nyinvesteringen blir i begge tilfelle uten betydning).

Kurve 2 og 3 i fig. 6, ovennevnt, er brukt som vekt-systemer, (se 8504), for å få frem kurve 1 og 2 i fig. 4, d.v.s. kumuleringen av de enkelte nyinvesteringstøt $\eta(t)$ i fig. 4. (Idet vi i eksemplet har regnet med punkter avsatt hvert 3. år, mens tallene gir intensiteter pr. år såvel i $\eta(t)$ -kurven som i vekt-kurvene, må det resultat man får ved å gå frem som antydnet foran, multipliseres med 3 for å få kurvene 1 og 2 i fig. 4.) Selv på grunnlag av de helt tilfældige støt som her er brukt, ser man tydelig hverledes der fremkommer cykler hvis periodelengde er omtrent lik 30 år, altså den typiske varighet i varighetsfordelingen.

Det at vi her har en oprettholdelsesprocent P som er synkende må selvfølgelig ikke forveksles med den ting at den reinvesteringssykle som skapes av en enkelt nyinvesteringsdose, selv er dempet. Denne demping er tilstede selv om oprettholdelsesprocenten er lik 1. (Se fig. 2, 8522).

8529. Stimulansligningen for nyinvesteringen. Nyinvestering og reinvestering som et autovedlikeholdt system.

I vårt mekaniske eksempel med pendelen i pkt. 8505, "vannpendelen", har vi analysert pendelsvingningene som en autovedlikeholdt bevegelse. Pendelen utløste selv den kraft som i neste omgang tilførte pendelen ny energi.

Det er innlysende at det nettop er noget i den retning som skjer under produksjonen. I forrige punkt så vi helt bort fra dette forhold. Nyinvesteringsimpulsene blev ikke betraktet som noget der blev utløst av selve systemets svingning, men blev betraktet som helt tilfeldige. Nu innfører vi nettop det synspunkt at nyinvesteringsvirksomheten i sin tur avhenger av konjunkturforløpet. Utløsningen av ny-investeringsvirksomheten tenkes altså nu å skje på grunn av selve bevegelsen i det system vi betrakter.

Rent konkret kunde man tenke sig denne sammenheng som resultatet av en slags "optimistisk smitte". Det er en almindelig erfaring at hvis der skjer en sterk ekspansjon i kapitalproduksjonen, f. eks. på grunn av reinvesteringsbehovet, vil dette fremkalle en økning også i nyinvesteringsvirksomheten. De som bestemmer produksjonstempoet, ser at der er stor efterspørsel efter kapital og tror at det også vil bli behov for nyinvestering. Det blir en slags smittsom optimisme som river flere og flere med sig. Dette er nettop typisk for autovedlikeholdsskjemaet. (Jfr. 8505 : Når pendelen svinger over mot høire, åpnes kranen og vannet presser pendelen ennu lenger i samme retning). Det eksisterer altså en sammenheng mellom nyinvestering og reinvestering hvis form er bestemt av denne "smitte"-virkning. Denne relasjon vil vi kalle stimulansligningen for nyinvesteringen. Idet vi betegner nyinvesteringen på tidspunktet t $\eta(t)$, kan stimulansligningen generelt formuleres slik

$$(1) \quad \eta(t) = \text{avhengig av } y \text{ i den foranliggende tid.}$$

Grafisk kan vi uttrykke dette slik: Sett at der i tiden foran tidspunktet t har vært en høi reinvesteringsintensitet (se fig. 1), så vil dette påvirke driftsherrene slik at nyinvesteringens ordinat på tidspunktet t blir stor (fig. 2). Det er dette som uttrykkes ved (1).

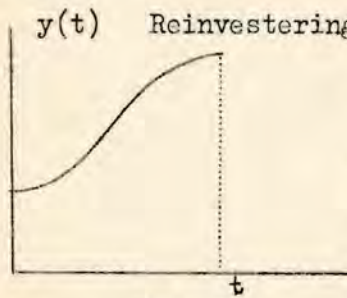


Fig. 1

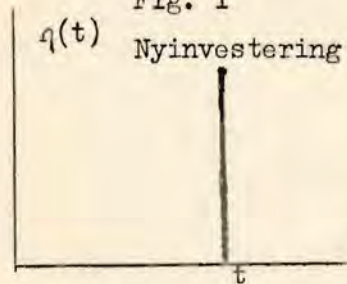


Fig. 2

For praktiske formål og særlig når man vil forsøke en statistisk analyse, må man gå ut fra en mere bestemt form på stimulansligningen. Den helt generelle formulering (1) er praktisk uanvendelig.

En måte å betrakte stimulansligningen på er følgende: For det første kan vi tenke oss at nyinvesteringen inneholder et visst konstant element (som f. eks. representerer det underliggende trykk i retning av ekspansjon). La dette være a . I tillegg hertil kunde vi tenke oss et ledd som er påvirket av reinvesteringens størrelse. Dette være $b \cdot y(t)$ hvor b er en konstant. Videre kunde vi anta at nyinvesteringen er avhengig av stigningshastigheten for reinvesteringen. Dette være uttrykt ved $c \cdot y'(t)$, hvor c er en konstant. Efter det vi har sagt foran, må alle disse ledd være positive. Vi får da

$$(2) \quad \eta(t) = a + b \cdot y(t) + c \cdot y'(t)$$

b og c er et slags elastisitetsbegreper. Vi kunde kanskje kalle dem "smitte"-elastisitetene.

(2) er en differentiell sammenheng mellom $y(t)$ og $\eta(t)$. Vi kunde imidlertid også uttrykke sammenhengen på andre måter, f. eks. ved å sette

$$(3) \quad \eta(t) = a + b \cdot y(t) + c \cdot y(t-\delta)$$

hvor δ er et visst "lag". Dette uttrykker at $\eta(t)$ også er avhengig av de foregående reinvesteringer. Mere generelt kunde vi sette

$$(4) \quad \begin{aligned} \eta(t) &= a + b_0 y(t) + b_1 y(t-1) + b_2 y(t-2) + \dots \\ &= a + \sum_{k=0}^t b_k y(t-k) \end{aligned}$$

hvor a og b er konstanter som avhenger av driftsherrenes måte å reagere på. $\eta(t)$ er her en linearform i y -ordinaten for den nærmest foregående tid. Det er verd å legge merke til at den sammenheng vi har uttrykt ved (4) er av samme art som den tekniske sammenheng, kun med den forskjell at stimulansligningen (4) uttrykker η ved y mens den tekniske sammenheng uttrykker y ved η . Den tekniske sammenheng mellom y og η kan nemlig skrives på følgende måte:

$$(5) \quad y(t) = c_1 \eta_{t-1} + c_2 \eta_{t-2} + \dots = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \eta_{t-k}$$

hvor $c_1, c_2 \dots$ er konstanter. Vi har $c_1 = \sum_k \frac{p_k}{k} f(\frac{1}{k})$, $c_2 = \sum_k \frac{p_k^2}{k} f(\frac{2}{k})$ osv. (se formel (6) pkt. 8527.7). $c_1, c_2 \dots$ er uttrykk for en teknisk sammenheng.

La oss betrakte det stasjonære tilfellet da $y(t) = y(t-1) = \dots = y$, og $\eta(t) = \eta(t-1) = \dots = \eta$. Iflg. (4) og (5) har vi da

$$(6) \quad y = \eta \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

$$\eta = a + y \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Hvor kan y og η finnes direkte, uttrykt ved a, b og c .

$$(7) \quad y = \frac{a \sum_k c_k}{1 - \sum_k c_k \sum_k b_k}$$

$$\eta = \frac{a}{1 - \sum_k c_k \sum_k b_k}$$

til en stasjonær verdi for y svarer altså en stasjonær verdi for η og omvendt.

Av ligningene (4) og (5) kan den fremtidige utvikling i y og η bestemmes som et determinert system.

La oss anta at vi har et observasjonsmateriale som i tabell 1. Vi tenker oss at vektene c_1, c_2 , osv. og b_1, b_2 , osv. avtar sterkt når vi går bakover fra t , slik at de praktisk tatt er lik null ved $t-9$.

Tabell 1.

Tidspunkt η	y	c	b	$b \cdot y$	$c \cdot \eta$
t-9 10	50	0.2	0.00	0.00	2.0
t-8 20	70	0.3	0.00	0.00	6.0
t-7 30	80	0.4	0.02	1.60	12.0
t-6 20	100	0.5	0.04	4.00	10.0
t-5 15	60	0.9	0.03	1.80	13.5
t-4 20	30	0.6	0.05	1.50	12.0
t-3 25	40	0.3	0.00	2.40	7.5
t-2 30	50	0.2	0.06	3.00	6.0
t-1 35	70	0.1	0.07	4.90	3.5

La oss anta at vi har observert $a = 20$. Da får vi $y(t) = \sum_{k=1}^9 c_k \eta(t-k) = 72.5$

og $\eta(t) = a + \sum_{k=1}^9 b_k y(t-k) = 20 + 19.20 = 39.20$. Nu da vi kjenner $y(t)$ og $\eta(t)$,

kan vi innlemme disse verdier i vårt observeringsmateriale, flytte vektene en plass frem, og beregne $y(t+1)$ og $\eta(t+1)$ osv. På denne måten vil samtidig y og η bestemmes hverandre i den fremtidige utvikling, systemet er determinert.

(Mer med avsluttes behandlingen av 852. I neste paragraff, 853, skal vi behandle "Kapitaljonatandenes konstruksjonstid. Diskrepansen mellom igangsettelse og videreføring av kapitalproduksjon!")

853. KAPITALGJENSTANDENES KONSTRUKSJONSTID. DISKREPANSEN MELLOM
IGANGSETTELSE OG VIDEREFØRING AV KAPITALPRODUKSJON.

8531. Innledning.

I paragraf 851 har vi sett eksempler på forenklede systemer som ikke fører til cykliske bevegelser. Vi skal nu se hvorledes man ved å gjøre litt mere kompliserte forutsetninger enn de vi gikk ut fra i 851 kan få frem en løsning som fremviser typiske sykler. Det teoretiske skjema vi opererer med i denne paragraf fører som vi skal se til en løsning der inneholder tre forskjellige slags typiske svingninger nemlig en $\frac{1}{2}$ - årscykle, en $\frac{1}{2}$ - årscykle og en langbølge på ca. 50-60 år. Det er bemerkelsesverdig at disse teoretisk utledede sykler nettop svarer til de mest fremtredende svingninger som vi kjenner fra de faktisk observerte økonomiske tidsrekker (for priser, produksjon, oasetning osv.). Vi vil dog straks advare mot å fortolke dette som om det her betraktede teoretiske skjema gir den endelige teoretiske løsning av konjunkturproblemet. I konjunkturteorien er der nemlig et næsten uendelig antall muligheter for å plukke ut visse sett av faktorer og derav opstille teoretiske systemer som fører til sykler. Det skjema vi skal behandle i denne paragraf er et alternativ blandt andre teoretiske skjemaer. (Noen av disse vil bli behandlet i de følgende paragrafer). Et enkelt slikt system kan belyse problemet fra en spesiell synsvinkel, og kan derfor ha adskillig interesse selv om det ikke i sig selv gir den endelige og altomfattende løsning.

8532. Igangsettelsesfunksjonen og videreføringsfunksjonen.

Vi skal nu se nærmere på hvorledes systemet i 851 kan endres så vi får et system med cykliske bevegelser. Det nye element vi da fører inn er den omstendighet at produksjonen av kapitalgjenstander tar tid. Dette så vi bort fra i 852, idet vi der kun festet oss ved kapitalgjenstandenes slitningstid.

Dette med kapitalgjenstandenes konstruksjonstid er særlig blitt fremhevet av den franske konjunkturteoretiker Aftalion. Initiativet til å bygge kapitalgjenstander kommer ofte til å komme istand på grunn av faktorer som ikke lenger er tilstede når kapitalgjenstandene er ferdige. Til illustrasjon bruker han et morsomt eksempel: Sett at vi befinner oss i et meget kaldt værelse. Vi legger i ovnen, men temperaturen stiger naturligvis ikke med en gang. Følgelig blir vi utålmodige og legger mer ved på, slik at når først veden er kommet godt i brand, så blir det altfor varmt i værelset. Og så glemmer vi å legge på mere ved inntil værelset igjen er blitt kaldt, og så gjentar spillet sig på nytt. Virkningen av det man gjør kommer altså i dette tilfelle etterpå, slik at den ikke overskues i øieblikket, og det fremkaller den cykliske bevegelse. Eksemplet kan overføres på kapitalproduksjonen. Fordi det varer en stund før kapitalgjenstandene blir ferdige, ser det til å begynne med ut som produksjonen av kapitalgjenstander ikke "monner", driftsherrene vil derfor under oppgangen overvurdere behovet for kapitalgjenstander. På den annen side, når kapitalgjenstandene blir ferdige, og man ser at det er for mange, glemmer man vedlikeholdet.

Denne Aftalions tanke er interessant; den er et viktig element til en teori. Slik som Aftalion selv utviklet teorien blev den imidlertid ikke tilfredsstillende. Han fikk ikke klarlagt forbindelsen mellom dette forhold og de andre betingelser som påligger systemet. Hans teori kan neppe engang betraktes som determinert. Uten at han selv er opmerksom på det forsøker han å løse et system hvor der er færre ligninger enn ukjente. Vi skal nu utnytte Aftalions idé om kapitalgjenstandenes konstruksjonstid for herpå å oppbygge en determinert teori.

Siden vi nu fester oppmerksomheten ved den ting at kapitalproduksjonen tar tid, er det ikke lenger nok å betrakte det ene begrep: kapitalproduksjonen pr. tidsenhet. Vi får nu å betrakte både

(1) y_t = igangsettelse av kapitalproduksjon pr. tidsenhet på
og tidspunktet t.

(2) z_t = videreføringsaktiviteten pr. tidsenhet på tidspunktet t.

y og z er å opfatte som intensiteter pr. tidsenhet. y er mengden av kapital-

gjenstander som de kapitalproduserende driftsherrer bestemmer sig til å påbegynne på et bestemt år. F. eks. for skipsbygningen: y_{1934} = "antall"strukne kjøler" i året 1934. Disse beslutninger vil medføre en del arbeide fremover i tiden. Dette videreføringsarbeide er z .

Siden vi nu her innført en ny variabel, nemlig z , i tillegg til de vi hadde før, må vi se oss efter en ny relasjon mellom de variable. En slik vil vi søke å utlede av selve den teknisk givne produksjonsmåte. Sett at der skal bygges 1 enhet kapital (f. eks. et skip). Dette tar en viss tid. I praksis kan naturligvis denne konstruksjonstiden til en viss grad reguleres. Arbeidet kan forerres eller trekkes i langdrag. Men som en første tilnærming vil vi her tenke oss kapitalgjenstandenes gjennomsnittlige konstruksjonstid konstant og teknisk gitt. Det å forutsette en teknisk bestemt konstruksjonstid er antagelig mindre urealistisk enn den å forutsette en teknisk bestemt slitningstid.

Konstruksjonstiden kaller vi ϵ . For skipsbygningen regner man eksempelvis at selve arbeidets utførelse tar gjennomsnittlig ca. 1 år. Hertil kommer så forarbeidet med planleggelse, tegning osv.

Imidlertid blir det også av betydning hvorledes arbeidet er fordelt innenfor konstruksjonstiden. Vi definerer

(3) D_{τ} = fordelingsfunksjonen for kapitalproduksjonen over konstruksjonstiden.

τ = tidsavstanden fra igangsettelsespunktet. D_{τ} kan eksempelvis være slik at arbeidet fordeler seg jevnt utover hele konstruksjonstiden ϵ , altså som antydnet i fig. 1. I praksis vil imidlertid D_{τ} som oftest antagelig ha et forløp som

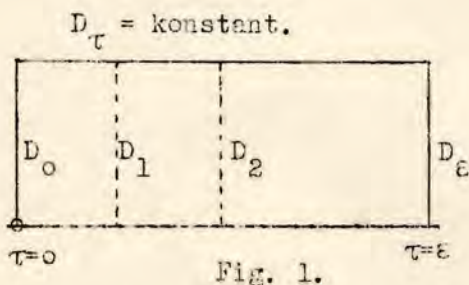


Fig. 1.

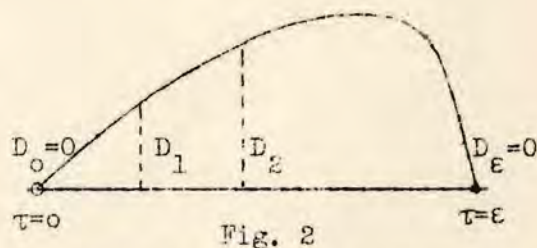


Fig. 2

antydnet i fig. 2: Arbeidet begynner smått og tiltar til henimot slutten av konstruksjonstiden da det faller bratt av. Betydningen av D_{τ} er den at en bestemt kapitaldose f. eks. 27 kapitalenheter påbegynt i 1934, vil forårsake en videreføringsaktivitet $=27 \cdot D_1$ i 1935, en videreføringsaktivitet $=27 \cdot D_2$ i 1936 osv.

Hvor stor vil den samlede videreføringsaktivitet på et bestemt tidspunkt, f. eks. 1934 bli som følge av all den igangsettelse som er skjedd på foranliggende tidspunkter? Den i 1934 pågående videreføringsaktivitet består dels av videreføring av kapitalproduksjon påbegynt i 1933. Dette gir en aktivitet i 1934 lik $y_{1933} \cdot D_1$. Videre har vi i 1934 en videreføring lik $y_{1932} \cdot D_2$ av kapitalproduksjon påbegynt i 1932 osv. For fullstendighets skyld bør vi også regne med en viss videreføring $y_{1934} \cdot D_0$ foranlediget ved kapitalproduksjon som igangsettes i dette samme år. Den samlede videreføringsaktivitet i 1934 blir altså

$$z_{1934} = y_{1934} \cdot D_0 + y_{1933} \cdot D_1 + y_{1932} \cdot D_2 + \dots$$

og generelt hvis vi betrakter tidspunktet t istedetfor 1934

$$(4) \quad z_t = y_t \cdot D_0 + y_{t-1} \cdot D_1 + \dots + y_{t-\epsilon} \cdot D_{\epsilon}$$

eller kortere skrevet

$$(5) \quad z_t = \sum_{\tau=0}^{\epsilon} D_{\tau} \cdot y_{t-\tau}$$

ϵ er den totale konstruksjonstid. I (5) har vi inndelt tiden i hele år, men det er naturligvis intet i veien for å foreta en tettere inndeling. Vi oppfatter da D_{τ} som en intensitet, d.v.s. D_{τ} betegner den mengde videreføringsarbeide som faller pr. år når vi ser hen til et lite intervall av legde $d\tau$, som ligger τ år fjernet fra igangsettelsespunktet. Den del av videreføringsarbeidet som faller i dette intervall blir altså $D_{\tau} \cdot d\tau$. Ved å gå over til en kontinuerlig betraktningssmåte får vi da i analogi med (5) at den totale videreføringsaktivitet på tidspunktet t er

$$(6) \quad z_t = \int_{\tau=0}^{\epsilon} D_{\tau} \cdot y_{t-\tau} \cdot d\tau$$

Ligning (5) eller i den kontinuerlige form (6) er den teknisk bestemte videreføringsligning.

8533. Den nye betingelse som ledd i et determinert system. Et tall-eksempel som viser hvorledes strukturbetingelsene og initialbetingelsene bestemmer systemets utvikling.

Vi vil opprettholde uforandret den produksjonspolitikken ligning som vi opstillet i 851, kun med den forskjell at vi nu lar y bety igangsettelsen. I bremsningsligningen fra 851 er det naturlig å erstatte y med z . Det er jo klart at selve beslutningen om å sette arbeide igang ikke medfører noget kassabehov. Dette blir først aktuelt etterhvert som arbeidet kommer igang. Kassabehovet avhenger altså av z , ikke av y . Med disse endringer får vi

- (1) Produksjonspolitikken ligning $y = mx + \mu \dot{x}$
 (2) Bremsningsligningen $\dot{x} = c - \lambda x = c - \lambda(rx + sz)$

Hertil kommer så nu

- (3) Den teknisk bestemte videreføringsligning $z_t = \sum_{\tau=0}^{\varepsilon} D_{\tau} \cdot y_{t-\tau}$

Vi har her 3 ukjente nemlig x , y og z , og til bestemmelse av disse har vi 3 ligninger nemlig (1), (2) og (3). Systemet er altså determinert.

Vi skal stille op et tall-eksempel som viser hvorledes man ved ligningene (1), (2) og (3) kan bestemme den fremtidige tidsform på x , y og z , når tidsformen i tiden forut er kjent. Dette å opstille et tall-eksempel er et udmerket middel til å komme på det rene med om problemet er determinert. Dessuten tvinges man til å gjøre sig klar over hvilke initialbetingelser som trenges.

For å gjennomføre et slikt tall-eksempel er det praktisk å løse (3) og (4) m. h. p. x og y . Det gir

$$(4) \quad x = \frac{c - \dot{x} - \lambda sz}{\lambda r}$$

$$(5) \quad y = \frac{c - \dot{x} - \lambda sz}{\lambda r} \cdot m + \mu \dot{x}$$

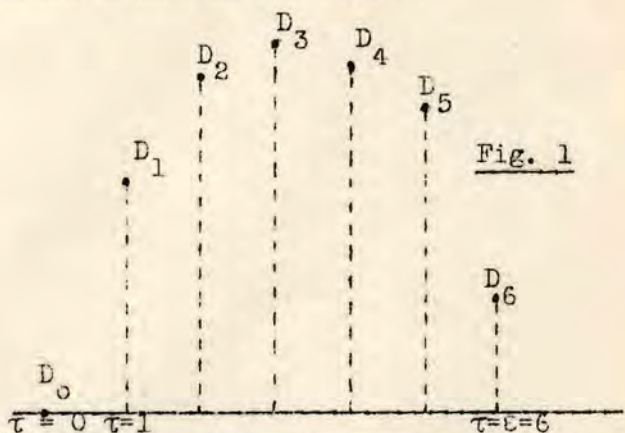
\dot{x} er avhengig av det som er skjedd op til tidspunktet t og altså kjent. For enkelhets skyld vil vi tenke oss $D_0 = 0$ slik at z på et visst tidspunkt kun avhenger av de tidligere størrelser av y . (Nogen vesentlig komplikasjon vilde det dog ikke være om $D_0 \neq 0$.)

La oss sette $\varepsilon = 6$ år og anta at vi har en teknisk gitt fordelingsfunksjon som angitt i tabell 1 og grafisk fremstillet i fig. 1.

Tabell 1.

Fordelingsfunksjonen.

D_0	=	0 pct.
D_1	=	14 "
D_2	=	20 "
D_3	=	22 "
D_4	=	20 "
D_5	=	18 "
D_6	=	6 "



De strukturkonstanter som inngår, forutsettes også kjent. La oss sette f. eks. $m = 0.7$, $\mu = 5$, $\lambda = 0.08$, $c = 9$, $r = 2$, og $s = 1$. La oss videre anta at vi har et observasjonsmateriale som angitt i tabell 2.

Tabell 2.

t	x_t	y_t	z_t
1928	110.0	120.0	112.0
1929	120.0	134.0	110.0
1930	110.0	27.0	80.0
1931	100.0	20.0	75.0
1932	100.0	70.0	75.0
1933	90.0	13.0	60.0

Hele materialet i tabell 2 er "initialbetingelsene".

Vi kan nu ved hjelp av y_t i tabell 2 og D_t i tabell 1 beregne z_{1934} , nemlig $z_{1934} = 0.14 \cdot 13 + 0.20 \cdot 70 + \dots = 57$ (56.9). Videre finner vi av tabell 2 at tilvekstgraden for x like før 1934 er $\dot{x} = -10$. Ved å innsette $\dot{x} = -10$ og $z = 57$ i (4) og (5) finner vi $x = x_{1934} = 90.3$ og $y = y_{1934} = 13.2$. Dermed er alle størrelser x , y , z , kjent til og med tidspunktet 1934. Situasjonen i 1934 vokser altså ut av de tidligere situasjoner på den her beskrevne måte. Når situasjonen i 1934 således er beregnet, kan vi skrittvis beregne verdiene av x , y og z på de følgende tidspunkter 1935, 1936 osv. Resultatene er opført i tabell 3 og grafisk fremstillet i fig. 2, 3 og 4.

Tabell 3.

t	x_t	y_t	z_t
1934	90.3	13.2	56.9
1935	37.8	26.4	36.7
1936	367.3	- 3.1	28.5

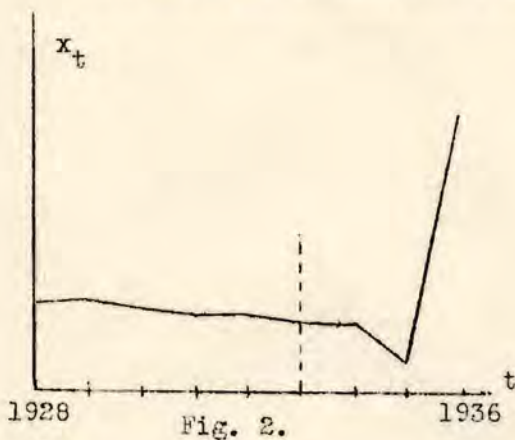


Fig. 2.

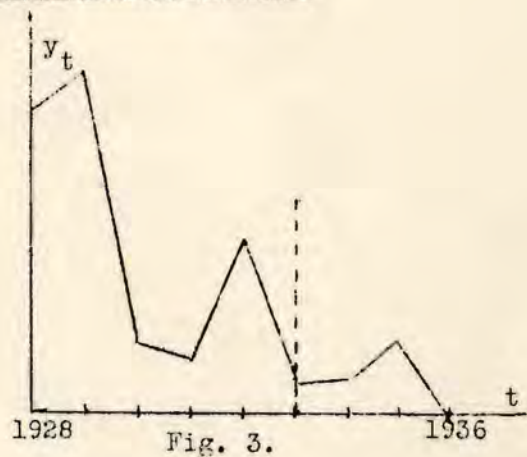


Fig. 3.

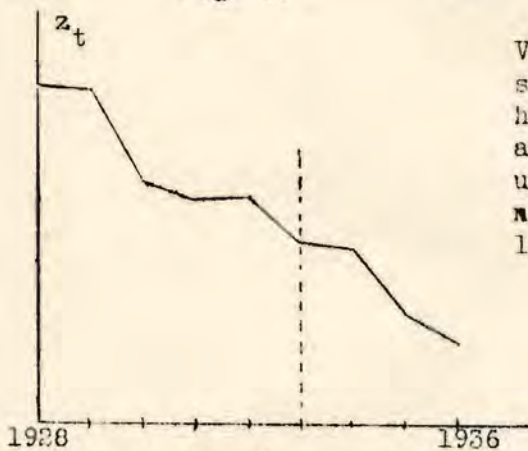


Fig. 4.

Vi ser at hvis systemet er behersket av de sluttede betingelser (1), (2) og (3) og hvis det har utviklet sig op til 1933 som antydnet i tabell 2, så vil den fremtidige utvikling være slik at z fortsetter sin nedadgående bevegelse mens x efter en liten nedgang får en kraftig opsving osv.

8534. Den generelle matematiske løsning.

Av et slikt talleksempel er det vanskelig å få overblikk over hvad de karakteristiske trekk i tidsformen av løsningen blir, og særlig er det vanskelig å se hvilke egenskaper ved strukturbetingelsene som fremkaller de og de karakteristiske trekk i løsningens tidsform. For å få oversikt over dette, må man benytte en annen fremgangsmåte: man må forsøke å gi en generell matematisk løsning der påviser hvilke cykliske og eventuelt progressive tendenser der vil være i løsningen. Det vilde her føre for vidt å gå inn på hvorledes dette utføres. Vi skal bare angi de hovedresultater som man på denne måten kommer frem til.

La oss f. eks. betrakte den variable størrelse x (konsumsjonen). Det viser sig at tidsformen for x kommer til å inneholde visse komponenter. Tidskurven x_t vil altså fremkomme som en sum av visse tidskurver x_{0t} , x_{1t} osv.

$$(1) \quad x_t = x_{0t} + x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + \dots$$

x_{0t} viser sig å bli en trend, mens x_{1t} vil være en dempet langbølge, x_{2t} en

bølge som er kortere og ikke fullt så sterkt dempet, x_{2t} en ennu kortere bølge osv. x_{1t} kalles primærzyklen, x_{2t} sekundærzyklen og x_{3t} tertierzyklen. Det er kun disse tre å fire første komponenter som blir av någon vesentlig betydning.

Der kan angis eksplicite uttrykk for disse komponenter. Således

har vi

$$(2) \quad x_{1t} = A_1 \cdot e^{-\beta_1 t} \cdot \sin(a_1 + \omega_1 t)$$

hvor A_1 er amplituden, β_1 dempningsaksponenten, $a_1 =$ fasen, $\omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{p_1} =$ frekvensen (svingetallet), p_1 er periodelengden, alt regnet for primærkomponenten i x . Lignende formler har man for de øvrige komponenter i x .

På samme måte som for x får vi for y og z

$$(3) \quad y_t = y_{0t} + y_{1t} + y_{2t} + y_{3t} + \dots$$

$$(4) \quad z_t = z_{0t} + z_{1t} + z_{2t} + z_{3t} + \dots$$

hvor komponentene er gitt ved lignende formler som (2).

Det er bemerkelsesverdig at flere av de viktigste karakteristika for disse komponenter er felles for x , y og z . De mest fremtredende karakteristika for primærkomponentene altså for x_{1t} , y_{1t} og z_{1t} er periodelengden og dempingen. Disse to karakteristika er de samme for alle de tre primærkomponenter. x_{1t} , y_{1t} og z_{1t} adskiller sig altså bare i fase og amplitude. På samme måte er periodelengde og demping den samme for sekundærkomponentene x_{2t} , y_{2t} og z_{2t} . En annen bemerkelsesverdig ting er det at de ting som er felles for alle de tre komponenter av en gitt orden, altså periodelengde og demping, de avhenger slett ikke av initialbetingelsene, men kun av formen på strukturbetingelsene (4) og (5) pkt. 8533, altså av størrelsen på strukturparametrene m , μ , λ etc. Til sammenligning kan anføres at en pendel som svinger under friksjon, den får sin svingetid (periode) bestemt utelukkende av sin indre struktur (pendelens lengde). Denne svingetid er altså helt uavhengig av initialbetingelsene, altså uavhengig av når pendelen blev satt igang, styrken av det initiale støt osv.

Svingetidene og dempingene ved de forskjellige komponenter er altså utelukkende avhengig av strukturparametrene m , λ , μ osv. Den måte hvorpå svingetidene og dempingene avhenger av m , μ , λ osv. er imidlertid ikke helt enkel. Avhengighetsforholdet er definert ved en viss ligning, den såkalte karakteristiske ligning. Røttene i denne ligning gir opplysning om svingetidene og dempingene. Den vesentlige del av arbeidet ligger nettopp i løsningen av den karakteristiske ligning. I praksis kan dette ofte føre til meget vidløftige regninger.

8535. Numerisk bestemmelse av komponentenes karakteristika på grunnlag av valgte strukturparametre.

(De resultater som antydes i dette punkt, finnes nærmere utviklet i Universitetets Økonomiske Institutt's publikasjon nr. 3: "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economic", av professor Frisch).

Som nevnt er det mulig å bestemme eksakt matematisk de karakteristiske koeffisienter for komponentene til x , y og z . Disse koeffisienter (A , α osv.) blir da uttrykt ved strukturparametrene m , μ , λ osv. For å bestemme komponentenes karakteristika numerisk må vi derfor først gjøre visse anslag over hvilke størrelser strukturparametrene kan tenkes å ha i et moderne samfund.

La oss først betrakte konstanten ε . Den uttrykker den tid som medgår til fullførelse av store industrielle anlegg, jernbaneanlegg osv, herunder medregnet den tid som går med til planleggelsen av arbeidet. Det siste kan ofte ta like så lang tid som selve arbeidet, eller enda mere. La oss anta at arbeidet fordeler sig utover konstruksjonstiden på en slik måte at det gjennomsnittlig utføres ca. 3 år etter igangsettelsen. Hvis arbeidet fordeler sig nogenlunde jevnt utover konstruksjonstiden, får vi da $\varepsilon =$ ca. 6 år.

La oss videre sette $\mu = 10$, d.v.s. at den totale kapitalbeholdning er 10 ganger så stor som den årlige produksjon. (Tallet er kanskje vel stort, for de fleste industrilend vilde kanskje 5 vært et riktigere anslag. Som vi skal se spiller imidlertid denne konstant ikke synderlig rolle for de periodelengder man finner.). La oss videre sette $m = 0.5$, hvilket betyr at den totale direkte og indirekte kapitalslitning pr. år er halvparten av nasjonalinntekten eller 20 pct. av kapitalbeholdningen. Konstantene λ , r og s er vanskelige å anslå. Men det viser sig at heller ikke de i synderlig grad påvirker det viktigste karakteristikum for komponentene, nemlig periodelengden. Det har derfor mindre

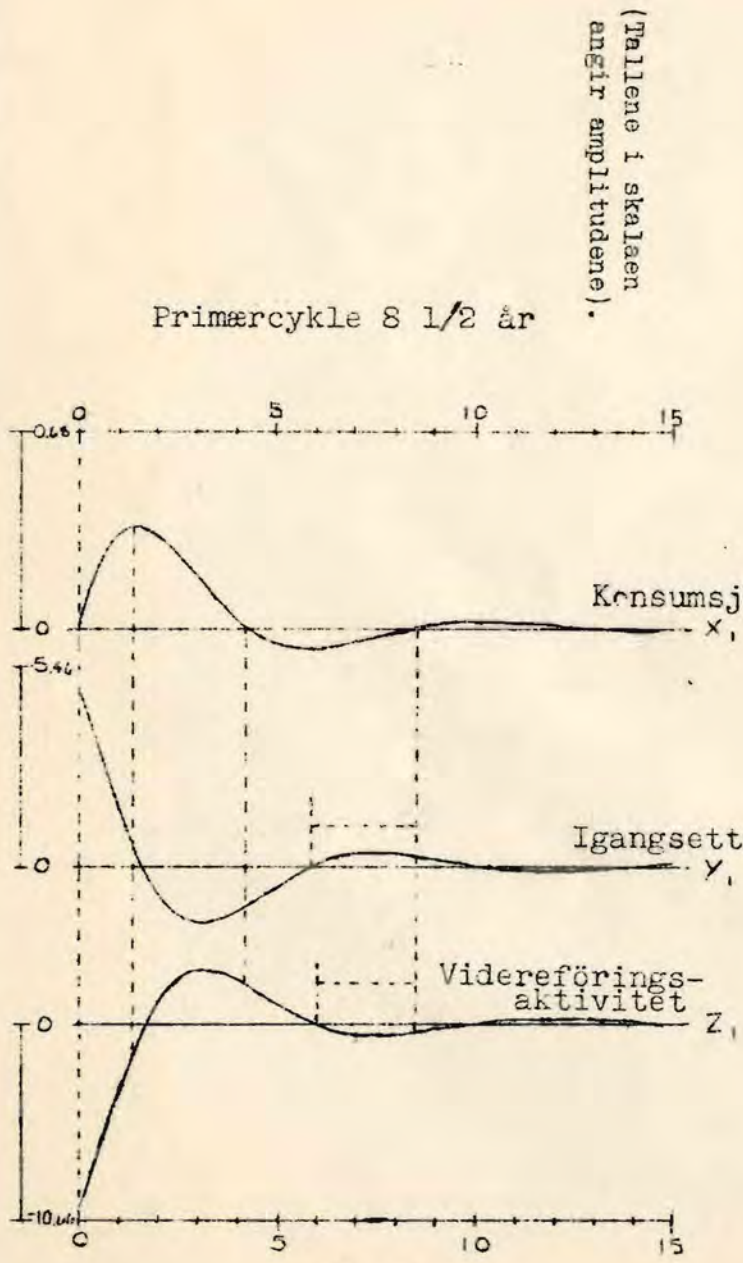


Fig. 2

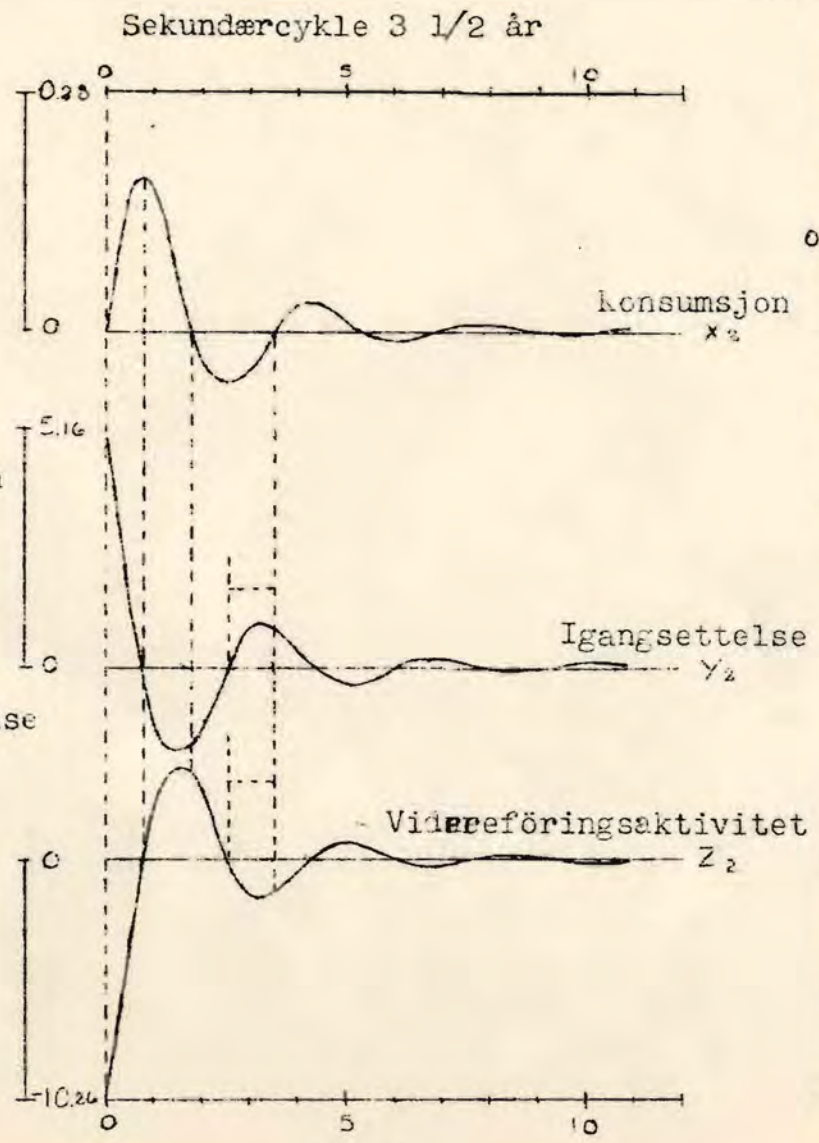


Fig. 3

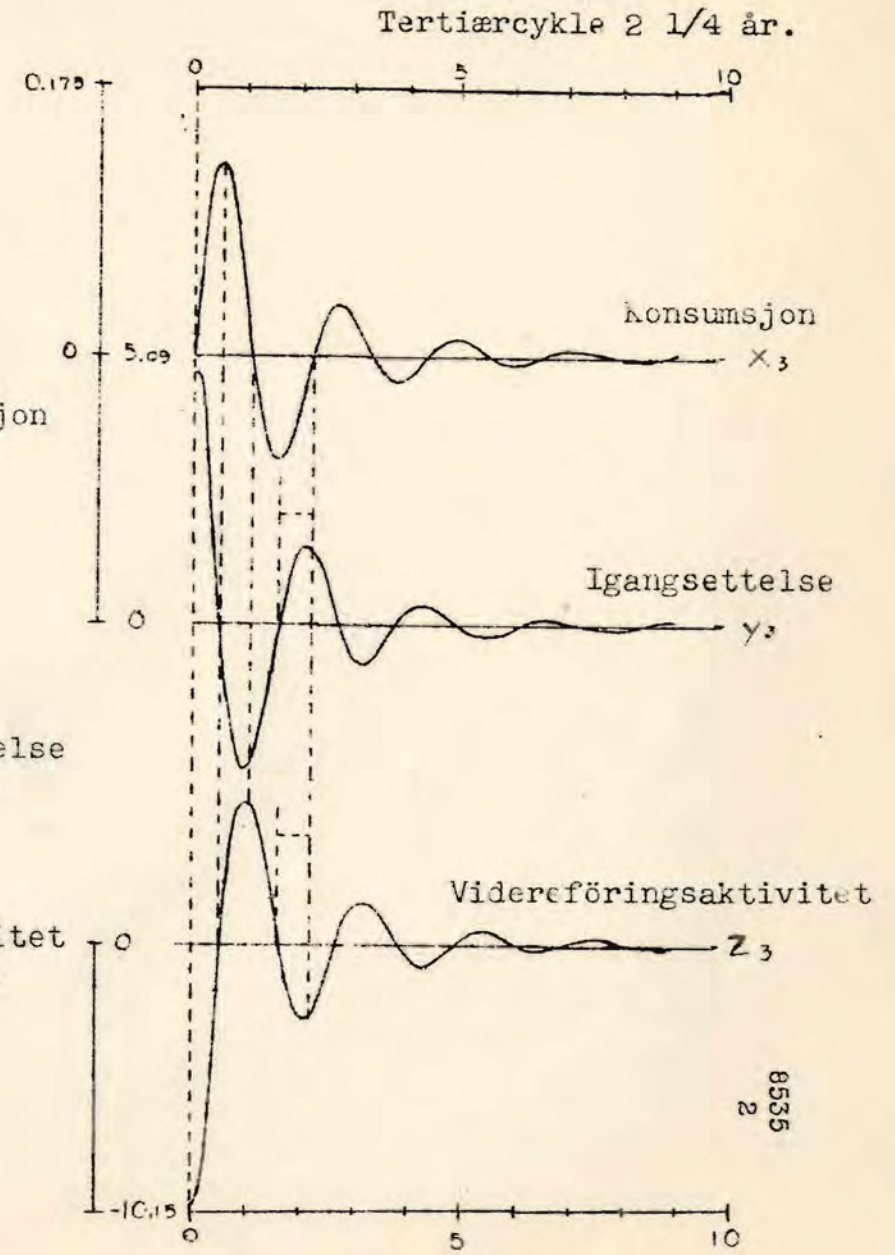


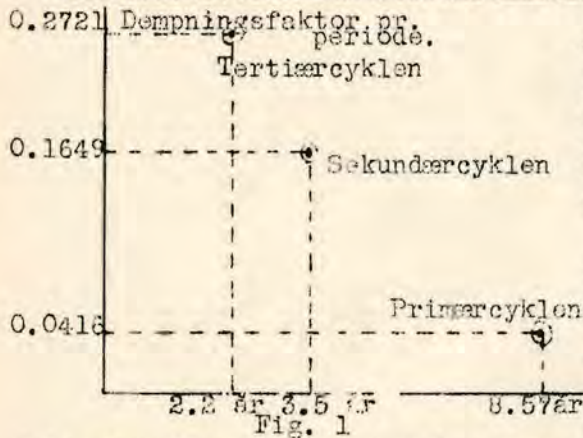
Fig. 4

betydning hvordan de velges. La oss sette $\lambda = 0.05$, $r = 2$, $s = 1$.

Ved å gjøre disse forutsetninger om strukturparametrene, får vi følgende cycliske karakteristika, (som altså er uavhengige av hvilken av de tre variable x , y og z som betraktes):

Tabell 1.

	Primærcyklen x_{1t}, y_{1t}, z_{1t}	Sekundærcyklen x_{2t}, y_{2t}, z_{2t}	Tertiærcyklen x_{3t}, y_{3t}, z_{3t}
1. Periodelengde p	8.57 år	3.50 år	2.20 år.
2. Dempningsfaktor pr. periode	0.0416	0.1649	0.2721



At dempningsfaktoren er 0.27 betyr at ordinaten i løpet av en periode synker ned til 27 procent av hvad den var. Resultatet 2 i tabellen er gjengitt grafisk i fig. 1. Vi ser at dempningsfaktoren avtar eftersom vi kommer over til lengere cykler.

Det interessante ved de løsninger som er angitt i tabell 1 er at de fremkomne cykler på det nærmeste er de samme som de mest fremtredende bølgebevegelser i faktisk observerte data. Primærcyklen på 8.5 år er den velkjente lange konjunkturbølge som vi finner så fremtredende i data fra det 19. årh.

Sekundærcyklen på ca. 3,5 år tilsvarer den korte konjunkturbølge som vi særlig merker i data fra det 20. årh. Det er også mulig at tertiærcyklen på 2,2 år ved et nærmere studium kan gjenfinnes i de statistiske data.

Formen på de komponenter som fremkommer ved løsningen av dette teoretiske skjema er angitt i fig. 2, 3 og 4. Mens periodelengden og dempningen er felles for x , y og z , er som det fremgår av figurene amplituden og fasen forskjellig for de forskjellige variable. Sammenlign f. eks. i fig. 4 at y passerer sitt maksimum omtrent der hvor x har sin største stigningshastighet. (Se også fig. 1 i 8512).

Den lange bølge på ca. 50 år, som blev nevnt i innledningen, viser sig ikke ved denne teoretiske løsning. Forklaringen herpå skal vi gi i neste punkt.

8536. Kumulantproblemet. Systemet vedlikeholdt av tilfeldige støt. 50-årscyklen som en kumulert-cykle.

De cykler som blir løsningen av vårt teoretiske system, viser en systematisk tendens til dempning som ikke gjenfinnes i de faktisk observerte økonomiske data. De faktisk observerte konjunkturcykler viser jo nettop at bevegelsen vedlikeholdes. (Jfr. 8504.2 fig. 4). Forklaringen til vedlikeholdet kan gis på lignende måte som den der blev antydnet ved det mekaniske eksempel i 8504. Vi skal ganske kort rekapitulere den der givne forklaring.

Hvis vi har en pendel som svinger under friksjon, vil tidsformen på den bevegelse som pendelen får på grunn av et enkelt initialstøt bli en dempet cykle. (Se fig. 8504.6). Hvis vi derimot tenker oss at pendelen påvirkes av en strøm av tilfeldige støt e_1, e_2, \dots , vil bevegelsen vedlikeholdes, og vi får som tidsform en cykle hvis periodelengde blir omtrent lik den periodelengde som fremkommer når pendelen svinger fritt. (Se 8504, fig. 8). Ordinaten på tidspunktet t i denne tidskurve er bestemt ved å kumulere virkningen av de forangående støt. Det å kumulere virkningen av støtene er, som vist i 8504, ikke noget annet enn å ta et bevegelig gjennomsnitt på rekken av de tilfeldige støt, idet man som vektorer i gjennomsnittet bruker den dempede pendelkurve snudd baklengs. (Se fig. 8504.7)

Det økonomisk-teoretiske system som vi har utviklet i denne paragraf, kan - for så vidt den rent teoretiske behandling angår - sammenlignes med et pendelsystem som ikke tilføres ny energi. Bevegelsen vil dø ut. Men la oss nu, i analogi med det mekaniske pendel eksempel, tenke oss at vårt økonomiske system påvirkes av en strøm av tilfeldige støt. Med tilfeldige støt mener vi en hel rekke tilfeldige ting som skjer i det økonomiske liv, og som bevirker at de struktur-betingelser vi har pålagt systemet, ikke alltid er nøiaktig oppfylt. Det kan f. eks. være en ny oppfinnelse som bevirker endringer i igangsettelsen y , tilfeldige hen-

dels som bevirker endringer i konsumsjonen x , o.s.v. Strukturbetingelsene uttrykker jo bare det typiske, det som gjennomsnittlig vil skje, driftsherrenes gjennomsnittlige reaksjonsmåte o.s.v. De tilfeldige støt er nettop avvikelser fra dette typiske.

Hvorledes vil tidsformen bli når vi tar hensyn til disse tilfeldige støt? Dette er kumulertproblemet.

Det er klart at kumuleringen her må bli mere komplisert enn ved det enkle pendeleksempel. Vi får jo nu tre variable, nemlig x , y og z , og hver variabel består av en rekke komponenter $x_{ot}, x_{1t}, \dots, y_{ot}, y_{1t}, \dots$, og z_{ot}, z_{1t}, \dots

Vi skal her gjøre den forenkende forutsetning at der ikke skjer noen tilfeldige forstyrrelser i videreføringsaktiviteten z , men bare i konsumsjonen x og igangsettelsen y . z tenkes altså teknisk bestemt ved den igangsettelse som fant sted på foranliggende tidspunkter. La ξ_1, ξ_2, \dots være de støt som rammer konsumsjonen og η_1, η_2, \dots de støt som påvirker igangsettelsen.

For å se hvorledes støtene på disse to variable virker, la oss først et øieblikk se hvad utviklingen av disse to variable vilde bli om systemet

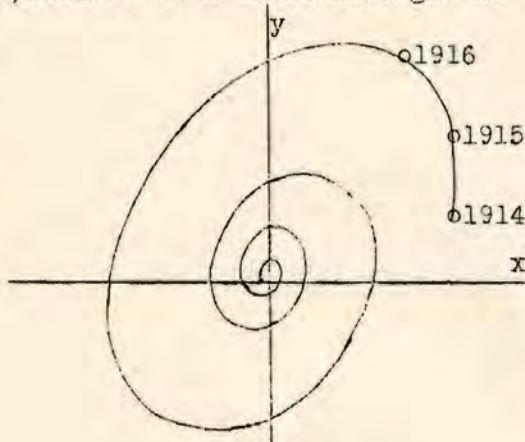


Fig. 1

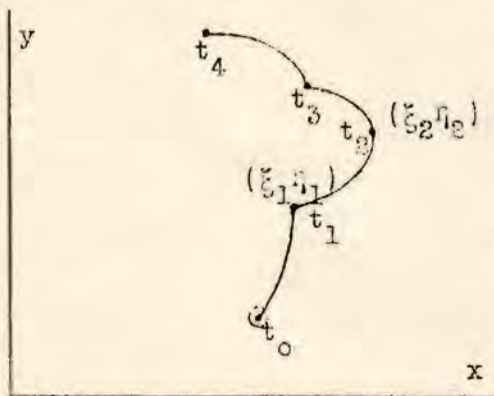


Fig. 2

fikk gå uforstyrret. Vi tegner da den historiske kurve (fasekurven i x, y -diagrammet). Se fig. 1. Hvis bevegelsen ikke var dempet, vilde den historiske kurve bli en ellipse. På grunn av dempingen blir utslagene stadig mindre så vi får en spiral som ender i origo. Dette gjelder for det tilfelle da x og y kun består av 1 komponent hver. Vi kan også fremstille forholdet ved flere komponenter, men det er unødvendig for vårt formål nu. Sett at vi starter i et punkt t_0 (Se fig. 3). Hvis der ikke inntreffer noen tilfeldige begivenheter, før i tidspunktet t_1 , vil (x, y) følge en jevn utvikling som antydnet i fig. 2. Hvis nu på tidspunktet t_1 , x får et tilfeldig støt ξ_1 og y et tilfeldig støt η_1 , vil den jevne utvikling brytes, d.v.s. tangentens retning forandres plutselig, men ordinaten selv varierer kontinuerlig.

Bevegelsen fortsetter så efter systemets iboende lov inntil punktet t_2 da et nytt støt (ξ_2, η_2) igjen bryter den jevne utvikling o.s.v. (Se fig. 2). Da vår teori er determinert og dynamisk, kan vi ut fra et gitt tidspunkt f. eks. t_0 regne oss til hvad (x, y) blir mellom t_0 og t_1 , mellom t_1 og t_2 o.s.v. Følgelig kan vi også - likesom ved analogien med pendelen - regne ut hvad systemets stilling vil bli efter en hel rekke støt. Ved å gjennomføre denne

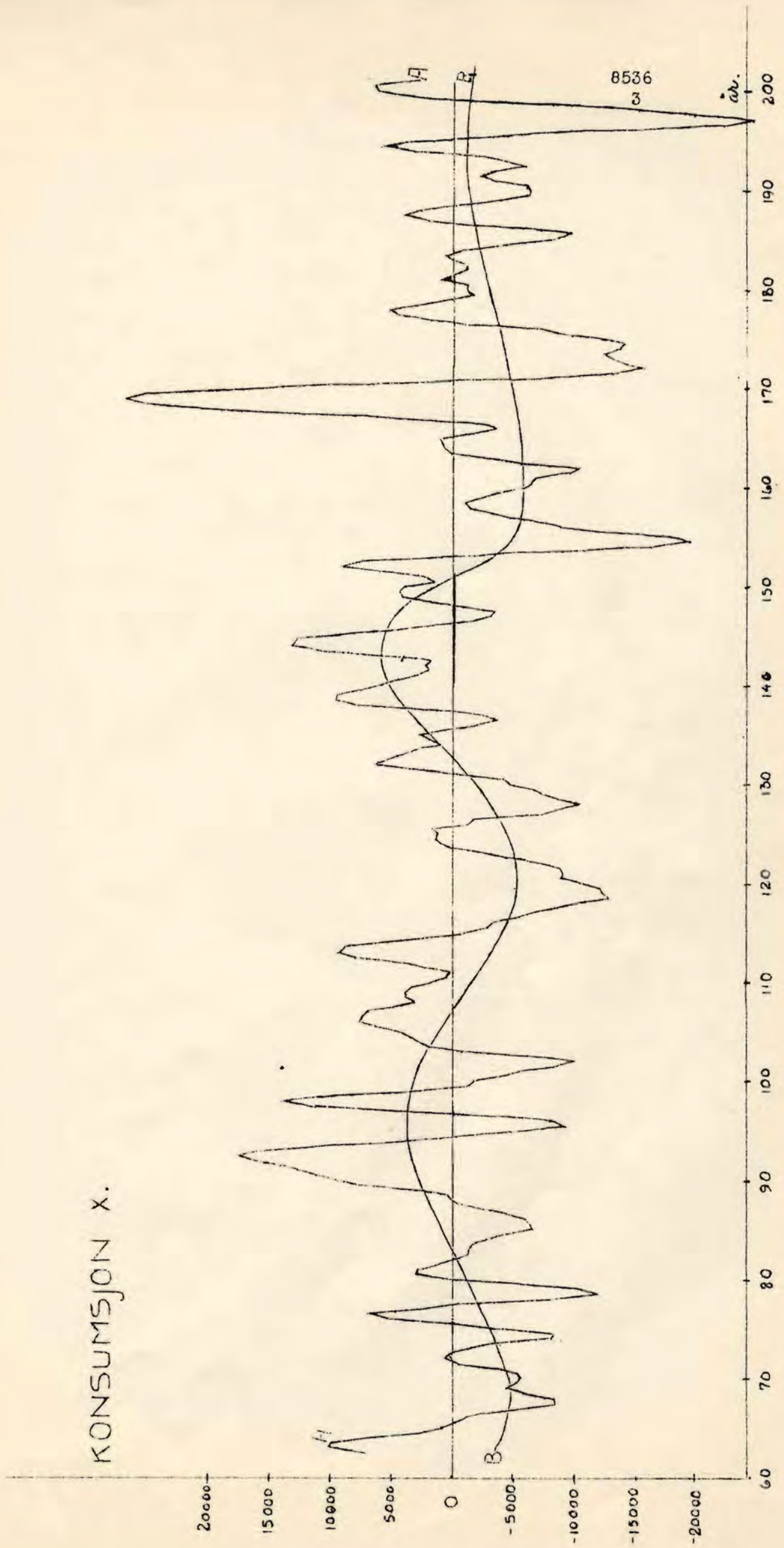
regning viser det sig at tidsformen på x , y og z blir tidskurver som fremkommer når man på de erratiske støt anvender visse bevegelige gjennomsnitt hvis vektorer er konstruert på grunnlag av de dempede komponenter i 8535 fig. 2, 3 og 4. Det matematiske apparat blir selvfølgelig her meget mere komplisert enn ved pendeleksempel i 8504. Vi skal ikke gå inn på dette i detalj, men bare anføre noen numeriske resultater. (Resultatene er utregnet på Universitetets Økonomske Institutt).

Ved utregningen blev som tilfeldige støt anvendt en erratisk variabel konstruert på grunnlag av endesiffer i uttrukne nummer i Det Norske Pengeletteri. På denne erratiske er anvendt et vekstsystem sammensatt av de dempede cykler der er omtalt i forrige punkt. Den fremkomne tidskurve for konsumsjonen x er angitt i fig. 3, (kurve A).

Formen på denne kurve er ganske bemerkelsesverdig. For det første finner vi igjen komponentene på 8.5 og 3.5 år. Særlig 8.5-årscyklen er tydelig. Og der er nu ingen systematisk tendens til demping. 3.5-årscyklen er forøvrig mere fremtredende i igangsettelsen y , (her ikke tegnet), enn i konsumsjonen x .

Resultatet i fig. 3 viser også en annen eiendommelighet: Vi har nu fått inn en helt ny bølge, nemlig en på ca. 50 år. Den optrer som en underliggende bevegelse angitt ved kurven B i fig. 3. Denne cykle fremgår ikke umiddelbart av selve den teoretiske løsning. Den er en cykle som først fremkommer som resultat av selve kumuleringsprosessen av de erratiske støt.

KONSUMSJON X.



Hvis man anvender et bevegelig gjennomsnitt på en erratisk variabel, vil der i det fremkomne resultat ofte kunne forekomme cykler, hvis eksistens man ikke umiddelbart kan slutte sig til bare ved å se på formen av vektene. Således vil der f. eks. ved anvendelsen av et uvalgt bevegelig gjennomsnitt på erratiske data fremkomme flere cykliske komponenter hvorav de mest fremtredende er en hvis periodelengde er ca 3,2 ganger lengden av det bevegelige gjennomsnitt, en annen med periode lik ca. 0,7 ganger gjennomsnittets lengde o.s.v. Det er på lignende måte at femti-årscyklen i fig. 3 er fremkommet. 50-årscyklen er altså i dette tilfelle en kumulert cykle.

Det viser sig at det er støtene i konsumsjonen som er de viktigste i vedlikeholdsprosessen, d.v.s. støt mot konsumsjonen x skaper en meget større amplitude i det endelige resultat enn støt mot igangsettelsen y. Forklaringen på dette ligger i selve formen på strukturbetingelsene, særlig i ligningen $y = mx + \mu x$. I denne ligning inngår nemlig veksthastigheten x, og støtene virker nettop i første rekke til en forandring i veksthastigheten.

Dette belyser på en interessant måte det riktige i Clerks påstand om at konsumsjonen er det primære, og at y er avhengig av x. (Se 8512).

8537. Mulighetene for en reguleringspolitikk. Oljebremmens prinsipp.

Når det blir spørsmål om å øve en regulerende innflydelse på konjunktur-svingningene, kan økonomene ha adskillig å lære av ingeniørene. En rekke av de rent tekniske reguleringsproblemer som ingeniørene arbeider med, viser ofte - fra den rent formelt teoretiske side - stor likhet med de økonomiske reguleringsproblemer. Ingeniørene har utformet metoder for bekjempelse av de mer eller mindre voldsomme svingninger som kan opstå i maskiner under deres gang. Lignende prinsipper vil ofte kunne anvendes for økonomiske reguleringsformål. Det er særlig ett av disse prinsipper vi her vil legge vekt på, nemlig oljebremmens prinsipp.



Fig. 1.

men grunnprinsippet er alltid det samme. Det er oljebremmens prinsipp: Man må skape et bremsningsselement som stiger proporsjonalt med hastigheten i bevegelsen.

La oss igjen ta eksemplet med pendelen. Ligningen for en pendel med friksjon ser slik ut

$$(1) \quad \ddot{y} + 2\beta \dot{y} + (\alpha^2 + \beta^2) y = 0$$

hvor \ddot{y} er accelerasjonen, β dempningsekspONENTEN og \dot{y} hastigheten. α^2 er en parameter som karakteriserer tyngdekraftens virkning på bevegelsen. Hvis vi ikke har nogen dempningsfaktor, reducerer ligningen sig til

$$(2) \quad \ddot{y} = -\alpha^2 y$$

I dette spesielle tilfelle er kraften alltid rettet inn mot likevektspunktet. Ligningen uttrykker at kraften (d.v.s. accelerasjonen y) er proporsjonal med utslaget y med motsatt fortegn. Vi regner y positiv på høire side av likevektspunktet og negativ på venstre side. I ligning (1) er leddet med y kommet med, dette er nettop friksjonsleddet, friksjonen er proporsjonal med hastigheten v.

Løsningen av ligning (1) er nettop tidsfunksjonen

$$(3) \quad y = A \cdot e^{-\beta t} \sin(\alpha + \alpha t)$$

altså en dempet svingning som antydnet i fig. 2, 3 og 4 i 8535. Ved å gjøre β meget stor får vi istand en sterk demping (se fig. 2).

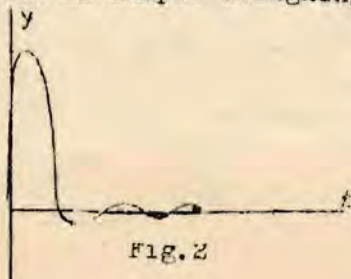


Fig. 2

Dette vil ha en avgjørende innflydelse på amplituden av de bevegelser som vedlikeholdes av tilfeldige støt. Det kan bevises at hvis man på erratiske data anvender et bevegelig gjennomsnitt hvis vekter er en sterkt dempet cykle, altså et vektsystem som ligner mere fig. 8535.2 enn fig. 8535.4, så vil den fremkomne tidskurve få liten amplitude. Det praktiske regule-

ringsproblem for økonomiske svingninger av den type vi her drøfter, består derfor i å ordne sig på en sådan måte at der fremkommer en meget sterk demping, (en stor β).

Som nevnt i 8535 er β bestemt ved størrelsen på strukturparametrene m , μ , λ o.s.v. Reguleringsproblemet kan derfor føres tilbake til det å forandre strukturparametrene m , μ , λ o.s.v. på en slik måte at dempningseksponentene β blir meget store.

På Universitetets Økonomiske Institutt er utført beregninger over hvorledes strukturparametrene bør forandres for å få en stor demping. Det viser sig f. eks. at en forandring av slitningskoeffisienten m , (f. eks. en forutsetning om at kapitalgjenstandene er mere langvarige), i meget liten grad påvirker såvel p som β . Velger man f. eks. $\lambda = 0.1$, $s = 1$, $r = 2$, $\mu = 5$, men varierer m , finner man for første komponent i x , y og z

Tabell 1

m	Periode p	Dempningsfaktor pr. periode
0.7	8.53	0.042
0.5	8.43	0.043
0.0	8.20	0.048

At dempningsfaktoren er 0.042 vil si at amplituden i løpet av 8.53 år synker ned til 42 pct. av sin opprinnelige størrelse. Tabell 1 viser at selv om man går til den yderlighet å forutsette $m = 0$, d.v.s. ingen kapitalslitning, blir virkningen på dempningsfaktoren næsten umerkelig. Det samme gjelder periodelengden.

Dette viser at vi bør forsøke med variasjoner i en annen av parametrene. La oss holde s, r og μ konstant som ovenfor og sette $m = 0.5$, men variere λ . λ uttrykker den bremsningseffekt som fremkommer på grunn av de monetære institusjoners manglende elasticitet. Setter vi f. eks. $\lambda = 0.001$ (istedetfor som i ovenstående eksempel $\lambda = 0.1$), får vi en dempningsfaktor pr. periode for primærkomponentene som er 0.000002, mens periodelengden blir 10.6 år. D.v.s. periodelengden er fremdeles av samme størrelsesorden, men dempingen er enorm. Etter 1 periode er bare 2 milliontedel av amplituden tilbake. Under de her valgte betingelser vilde altså en forandring av de monetære institusjoner kunne frembringe en demping som praktisk talt vilde eliminere denne cykle.

XXXXXX

854. DISPROPORSJONALITETEN MELLUM DE FORSKJELLIGE PRODUKTSJONSGRENER. SKJEVFORDELING MELLUM DE ØKONOMISKE GRUPPER.

8540. Innledning. Den harmoniske tilpasning som betingelse for full kapasitetsutnyttelse.

I den økonomiske teori får vi ofte å operere med forskjellige betingelser som nødvendigvis må være avpasset etter hverandre på en teknisk og økonomisk bestemt måte for å gi full utnyttelse av de anvendte hjelpemidler. Det aller simpleste eksempel på dette har man i en produktivitetslov hvor der inngår to limitasjonsfaktorer. (Se herom Tekniske og Økonomiske Produktivitetslover side 624.1 ff.) Det kan f. eks. være to kjemiske stoffer som må blandes i et ganske bestemt forhold for å gi det ønskede resultat. Hvis ett av stoffene er tilstede i for stor mengde, vil den overskytende del bli unyttig eller kanskje endog skade produksjonen. Eller la oss ta fabrikasjon ved hjelp av transportbånd. Hvis arbeidsstyrken ikke er fordelt riktig etter arbeidsmengden langs båndet, blir det arbeidsløst på de punkter hvor der er for meget arbeidskraft.

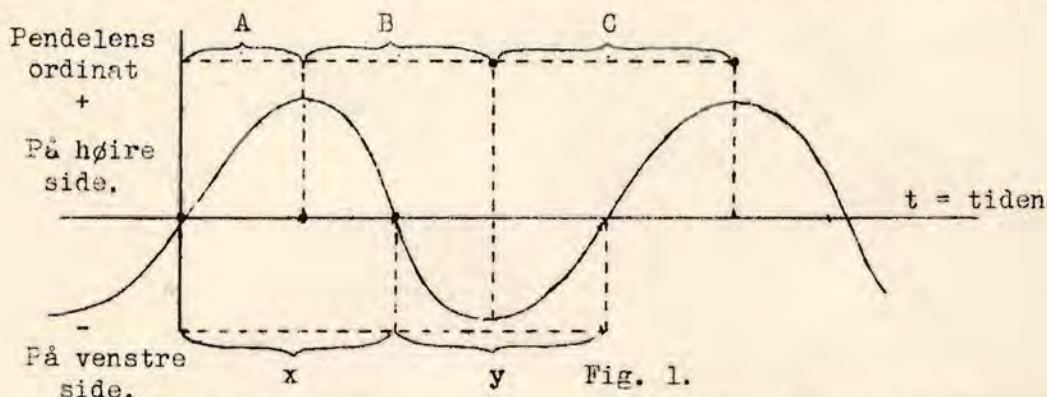
Dette er et par eksempler på disproporsjonalitetsfenomener i det økonomiske liv. Hvis produktivkreftene kombineres uharmonisk, blir utnyttelsen ufullstendig, vi får tongang på grunn av feilfordeling. Og ofte vil ikke bare det ene element som er feilplassert gå i fløyten. Det kan få konsekvenser også for de øvrige elementer, slik at tapet multipliseres. Når der er mange faktorer, oppstår der mange muligheter for indirekte skapning av tongang.

Mange konjunkturteoretikere har oppfattet disse disproporsjonaliteter som det viktigste moment i konjunkturproblemet. Dette er neppe riktig, i ethvert fall ikke for de store konjunktursvingninger. Men selv om feilfordelingsfenomene ikke er hovedsaken, representerer de dog et viktig element, slik at de hører

hjemme i en makrodynamisk analyse. At disproporsjonalitetsprinsippet ikke er nok til å forklare de store konjunkturbevegelser viser jo verdenssituasjonen idag tydelig. Forholdet er jo nu ikke at der enkelte steder er for stor aktivitet og andre steder for liten, men så godt som all aktivitet er gått ned. Det er den samtidige og parallelle nedgang i nærsagt all virksomhet som har gjort krisen til det store økonomiske og sociale problem den er.

Anm. til 8537. (tilføjet efter diskusjon).

Uttrykket "når pendelen går mot høire, da å forsøke å trykke den mot venstre og omvendt" er uheldig og kan misforstås. Pointet er at den regulerende kraft ikke skal gjøres avhengig av hvilken side pendelen befinner sig på, men av den retning hvori bevegelsen går. Når pendelen er på høire side og er på vei utover, altså fjerner sig fra likevektsstillingen, skal reguleringskraften virke mot venstre, men når omslaget er kommet, altså når pendelen har begynt å bevege sig mot venstre, skal reguleringskraften virke mot høire, selv om pendelen nu fremdeles befinner sig til høire for sin likevektsstilling. I vedstående fig. 1 skal altså reguleringskraften være rettet mot venstre i intervallene A



og C og mot høire i intervallet B. Det er ikke riktig å rette kraften alltid mot likevektsstillingen, altså mot venstre i intervallet x og mot høire i intervallet y. Hvis dette siste gjøres, vil bare svingningene bli voldsommere.

Vi kan illustrere en slik feilregulering idet vi tenker oss at der som et forsøk på "regulering" anbringes en spiralfjær som antydnet i fig. 2. Denne vil nettop virke mot venstre når pendelen er på høire side og omvendt. Men det innsees umiddelbart at en slik anordning bare gjør svingningene voldsommere og derfor bare øker vanskelighetene. Hvis pendelen - selv med en slik mekanisme - tilslutt faller til ro, er det ikke på grunn av spiralfjæren, men tiltross for denne. Den demping som er tilstede skyldes andre ting nemlig friksjonen, altså en kraft som ikke avhenger av hvor pendelen er, men i hvilken retning den beveger sig. Denne kraft er rettet utad når pendelen går innover og omvendt. (Sammenlign intervallene A, B, C i fig. 1). Friksjonen kan altså opfattes som en kraft som alltid er rettet mot bevegelsen. Det er nettop dette som ligger i at friksjonen er proporsjonal med hastigheten. Spiralfjæren i ovennevnte eksempel er derimot en kraft som er proporsjonal med utslaget.

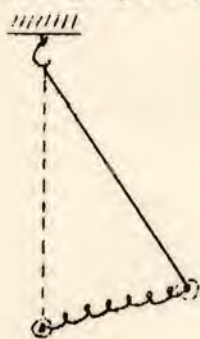


Fig. 2

er proporsjonal med hastigheten. Spiralfjæren i ovennevnte eksempel er derimot en kraft som er proporsjonal med utslaget.

8541. Cirkulasjonsbrudd i en byttekrets.

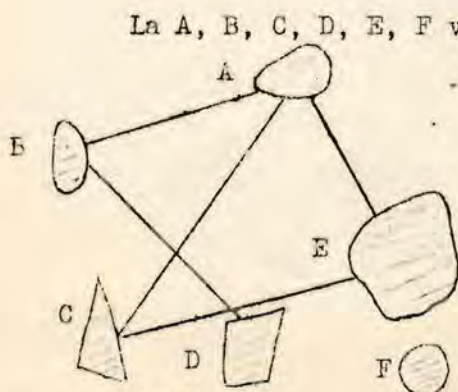


Fig. 1

La A, B, C, D, E, F være en krets av enkeltpersoner, enkelte bedrifter, grupper eller land, som står i økonomisk samkvem med hverandre. Utvekslingsforholdet kan f. eks. være som antydnet i fig. 1. F representerer en "eremitt", som ikke står i nogen forbindelse med utenverdenen, mens de øvrige i større eller mindre grad er økonomisk avhengig av hverandre.

Hvis der nu inntreer en begivenhet som rammer en enkelt gruppe, vil dette få konsekvenser for hele systemet. Virkningen forplanter sig på en viss måte som er avhengig av elementets posisjon i systemet. Et par ekstreme tilfelle vil illustrere arten av den forplantning det kan

bli tale om.

La oss først anta at "lynet" slår ned i "eremitten" F. Dette er naturligvis en beklagelig hendelse for ham selv, men det vil ikke få nogen konsekvenser for den totale vareutveksling i systemet. Den samlede økonomiske virksomhet i systemet lider kun det direkte tap som ødeleggelse av F representerer. I dette ekstreme tilfelle, "eremitt"-tilfellet, fremkommer altså ingen indirekte virkninger av den inntrufne begivenhet.

La oss se på det motsatte ekstreme tilfelle: En lukkede byttecirkel.

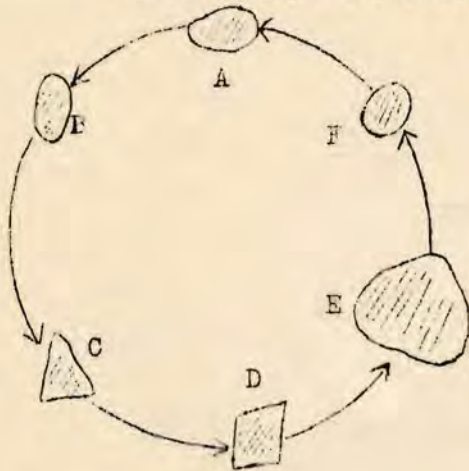


Fig. 2.

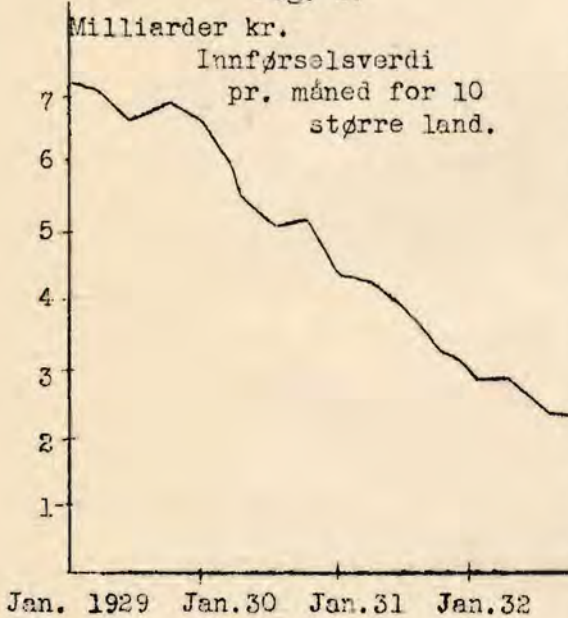


Fig. 3

Det kan skjematisk fremstilles som i fig. 2. B kjøper kun av A, C kjøper kun av B osv. Hvis nu lynet slår ned i F, får dette ikke bare konsekvenser for F, men hele byttekretsen utslettes. Når F blir borte, får jo nemlig E ingen kunde, og derfor ingen inntekt hvormed D's varer kan betales. Følgelig opphører D's salg og likeså D's kjøp fra C osv. Den indirekte virkning blir altså her langt større enn den direkte virkning på F. Hvis der også eksisterer visse andre forbindelser mellom gruppene, eller hvis F kun delvis får sin virksomhet ødelagt, vil naturligvis total-virkningen ikke bli så sterk som i dette ekstreme tilfelle. Denne byttekrets hvor der eksisterer ikke bare en cirkulær forbindelse, men også visse kryssforbindelser, karakteriserer f. eks. den internasjonale handel. Derfor vil den ikke bli helt utslettet ved en disproportjonalitet, men vil dog lide et sterkt skår. Den store nedgang i verdenshandelen efter 1929 er gjengitt i fig. 3.

Som et eksempel på det tilfelle da der eksisterer kryssforbindelser la oss betrakte 3 byttende personer: en skomaker, en skredder og en bonde. Vi tenker oss at byttevirksomheten har funnet sig et stasjonært og vel avbalansert leie. Vi kan stille op en fullstendig byttetabell for de tre personer. (Se tabell 1) Tabell 1 viser en komplett efterspørsels-tilbudsbalanse, idet hver person kjøper like meget som han selger. Dette er betingelsen for stasjonære forhold. Vi har dessuten gjort den forutsetning at ingen av personene driver handel med sig selv.

Tabell 1.

Personer	Kjøper fra			Ialt
	Skomaker	Skredder	Bonde	
Skomaker	0	150	100	250
Skredder	40	0	280	320
Bonde	210	170	0	380
Ialt	250	320	380	950

Sett nu at der inntreer en begivenhet som gjør at skredderen går helt ut av byttekretsen. Da blir det ingen tall i den linje som svarer til skredderens innkjøp og i den kolonne som svarer til hans salg. Vi får altså en tabell som tabell 2. Tabellens indre balanse er nu brutt. Bonden vil kjøpe 210, men kan selge bare 100. For å få disproportjonalitetsvirkningen frem i sin renhet bortser vi fra det tilfelle da systemet så å si læger sig selv derved at der oppstår større samkvem mellom bonden og skomakeren. Hvis altså hverken bonden eller skomakeren skal øke sin handel med den annen part, må der - for at der skal bli istandbragt indre overensstemmelse i byttecirkelen - skje en tilpasning nedad. Vi må få

Tabell 2.

Personer	Kjøper fra			Ialt.
	Skomaker	Skredder	Bonde	
Skomaker	0		100	100
Skredder				
Bonde	210		0	210
Ialt.	210			

en situasjon hvor bonden bare kjøper 100 av skomakeren, og omvendt. Byttetabellen blir da som angitt i tabell 3. Det at skredderen går ut av markedet bevirker

Tabell 3.

Personer	Kjøper fra		Ialt
	Skomaker	Bonde	
Skomaker	0	100	100
Bonde	100	0	100
Ialt	100	100	200

altså for det første et direkte tap i total omsetning = $950 - 200 = 750$ og dessuten et indirekte tap i omsetningen mellom bonden og skomakeren = $310 - 200 = 110$. Nettop fordi skredderen var en stor avtager av landbruksprodukter, kunde bonden kjøpe 210 av skomakeren, skjønt han til denne kun solgte 100. Det er denne fordel som bortfaller idet skredderen forsvinner.

Dette eksempel kan generaliseres til tilfellet n byttende personer. La a_{ij} være det kvantum som person nr. i kjøper av nr. j . Den fullstendige byttetabell blir da

Person nr.	Kjøper av nr.					Ialt	
	1	2	j		n
1	a_{11}	a_{12}	a_{1j}	a_{1n}	a_{10}
2	a_{21}	a_{22}	a_{2j}	a_{2n}	a_{20}
.
i	a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}	a_{in}	a_{i0}
.
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{nn}	a_{n0}
Ialt	a_{01}	a_{02}	a_{0j}	a_{0n}	a_{00}

idet a_{i0} betegner nr. i 's totale innkjøp, altså

$$(2) \quad a_{i0} = \sum_k a_{ik}$$

a_{0j} betegner nr. j 's totale salg, altså

$$(3) \quad a_{0j} = \sum_k a_{kj}$$

og a_{00} den totale omsetning i markedet, altså

$$(4) \quad a_{00} = \sum_i \sum_j a_{ij}$$

Betingelsen for indre overensstemmelse i tabellen er at enhver kjøper nettop

så meget som han selger, altså

$$(5) \quad a_{io} = a_{oi}$$

Som regel kan man gjøre den forutsetning at ingen av personene selger noget til sig selv, altså har man

$$(6) \quad a_{ii} = 0$$

Dette er imidlertid en forutsetning som er helt uvesentlig og ikke bidrar noget større til å forenkle problemet.

En vesentlig forutsetning er det imidlertid at tallene a_{ij} er ikke-negative.

Når man vil angripe dette generelle problem, føres man med nødvendighet til anvendelsen av determinant-teknikk. (Se herom Statistisk fordelings- og regresjonsteori, del 1.) Vi skal i neste paragraf se et eksempel på en slik anvendelse.

8542. Cirkulasjonshindringer på grunn av prisvariasjoner.

En cirkulasjonshindring kan komme istand ikke bare som et direkte cirkulasjonsbrudd, altså slik at en av partene forsvinner. En hindring oppstår i praksis hyppigere derved at en eller flere gruppers kjøpekraft svikter f. eks. på grunn av prisvariasjoner. Eksemplet med bøndenes sviktende kjøpekraft under den nuværende krise er her illustrerende. Det at landbruksproduktene blir billige skulde jo i og for sig være en fordel for industriarbeiderne. Men arbeidernes lønn er avhengig av bedriftenes lønnsomhet som igjen er avhengig av at bøndene har noget å kjøpe for. På denne måte kan der oppstå en cirkulasjonshindring som kan volde en svær tomgang, direkte eller indirekte, for alle parter. Lignende blir forholdet mellom industriland og råvareproduserende land etc.

For å illustrere denne tomgangsskapning på grunn av prisvariasjoner la oss først ta et enkelt eksempel med to byttende personer, person nr. 1 som selger til nr. 2 a fysiske kvanta til pris p, og person nr. 2 som selger til nr. 1 b fysiske kvanta til pris q. Betingelsen for at begge skal kunne opprettholde sitt husholdningsbudgett er, (når handelen kun foregår mellom de to)

$$(1) \quad p \cdot a = q \cdot b \quad (\text{husholdningsbalansen}).$$

Denne ligning uttrykker en lineær forbindelse mellom a og b. Dens grafiske bilde er en rett linje som går gjennom origo og hvis helningsbratthet er $\frac{p}{q}$.

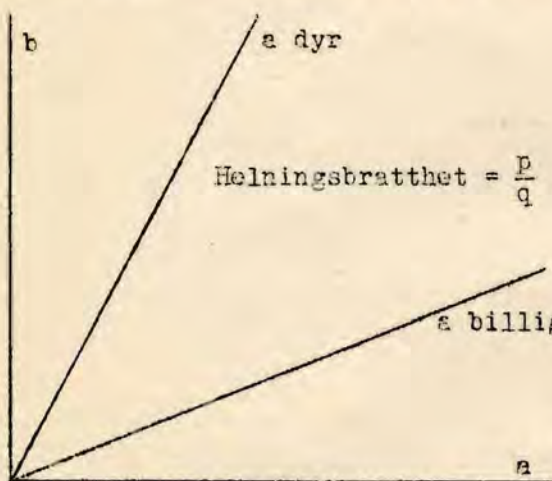


Fig. 1

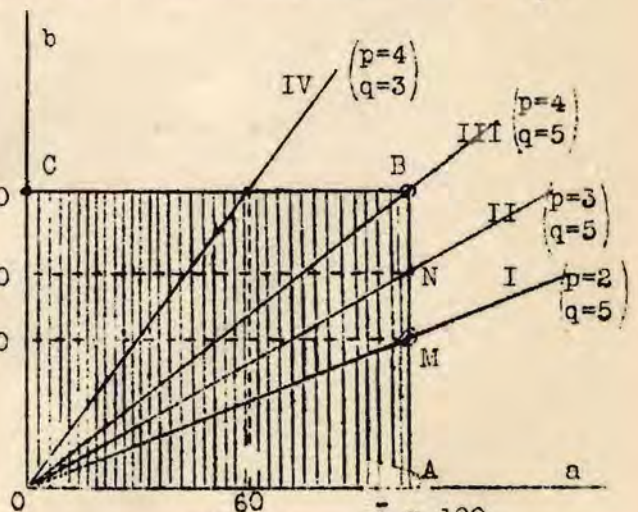


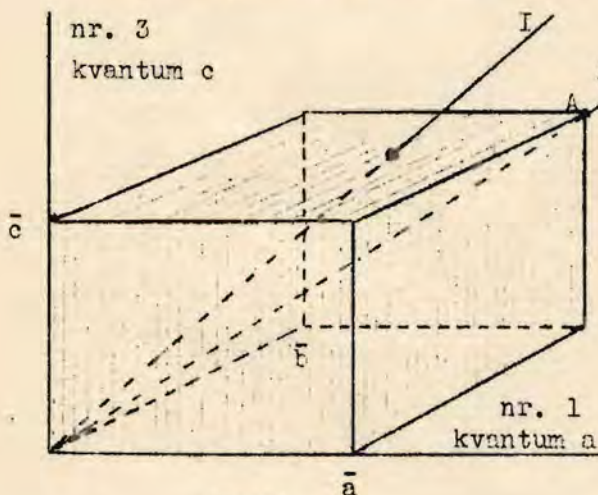
Fig. 2

(Byttelinjen. Se fig. 1). Er linjen slak, betyr det at a er billig, er linjen bratt, betyr det at a er dyr. Omvendt for b. La \bar{a} være person nr. 1's produksjonskapasitet og \bar{b} person nr. 2's kapasitet. Vi vil undersøke hvorledes den totale kapasitetsutnyttelse avhenger av prisene. La oss eksempelvis sette $\bar{a} = 100$, $\bar{b} = 80$ fysiske enheter. Kapasiteten kan fremstilles som et rektangel, OABC i (a,b)-diagrammet. (Se fig. 2) Et kvantum av a og b som er representert ved et punkt innenfor dette rektangel kan altså realiseres, derimot ikke et kvantum av a og b som er representert ved et punkt utenfor rektanlet. Sett nu at p = 2 kr. q = 5 kr. Iflg. ligning (1) må de byttet foregå langs strålen (byttelinjen) I i fig. 2. Jo lenger vi kommer utover på strålen, dess større omsetning. Men utenfor kapasitetsrektanlet kan vi ikke komme, altså blir maksimum av omsetning der

hvor byttelinjen skjærer ut gjennom rektanglets høire kant, d.v.s. i punktet M. Nr. 2 får da utnyttet bare halvdelen av sin kapasitet, nemlig 40, mens nr. 1 utnytter hele sin kapasitet. Hver person omsetter da for 200 kr. Hvis nu p stiger f. eks. til $p = 3$ kr., vil byttet foregå langs strålen II i fig. 2, og det endelige byttepunkt bli N. Nr. 1 har fremdelse full kapasitetsutnyttelse, mens nr. 2 utnytter 75 pct. av sin kapasitet. Total-omsetningen blir 300 kr. for hver person. Sett nu at $p = 4$ kr. og $q = 5$ kr. Da vilde byttet foregå langs strålen III i fig. 2. Og nu blir begge kapasitet fullt utnyttet. Den maksimale omsetning for hver person blir da 400 kr. Hvis $p = 4$ kr. $q = 3$ kr. vil nr. 2 få utnyttet hele sin kapasitet, men nu er det nr. 1 som bare får utnyttet en del av sin kapasitet, nemlig 60 pct. Den totale omsetning og altså den samlede inntekt blir altså størst når prisforholdet er slikt at byttelinjen går gjennom kapasitetsrektanglets øvre høire hjørne. Betingelsen for full kapasitetsutnyttelse kan altså skrives

$$(2) \quad \frac{p}{q} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

For tre personer kan samme betraktningssmåte anvendes, men vi får da



istedetfor et kapasitetsrektangel, en kapasitets-"boks". (Se fig. 3). Byttelinjen blir nu en stråle gjennom origo i rummet (a, b, c) . En stråle f. eks. som I i fig. 3 representerer full kapasitetsutnyttelse for nr. 3 men ikke for nr. 1 og 2. Full kapasitetsutnyttelse får alle når strålen skjærer ut av "boksen" i punktet A. Spørsmålet om full kapasitetsutnyttelse er altså et spørsmål om en bestemmelse at det riktige forhold mellom vareprisene.

Vi skal spesielt studere hvorledes denne utnyttelsesgrad blir bestemt når vi har en byttekrets av n personer. For $n = 3$ blir eksempel-

Fig. 3

vis byttetabellen

Person	Kjøper fra		
	nr 1	nr. 2	nr. 3
nr. 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
nr. 2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
nr. 3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
Ialt	a_{01}	a_{02}	a_{03}

Her hvor a betyr fysiske kvanta eksisterer ikke størrelsen a_{10} . Dette vilde jo bli en sum av uensbenovnte tall, nemlig kvantum av forskjellige varer.

Vi må gjøre visse forutsetninger om hvorledes individene fordeler sin preferanse m. h. t. innkjøp av de forskjellige varer. Hvis der er gitt et sett av priser, p_1, p_2, p_3 , vil den samlede inntekt for person nr. 1, (som selger vare nr. 1), bli

$$(3) \quad r_1 = p_1 (a_{11} + a_{21} + a_{31}) = p_1 \cdot a_{01}$$

Hvorledes vil denne inntekt bli fordelt? Individet vil naturligvis søke å skaffe sig så stor behovstilfredsstillelse som mulig ved en hensiktsmessig fordeling av utgiftene til de forskjellige varer. Forutsetningen er at hele inntekten medgår til anskaffelse av de tre varer nr. 1, 2 og 3. Det beløp som person nr. 1 anvender til kjøp av vare nr. k blir $p_k \cdot a_{1k}$. Siden hans totale utgift (= total inntekt) er $p_1 \cdot a_{01}$, blir den procent-del av totalinntekten

som han anvender til vare nr. k

$$(4) \quad \lambda_{ik} = \frac{p_k \cdot a_{ik}}{p_i \cdot a_{oi}}$$

Vi gjør nu den forutsetning at disse tallene λ_{ik} er givne konstanter under de situasjoner som her skal betraktes. Disse tall vil da karakterisere individenes preferanse. Individet vil altså alltid i de her betraktede situasjoner bruke samme procent-del av inntekten til innkjøp av vare nr. k. Denne forenklede forutsetning er naturligvis til en viss grad urealistisk. Det er ikke alltid sikkert at f. eks. en fordobling av inntekten medfører et fordoblet forbruk av alle varer. (Jfr. Engels lov). Men for forholdvis små variasjoner kan forutsetningen godtas.

Hvis vi forutsetter disse procenttall λ_{ik} gitt, kan analysen av tomgangen gis på en oversiktlig måte ved bruk av determinanter. La oss skrive ligning (4) på formen

$$(5) \quad \lambda_{ik} \cdot p_i \cdot a_{oi} = p_k \cdot a_{ik} \quad (\text{hvor } k = 1, 2, 3, \text{ og } i = 1, 2, 3).$$

Ved å summere denne ligning over i, fås

$$(6) \quad \sum_i r_i \cdot \lambda_{ik} = p_k \cdot a_{ok} = r_k$$

Dette er et ligningssystem til bestemmelse av r_k . For å se dette kan vi skrive ut ligningssystemet for tre variable, (altså $k = 1, 2, 3, i = 1, 2, 3$)

$$(7) \quad \begin{aligned} r_1 \cdot \lambda_{11} + r_2 \cdot \lambda_{21} + r_3 \cdot \lambda_{31} &= r_1 \\ r_1 \cdot \lambda_{12} + r_2 \cdot \lambda_{22} + r_3 \cdot \lambda_{32} &= r_2 \\ r_1 \cdot \lambda_{13} + r_2 \cdot \lambda_{23} + r_3 \cdot \lambda_{33} &= r_3 \end{aligned}$$

eller, hvis r_k trekkes over på venstre side

$$(8) \quad \begin{aligned} r_1 \cdot (\lambda_{11} - 1) + r_2 \cdot \lambda_{21} + r_3 \cdot \lambda_{31} &= 0 \\ r_1 \cdot \lambda_{12} + r_2 \cdot (\lambda_{22} - 1) + r_3 \cdot \lambda_{32} &= 0 \\ r_1 \cdot \lambda_{13} + r_2 \cdot \lambda_{23} + r_3 \cdot (\lambda_{33} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dette ligningssystem løses lettest ved å betrakte koefficientene λ_{ik} som en determinant, altså

$$(9) \quad \begin{vmatrix} (\lambda_{11} - 1) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & (\lambda_{22} - 1) & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & (\lambda_{33} - 1) \end{vmatrix}$$

Verdien av denne determinant er lik 0, idet dens kolonnesummer er 0. (En kolonnesum er jo her summen av de procentdelor av inntekten som anvendes til de forskjellige varer minus 1, altså = 0). (Jfr. herom Statistisk fordelings- og regresjonsteori 112.).

Løsning av ligningssystemet (8) gir

$$\begin{aligned} r_1 &= C \cdot P_1 \\ r_2 &= C \cdot P_2 \\ r_3 &= C \cdot P_3 \end{aligned}$$

hvor C er en vilkårlig konstant, mens P_i er entydig bestemt ved elementene i (9). Nærmere bestemt tallene P_1, P_2, P_3 er proporsjonale med underdeterminantene svarende til en vilkårlig linje i (9), idet disse underdeterminanter tas med sitt fortegn bestemt etter fortegnereglen. (Se Statistisk fordelings- og regresjonsteori 1113). Da determinanten er lik 0, er det likegyldig hvilken linje vi betrakter idet underdeterminantene svarende til henholdsvis første, annen og tredje linje blir proporsjonale. Som et talleksempel betraktes følgende:

La der være gitt følgende λ -tabell:

Tabell 1

		Person nr.			Ialt
		1	2	3	
Vare nr.	1	0.20	0.10	0.80	1.10
	2	0.30	0.60	0.05	0.95
	3	0.50	0.30	0.15	0.95
Ialt		1.00	1.00	1.00	3.00

For disse verdier blir determinanten (9)

Tabell 2.

-0.80	0.10	0.80
0.30	-0.40	0.05
0.50	0.30	-0.85

Kolonesummer = 0.00 0.00 0.00

Underdeterminantene svarende til siste linje blir

$$+ (0,10 \cdot 0,05 - 0,80 \cdot (-0,40)) = 0,005 + 0,320 = 0,325$$

$$- (-0,80 \cdot 0,05 - 0,80 \cdot 0,30) = 0,040 + 0,240 = 0,280$$

$$+ (-0,80 \cdot (-0,40) - 0,30 \cdot 0,10) = 0,320 - 0,030 = 0,290$$

Hvis de givne relative fordelingstall λ_{ik} skal være som oppgitt i tabell 1, så må vi altså - likegyldig hvilke priser som eksisterer - ha

$$(10) \quad \begin{aligned} r_1 &= 0,325 C \\ r_2 &= 0,280 C \\ r_3 &= 0,290 C \end{aligned}$$

hvor C er en vilkårlig proporsjonalitetsfaktor. De tre totalinntekter må altså alltid forholde sig til hverandre som 0.325 til 0.280 til 0.290.

Vi kjenner altså det konstante forhold mellom inntektene r_1 , r_2 og r_3 . Dette forhold kan fremstilles ved en stråle gjennom origo i (r_1, r_2, r_3) -diagrammet. (Se fig. 4).

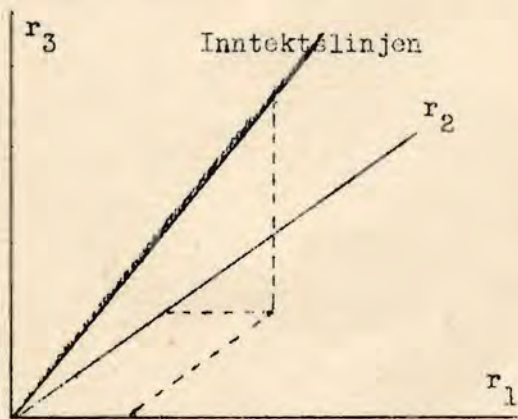


Fig. 4

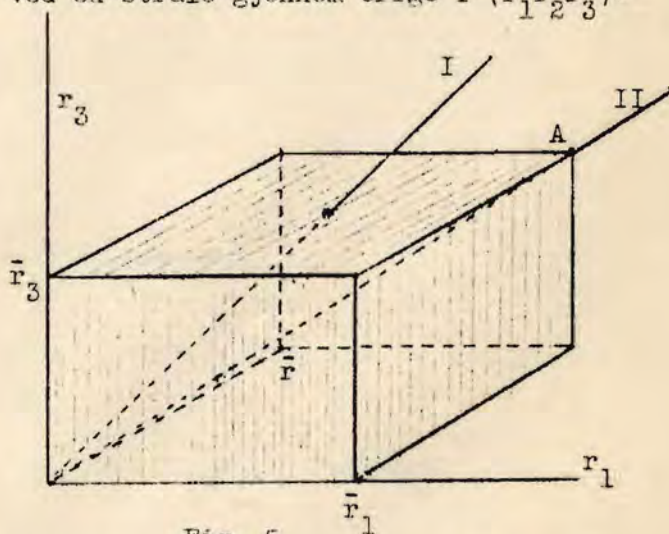


Fig. 5

La oss nu se dette i forbindelse med kapasitetsbegrepet. La \bar{a}_{oi} være nr. i 's kapasitet, d.v.s. det største kvantum den kan produsere. Tilsvarende betegner vi med \bar{r}_i den inntekt nr. i vilde få ved full kapasitetsutnyttelse (og et gitt prissystem). Til en bestemt kapasitets- "boks" (se fig. 3) svarer ved givne priser en bestemt inntekts- "boks" i (r_1, r_2, r_3) -diagrammet. (Se fig. 5). Inntektsboksens utstrekning i en bestemt retning er direkte proporsjonal med den tilsvarende pris. En rett linje gjennom origo og det mot-

stående hjørne i inntektsboksen vil være bestemt av det relative forhold mellom prisene. Nu er imidlertid forholdet mellom r_1 , r_2 og r_3 gitt ved en stråle i (r_1, r_2, r_3) -diagrammet, og denne er igjen entydig bestemt ved koefficientene λ_{ik} . Følgelig vil det punkt hvor denne stråle skjærer ut av inntektsboksen betegne maksimum for samtlige inntekter. Det gjelder derfor at skjæringspunktet ligger lengst mulig fra origo, d.v.s. i punktet A i fig. 5. Dette vil igjen si at det gjelder å komme over i en slik prissituasjon at diagonalen i kapasitetsboksen faller sammen med inntektslinjen. I vårt talleksempel foran bør vi altså ha

$$(11) \quad \frac{\bar{r}_1}{0.325} = \frac{\bar{r}_2}{0.280} = \frac{\bar{r}_3}{0.290} \quad \text{d. v. s.}$$

$$(12) \quad \frac{p_1}{\frac{0.325}{\bar{a}_{01}}} = \frac{p_2}{\frac{0.280}{\bar{a}_{02}}} = \frac{p_3}{\frac{0.290}{\bar{a}_{03}}}$$

Dette bestemmer det relative forhold mellom prisene som må gjelde for at der skal bli full kapasitetsutnyttelse. Sett f. eks. at kapasitetene er følgende fysiske kvanta: $\bar{a}_{01} = 100$, $\bar{a}_{02} = 200$, $\bar{a}_{03} = 290$.

(12) sier at prisene er proporsjonale med p_i/\bar{a}_{0i} , altså får vi

$$(13) \quad \frac{p_1}{0.00325} = \frac{p_2}{0.0014} = \frac{p_3}{0.0010}$$

Settes konvensjonelt f. eks. $p_1 = 1$ kr., må vi ha

$$p_2 = \frac{1 \cdot 0.0014}{0.00325} = 0,43 \text{ kr. og } p_3 = \frac{1 \cdot 0.0010}{0.00325} = 0,31 \text{ kr.}$$

Denne betraktningssmåte kan generaliseres til flere variable.

8543. Et eksempel fra produktivitetsteorien. "Arbeidsløshet" ved limitasjonsfaktorer.

La v_1 og v_2 være to limitasjonsfaktorer, (f. eks. to kjemiske stoffer som må blandes i et bestemt forhold for å gi det ønskede produkt). I faktordiagrammet (v_1, v_2) er de mulige faktorkombinasjoner representert ved en rett linje gjennom origo - limitasjonslinjen - hvis helning er bestemt ved det teknisk givne blandingsforhold. (Se fig. 1). Langs limitasjonslinjen

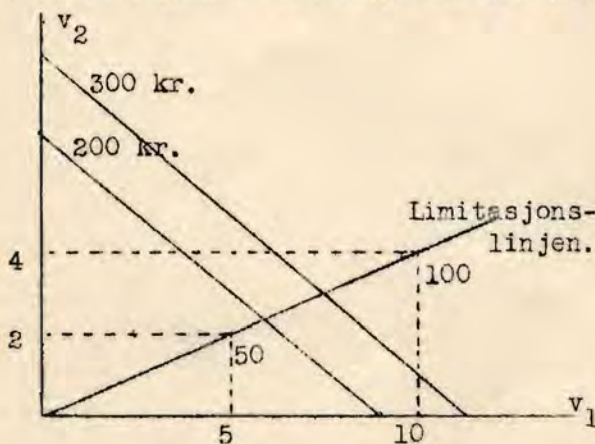


Fig. 1

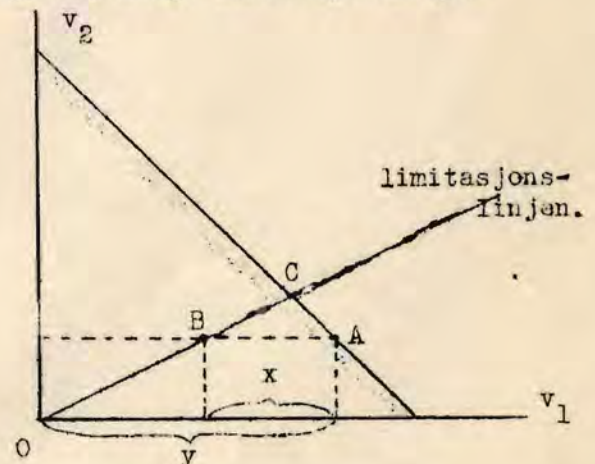


Fig. 2

kan vi angi de tilsvarende produktmengder ved kote-tall, f. eks. for $v_1 = 5$, $v_2 = 2$, produktmengde = 50, for $v_1 = 10$, $v_2 = 4$, produktmengde = 100 osv. Hvis faktorprisene er gitt, kan vi inntegne linjer for konstante omkostninger, f. eks. 200 kr., 300 kr. osv. Se fig. 1. La oss f. eks. betrakte det tilfelle da produsenten ønsker at omkostningene ikke skal overstige 200 kr. Innenfor dette område er mange faktorkombinasjoner mulige. Sett at kombinasjonen A velges. (Se fig. 2) Da disponeres altså rektanglet OA. Men kun punkter på limitasjonslinjen er teknisk mulige faktorkombinasjoner. Følgelig blir valget ensbetydende

med faktorkombinasjonen B, mens $\frac{x}{y}$ av v blir unyttig, den blir "arbeidsløs".

Full utnyttelse av de 200 kroner fåes kun ved å velge kombinasjonen C,

Dette er en rent statisk betraktningssmåte. Problemet kan imidlertid også sees fra dynamisk synspunkt. Vi kan opfatte forholdet som om der er en kraft som trekker faktorkombinasjonen mot C, nemlig den kraft som ligger i ønsket om størst mulig produktmengde. Hvis der er treghet tilstede, vil den bevegelse som kraften setter igang mot C, gå forbi C og et større eller mindre stykke på den annen side. Der kommer altså istand svingninger omkring C. 100 pct. utnyttelse realiseres kun når kombinasjonspunktet passerer C. I alle andre

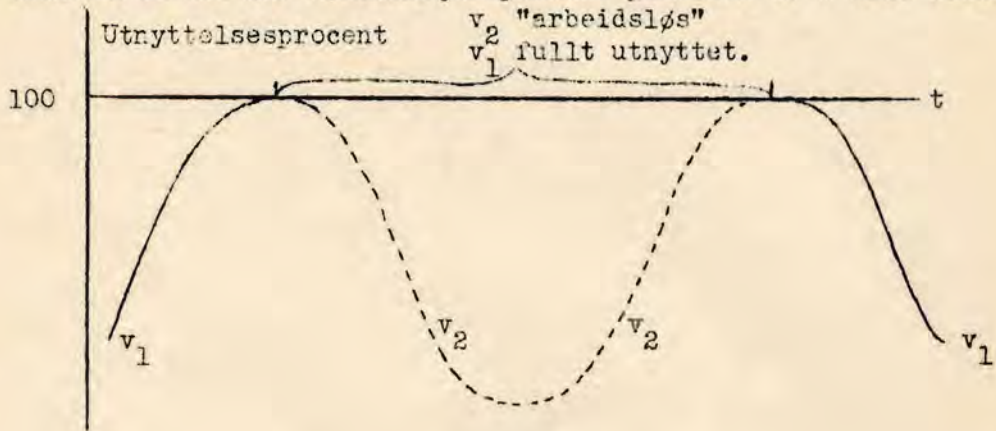


Fig. 3

tilfelle er den ene eller den annen faktor delvis "arbeidsløs". Se fig. 3. De optrukne kurver representerer utnyttelsesgraden for v_1 , de prikkede utnyttelsesgraden for v_2 . Så lenge svingningene vedvarer, vil faktorene næsten til stadighet være underoptimalt kombinert, altså vil også produktmengden næsten bestandig ligge under den optimale størrelse. Dette viser hvorledes disproporsjonaliteten i faktorkombinasjonen er et stadig netto - tap.

8544. Et annet eksempel fra produktivitetsteorien. Tilpasnings-svingninger oppstått under forsøk på maksimalisering. Effektivitetspilen oppfattet som en kraftpil.

Vi skal nu se hvorledes trykket i retning henimot tilpasningspunktet kan skape bevegelser i det tilfelle da vi har å gjøre med en substitusjonslov.

Vi tar utgangspunkt i visse begreper fra den statiske produktivitetsteori, som vi så vil fortolke slik at de blir brukbare i den dynamiske teori.

La oss betrakte to produksjonsfaktorer, v_1 og v_2 som er substitusjonsfaktorer (se herom Tekniske og økonomiske produktivitetslover § 624). Den samme produktmengde kan opnås ved forskjellige faktorkombinasjoner. Vi kan

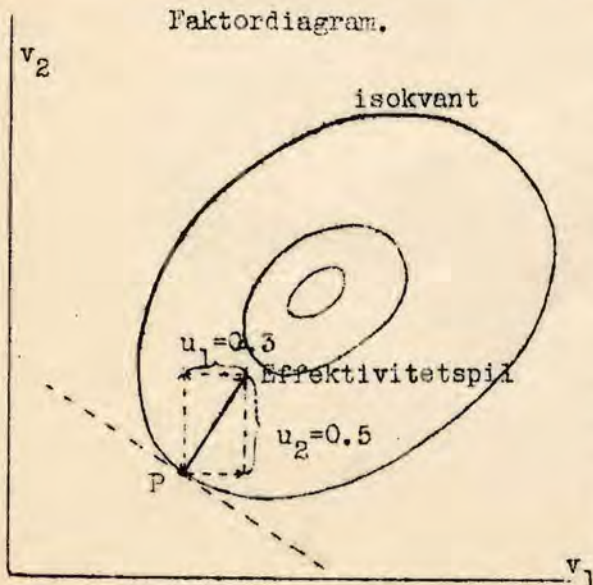


Fig. 1.

legge kurver gjennom de punkter i faktordiagrammet som representerer faktorkombinasjoner der gir samme produktmengde. Se fig. 1. Disse kurver kaller vi isokvanter. Gjennom hvert punkt i faktordiagrammet går der en isokvant. Vi kan nemlig velge ut et vilkårlig punkt P i faktordiagrammet, til dette punkt svarer en viss produktmengde $u(P)$. Betingelsen om et vilkårlig faktorpunkt skal være slik at produktmengden der nettop er lik den givne størrelse $u(P)$, er en en-dimensjonal betingelse, d.v.s. innbegrepet av alle de punkter hvor denne betingelse er oppfylt må være en "flate" hvis dimensjonstall er en mindre enn dimensjonstallet i faktordiagrammet, altså i dette tilfelle $2 - 1 = 1$. D.v.s. isokvanten må her være en kurve.

En pil loddrett på isokvanttangente

i P kalles en effektivitetspil. Dens komponenter er intet annet enn grense-effektivitetene u_1 og u_2 definert ved

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial v_1} \quad \text{og} \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial v_2}, \quad \text{d. v. s. grenseeffektivitetene er tilvekstgraden av produktet med hensyn på en partiell variasjon i } v_1 \text{ respektive } v_2.$$

Effektivitetspilen og dens komponenter representerer ikke noen forskyvning i faktordiagrammet. De er ting som kun tenkes knyttet til hvert punkt som en beskrivelse. De kunde tenkes inntegnet på et løst kort hvis ene hjørne anbringes i punktet P.

Vi skal nu se at ut fra en dynamisk betraktningssmåte kan effektivitetspilen oppfattes som uttrykk for en kraft som i en bestemt situasjon tenderer til å forandre faktor anvendelsen.

Kraftbegrepet kommer inn nærsagt på ethvert punkt hvor man forsøker en dynamisk analyse (gresk: dynamis = kraft). Selv de økonomer som står den mekaniske og matematiske betraktningssmåte fjernest, opererer med kraftbegrepet. (Jfr. uttrykket: "Der er krefter i virksomhet...")

Det gjelder å utforme kraftbegrepet ved det foreliggende økonomiske problem så det blir tilgjengelig for et kvantitativt resonnement. Da er det nyttig først å betrakte den rent formelle side ved kraftbegrepets utforming i mekanikken.

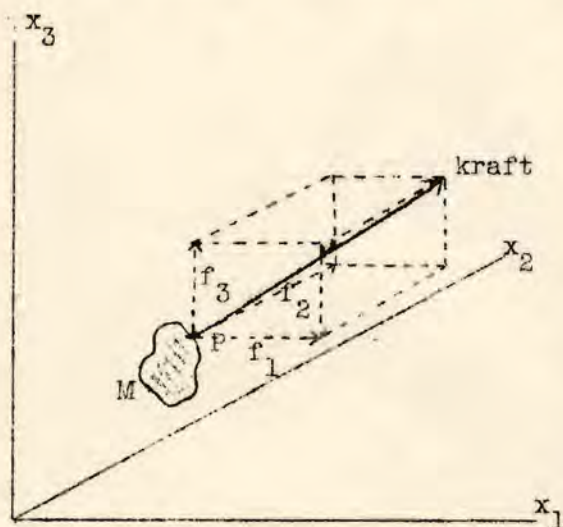


Fig. 2.

En kraft i mekanikk karakteriseres ved tre ting, nemlig angrepspunkt, retning og styrke. La fig. 2 være et fysisk rum. Gitt en masse M som påvirkes av en kraft. P er kraftens angrepspunkt. I hvilken retning virker kraften? Dette angis ved en pil. Kraftens styrke angis ved lengden av pilen. Kraftbegrepet i mekanikken er altså ikke beskrevet ved ett enkelt tall, men symbolisert ved en pil i rummet.

Kraften er rent kvantitativt beskrevet ved pilens komponenter f_1 , f_2 og f_3 i henholdsvis x_1 , x_2 og x_3 -retning, (se fig. 2)

Kraften vil gjennom et visst tidsrum meddele massen M en accelerasjon. Denne er beskrevet ved den hastighetsforandring som punktet P (og den dermed forbundne masse M) er utsatt for. La (x_1, x_2, x_3) være punktet P's koordinater i et bestemt tidspunkt t,

$$(1) \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3)$$

er forandringshastigheten i de tre koordinater pr. tidsenhet. Punktet P's samlede hastighet kan representeres ved en pil \dot{x} med de tre komponenter $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$.

Størrelsene

$$(2) \quad \ddot{x}_i = \frac{d\dot{x}_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3)$$

er accelerasjonene i de tre retninger, pilen \ddot{x} med komponentene $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ er accelerasjonspilen. Den fundamentale sammenheng mellom kraft og masse i mekanikken er at

$$(3) \quad \ddot{x}_i = \lambda \cdot f_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

hvor λ er en konstant som avhenger av massens størrelse.

Her har vi spesielt betraktet tre dimensjoner. Generelt kunde vi betrakte n dimensjoner og definere kraften ved en pil med komponenter i n retninger.

La oss nu vende tilbake til produktivitetsteorien. Hvilket begrep kan her fortolkes som kraftbegrepet?

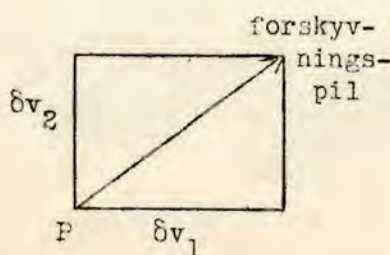


Fig. 3.

La δ være et generelt tilvekstsymbol. δv_1 og δv_2 betegner da to små tilvekster i henholdsvis faktor nr. 1 og nr. 2. Se fig. 3. δv_1 og δv_2 definerer en viss forskyvning i faktordiagrammet, altså en viss forandring i driftshorrens anvendelse av faktorene. Disse forskyvninger kan representeres ved en pil i faktordiagrammet. Retningen og lengden av denne pilen karakteriserer forskyvningen. Det å bevege sig i effektivitetspilens retning vil nu si å øke faktorene på en slik måte at retningen av pilen i fig. 3 faller sammen med effektivitetspilens retning. Da må der altså være samme forhold mellom grenseeffektivitetene u_1 og u_2 som

mellem δv_1 og δv_2 . Når $u_1 = 0.5$, $u_2 = 0.3$, kan vi f. eks. ha $\delta v_1 = 9$, $\delta v_2 = 15$, altså

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{\delta v_1}{\delta v_2} = \frac{9}{15} .$$

Det å gå i effektivitetspilens retning kan fortolkes som den naturlige ting for driftsherren å gjøre, forutsatt at der ikke er pålagt nogen hindrende betingelser for hans handlemåte, (f. eks. betingelse om konstante totalomkostninger eller lignende). Det å gå i effektivitetspilens retning vil jo nemlig si å bevege sig på en slik måte at produktmengden stiger "most mulig" for en gitt økning i faktorsettet, d.v.s. man går raskeste vei til den naboisokvant som representerer en større produktmengde. (Effektivitetspilen står jo nemlig loddrett på isokvanten). Ved definisjonen av denne "raskeste vei" melder der sig forskjellige visse vanskeligheter som bl. a. henger sammen med vanskeligheten ved å definere "mengden" av et faktorkompleks. (Se tekniske og økonomiske produktivitetslover § 624). Måleenhetsvanskeligheten kan omgås, f. eks. ved å regne med tallenes logaritmer, idet man derved eliminerer virkningen av forskjellige målesystemer. (Når to tall adskiller sig ved en multiplikativ konstant, adskiller deres logaritmer sig kun ved en additiv konstant).

Vi skal her tenke oss at koordinatene i faktordiagrammet er gjort sammenlignbare på denne eller en lignende måte. Da kan vi også fortolke den omtalte forskyvning på følgende måte: Isokvantene viser "høideforskjeller" på produktflaten. La oss et øieblikk tenke oss at produktmengden måles ovenfra og nedad slik at største produktmengde svarer til bunnen av "bollen" i fig. 4. Det å øke

Produktmengden målt nedover.

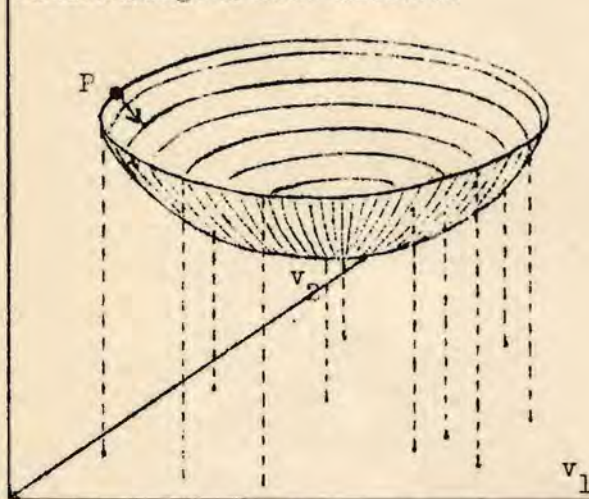


Fig. 4

produktmengden mest mulig blir da ensbetydende med å bevege sig i retning nedover mot bunnen i "bollen", altså slik som en kule vilde trille. Hvis hastigheten ikke blir for stor, vil den nettop gå på en slik måte at dens bevegelsesretning - projisert ned i (v_1, v_2) -planet - står loddrett på nivålinjene (isokvante).

La oss dernest se på betydningen av effektivitetspilens lengde. Denne er definert ved komponentene u_1 og u_2 i (v_1, v_2) -planet (faktordiagrammet). Hvis effektivitetspilen er lang, betyr det at grenseeffektivitetene er store, altså at en gitt økning i faktorkomplekset i dette punkt bringer en stor økning i produktmengde. Effektivitetspilens lengde uttrykker altså styrken av produkttilveksten. Siden vi forutsatte at driftsherren

ønsket å maksimalisere produktet, vil lengden av effektivitetspilen kunne tas som uttrykk for styrken av driftsherrens motiv til å forandre faktor anvendelsen.

I praksis vil der naturligvis være en viss friksjon tilstede. Effektivitetspilens lengde må være så stor at friksjonen overvinnes. Det er naturlig at driftsherren vil overvinne friksjonen dessto lettere jo større effektivitetspilens lengde er, altså jo større effektivitetspil, dess raskere forandring i faktorkombinasjonen.

Som vi ser har effektivitetspilen nettop de egenskaper som karakteriserer kraftbegrepet. Vi tar derfor effektivitetspilen som definisjon av kraften i det her betraktede tilfelle. - På andre områder i den økonomiske teori vil det naturligvis bli tale om å velge andre ting som uttrykk for kraften. (Jfr. f. eks. grensenyttspilen som uttrykk for en kraft der virker på konsumsjonen. Se Statisk og dynamisk Verditeori 1311. Hvis driftsherren ønsker å maksimalisere nettoprofitten, må man operere med et kraftbegrep i hvis definisjon grenseomkostningene også inngår o. s. v.).

Kraftens resultat er bevegelse (forutsatt at friksjonen overvinnes). La oss derfor se litt nærmere på sammenhengen mellom kraftbegrepet og bevegelsesformen. La i fig. 5 kurve I være tidsformen på utviklingen i v_1 , og II tidsformen for v_2 . Disse kurver er på et gitt tidspunkt t_0 karakterisert ved to ting, nemlig for det første kurvens stigningsbratthet i punktet t_0 , dette representerer hastighetene \dot{v}_1 og \dot{v}_2 , for det annet forandringen i stigningsbrattheten fra t_0 til det neste nærliggende tidspunkt $t_0 + \delta t$, dette er akselerasjonen, \ddot{v}_1 , \ddot{v}_2 . Jo større kraft, dess raskere forandring i hastighet, altså dess større akselerasjon. Som en første tilnærming kan vi anta den økonomiske kraft proporsjonal med akselerasjonen. (Det er nettop det den er i fysikken). Dermed har vi redusert

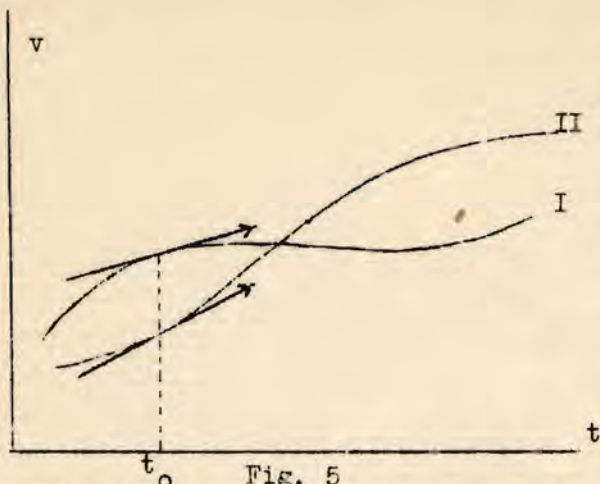


Fig. 5

vil kulen dessuten "skjene". Dens bane

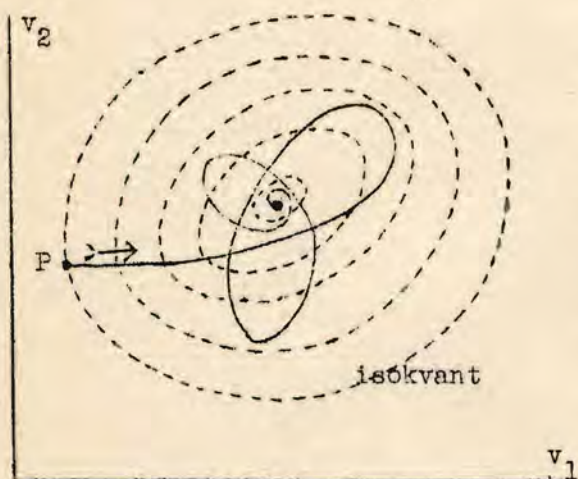


Fig. 6

problemet til en betraktning av de håndgriperlige størrelser accelerasjonen \ddot{v} og hastigheten \dot{v} .

Punktet P i fig 4. representerer en faktorkombinasjon som er slik at det er et meget sterkt motiv for driftsherren til forandring i faktormengdene. (Stor effektivitetsspil). Det gjelder for driftsherren å finne en faktorkombinasjon som svarer til bunnen i "bollen". Det kan illustreres ved at vi i punktet P slipper en liten kule. Den vil rulle nedover mot bunnen, men, på grunn av tregheten fortsette et stykke op på den motsatte side. I almindelighet vil kulen dessuten "skjene". Dens bane - projisert ned i faktordiagrammet - vil da bli av en form lignende den der er antydnet i fig. 6. Hvis der er friksjon tilstede, vil der fremkomme en dempet svingning som tilslutt ender i bunnen av bollen, altså i maksimumspunktet for produktmengden. For en statisk analyse er problemet bare å undersøke hvor i v_1, v_2 -diagrammet dette punkt ligger. Det blir et slags langtidsnormalpunkt. Den dynamiske analyse derimot tar sikte på forklaring av de svingninger som kommer igang før systemet faller til ro, altså på å forklare kurvebanen i fig. 6.

Dette mekaniske eksempel illustrerer hvorledes driftsherren, når han først er begynt å forandre faktorkombinasjonen med produktmaksimalisering som formål, og han handler under påvirkning av den kraft som er uttrykt ved effektivitetsspielen, kan komme til å gå forbi maksimumspunktet. (Smång. Aftalions eksempel med å fyre i ovnen). Resultatet herav kan tenkes å bli svingninger som har visse likheter med en

pendelbevegelse, kun har vi nu to variable istedetfor en som ved den enkle pendelbevegelse. Vi skal nu se litt nærmere på hvorledes problemet om svingningens tidsform kan studeres i det nu betraktede tilfelle med de to simultane variable v_1 og v_2 .

Som vist i 8537 vil tidsformen på en pendelbevegelse med friksjon bli en dempet cykle. Ligningen for pendelens bevegelse under friksjon kan skrives, (se 8537)

$$(4) \quad \ddot{y} = a \cdot y + b \cdot \dot{y}$$

hvor $a = -(\alpha^2 + \beta^2)$ og $b = -2\beta$. Ligningen uttrykker at jo større utslag y , dess større er accelerasjonen \ddot{y} (og dessuten motsatt rettet, kraften virker tilbake mot likevektspunktet), og jo større hastighet \dot{y} , dess større reduksjon lider kraften p. g. av friksjon. Friksjonen er proporsjonal med hastigheten og virker imot kraften (når β er positiv).

Hvis vi vilde betrakte tilpasningssvingninger for en enkelt produksjonsfaktor v_1 i analogi med (4), vilde vi gå ut fra en ligning av formen

$$(5) \quad \ddot{v}_1 = a \cdot v_1 + b \cdot \dot{v}_1$$

hvor $a v_1$ er posisjonselementet (v_1 = faktormengden) og $b \dot{v}_1$ friksjonselementet. Konkret sett er forutsetningen om et friksjonselement i produksjonstilpasningen nærliggende. Det vil alltid være visse ulemper ved forandringer i faktorkombinasjonen. Driftsherren reagerer ikke med mindre kraftens størrelse ligger over en viss minsteverdi.

Hvis vi betrakter to produksjonsfaktorer, blir forholdet mer komplisert. Her må vi gå ut fra følgende ligningssystem (ligningssystemet for en to-dimensjonal pendel med friksjon):

$$(6) \quad \begin{cases} \ddot{v}_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + b_{11} \dot{v}_1 + b_{12} \dot{v}_2 \\ \ddot{v}_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + b_{21} \dot{v}_1 + b_{22} \dot{v}_2 \end{cases}$$

\ddot{v}_1 (accelerasjonen i anvendelsen av første faktor) er en samlet virkning av både v_1 og v_2 . Og tilsvarende for \ddot{v}_2 . Der er altså en innbyrdes sammenheng mellom alle de 2^2 variable, størrelsen av parametrene a og b karakteriserer systemets natur.

(6) er de dynamiske strukturbetingelser for systemet. Spørsmålet blir nu hvad tidsformen blir for et system som pålegges disse strukturbetingelser. Vi ser at systemet er determinert. Der er nemlig 2 variable, v_1 og v_2 , og to ligninger (6). a_{ij} og b_{ij} betraktes som givne konstanter. Følgelig må vi kunne regne ut hvordan en situasjon vokser ut av den foregående. La oss anta at vi starter på tidspunktet t_0 i et punkt P i faktordiagrammet (se fig. 6). I dette punkt, initialposisjonen, er faktorkombinasjonen $v_1(t_0)$, $v_2(t_0)$. La oss anta at effektivitetspilen (kraften) i P er slik at driftsherren kettop er i ferd med å forandre faktorkombinasjonen på en bestemt måte. Det uttrykkes ved at \dot{v}_1 og \dot{v}_2 har visse størrelser på dette tidspunkt. Dette tas som data. Vi kjenner altså initialbetingelsene $v_1(t_0)$, $v_2(t_0)$, $\dot{v}_1(t_0)$ og $\dot{v}_2(t_0)$.

Ved innsetning i (6) kan da accelerasjonen i P, nemlig $\ddot{v}_1(t_0)$ og $\ddot{v}_2(t_0)$, bestemmes. Av initialbetingelsene kan videre berognes ordinaten på neste tidspunkt t_1 , altså $v_1(t_1)$ og $v_2(t_1)$, nemlig ved tilnærmelsesformlene

$$(7) \quad \begin{cases} v_1(t_1) = v_1(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{v}_1(t_0) \\ v_2(t_1) = v_2(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{v}_2(t_0) \end{cases}$$

Hvis t_1 er et tidspunkt som er så "nærliggende" at vi uten merkbar feil kan anta at hastigheten vokser jevnt i tidsrummet mellom t_0 og t_1 , så vil hastigheten på et vilkårlig tidspunkt t mellom t_0 og t_1 være

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{v}_1(t) = \dot{v}_1(t_0) + (t - t_0) \cdot \ddot{v}_1(t_0) \\ \dot{v}_2(t) = \dot{v}_2(t_0) + (t - t_0) \cdot \ddot{v}_2(t_0) \end{cases}$$

Med denne art tilnærmelse vil gjennomsnittshastigheten være lik hastigheten i midten av intervallet, altså for

$$\bar{t} = \frac{(t_0 + t_1)}{2}$$

Ved å innsette dette i (8) og regne ut den samlede forandring som vil skje i v_1 og v_2 når forandringen foregår i hele intervallet t_0 til t_1 , og med denne gjennomsnittshastighet, så finnes

$$(9) \quad \begin{cases} v_1(t_1) = v_1(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{v}_1(\bar{t}) \\ v_2(t_1) = v_2(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{v}_2(\bar{t}) \end{cases}$$

hvilket også kan skrives

$$(10) \quad \begin{cases} v_1(t_1) = v_1(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{v}_1(t_0) + \frac{1}{2} (t_1 - t_0)^2 \cdot \ddot{v}_1(t_0) \\ v_2(t_1) = v_2(t_0) + (t_1 - t_0) \cdot \dot{v}_2(t_0) + \frac{1}{2} (t_1 - t_0)^2 \cdot \ddot{v}_2(t_0) \end{cases}$$

Vi har dermed bestemt såvel v_1, v_2 som \dot{v}_1, \dot{v}_2 på tidspunktet t_1 . Ved strukturbetingelsene (6) kan vi derefter også bestemme \ddot{v}_1 og \ddot{v}_2 på t_1 . Og således kan fortsettes, slik at vi etter hvert kan bestemme v_1, v_2 på en rekke suksessive tidspunkter t_0, t_1, t_2, \dots etc. D. v. s. vi har her et kjederegningssystem ved hjelp av hvilket vi kan utregne hvorledes enhver situasjon vokser ut av de foregående, og derved bestemmer kurvebanen i fig. 6.

Følgende talleksempel illustrerer denne skritt-for-skritt-regning. La oss anta gitt konstantene

$$(11) \quad \begin{cases} a_{11} = -0.25306, a_{12} = 0.11388, b_{11} = -1.50000, b_{12} = 0.11986 \\ a_{21} = -46.83137, a_{22} = 11.72957, b_{21} = -133.53153, b_{22} = -0.27401 \end{cases}$$

På grunnlag herav får vi ligningssystemet

$$(12) \quad \begin{cases} \ddot{v}_1 = -0.25306v_1 + 0.11388v_2 - 1.50000\dot{v}_1 + 0.11986\dot{v}_2 \\ \ddot{v}_2 = -46.83137v_1 + 11.72957v_2 - 133.53153\dot{v}_1 - 0.27401\dot{v}_2 \end{cases}$$

Vi starter i tidspunktet $t = 0$ med initialbetingelsene $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 9.9585$, $\dot{v}_1(0) = 1.0000$, $\dot{v}_2(0) = -4.3476$. Utregningen skritt for skritt etter den foran utviklede fremgangsmåte gir da det resultat som er gjengitt i tabell 1. Lengden av skrittene er her valgt lik 0.01 år. (Efterregn som øvelse alle de seks tallene f. eks. på linjen $t = 0.01$!).

Tabell 1.

t	v_1	v_2	\dot{v}_1	\dot{v}_2	\ddot{v}_1	\ddot{v}_2
0.00	0.0000	9.9585	1.0000	-4.3476	-0.8870	-15.5313
0.01	0.0100	9.9150	0.9911	-4.5029	-0.8998	-15.2789
0.02	0.0199	9.8700	0.9821	-4.6557	.	.
0.03	0.0297	9.8234
.

Vi kan imidlertid også bestemme tidsformen direkte, idet vi skaffer oss et matematisk uttrykk for v_1 og v_2 som eksplisite funksjoner av t . Selvsve teknikk ved denne fremgangsmåte blir lignende den der er beskrevet i 8534. Vi tar utgangspunkt i ligningssystemet (6). La oss forsøke om ikke dette struktursystem kan tilfredsstilles ved å ansette for v_1 og v_2 tidsfunksjoner av formen

$$(13) \quad \begin{cases} v_1(t) = \sum_{\mu} A_{1\mu} \cdot e^{Q_{\mu} \cdot t} \\ v_2(t) = \sum_{\mu} A_{2\mu} \cdot e^{Q_{\mu} \cdot t} \end{cases}$$

hvor μ løper over et visst antall ledd og A -ene og Q -ene er konstanter og e er grunntallet i det naturlige logaritmesystem = 2.7182.... . Hvis tidsfunksjoner v_1 og v_2 av formen (13) skal tilfredsstille struktursystemet (6), må A -ene og Q -ene tilfredsstille visse betingelser.

Ved innføring av uttrykkene (13) i (6) og bemerke at koeffisientene foran hvert enkelt ledd som avhenger av t må være like hver for sig, såsant ligningene (6) skal være oppfylt for ethvert tidspunkt t , føres man til følgende betingelser:

$$(14) \quad \begin{cases} A_{1\mu} (a_{11} + b_{11} \cdot Q_{\mu} - Q_{\mu}^2) + A_{2\mu} (a_{12} + b_{12} \cdot Q_{\mu}) = 0 \\ A_{1\mu} (a_{21} + b_{21} \cdot Q_{\mu}) + A_{2\mu} (a_{22} + b_{22} \cdot Q_{\mu} - Q_{\mu}^2) = 0 \end{cases}$$

$(\mu = 1, 2, 3, 4)$

Dette kan - for en gitt μ - oppfattes som et system av to homogene ligninger til bestemmelse av de to ukjente $A_{1\mu}$ og $A_{2\mu}$. Et slikt system har en løsning (bortsett fra den trivielle $A_{1\mu} = A_{2\mu} = 0$), da og kun da når determinanten av koeffisientene for de ukjente forsvinner, altså når

$$(15) \quad \begin{vmatrix} (a_{11} + b_{11} Q_{\mu} - Q_{\mu}^2) & (a_{12} + b_{12} Q_{\mu}) \\ (a_{21} + b_{21} Q_{\mu}) & (a_{22} + b_{22} Q_{\mu} - Q_{\mu}^2) \end{vmatrix}$$

Hvis vi skriver (15) ut som et polynom i Q og for korthets skyld sløifer fot-skriften på Q , får vi

$$(16) \quad Q^4 - (b_{11} + b_{22}) \cdot Q^3 + (-a_{11} + b_{11} b_{22} - a_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) \cdot Q^2 + (a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}) \cdot Q + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$$

Fjerdegradsligningen (16) kalles den karakteristiske ligning for struktursystemet (6) Den har fire røtter, nemlig Q_n ($n = 1, 2, 3, 4$), hvilket viser at utviklingen av de tidsfunksjoner (13) som skal tilfredsstille (6) har fire ledd, altså $n = 1, 2, 3, 4$. Her betraktes spesielt det tilfelle da røttene blir konjugert imaginære, d.v.s. av formen

$$(17) \quad \begin{aligned} Q_1 &= -\beta_1 + i \cdot a_1 \\ Q_2 &= -\beta_1 - i \cdot a_1 \\ Q_3 &= -\beta_2 + i \cdot a_2 \\ Q_4 &= -\beta_2 - i \cdot a_2 \end{aligned}$$

hvor β og a er konstanter bestemt ved a og b , mens $i = \sqrt{-1}$ = den imaginære enhet, (altså det tall som er slik at dets kvadrat er negativt og lik -1). På grunn av de Eulerske formler

$$(18) \quad e^{\pm iat} = \cos at \pm i \sin at$$

får vi

$$(19) \quad e^{Q_n t} = e^{-\beta_n t} \cdot e^{\pm i a_n t} = e^{-\beta_n t} (\cos at \pm i \sin at)$$

altså

$$(20) \quad \begin{cases} e^{Q_1 t} = e^{-\beta_1 t} (\cos a_1 t + i \sin a_1 t) \\ e^{Q_2 t} = e^{-\beta_1 t} (\cos a_1 t - i \sin a_1 t) \\ e^{Q_3 t} = e^{-\beta_2 t} (\cos a_2 t + i \sin a_2 t) \\ e^{Q_4 t} = e^{-\beta_2 t} (\cos a_2 t - i \sin a_2 t) \end{cases}$$

(13) kan - når der er fire ledd - skrives ut slik

$$(21) \quad v_1(t) = A_{11} e^{Q_1 t} + A_{12} e^{Q_2 t} + A_{13} e^{Q_3 t} + A_{14} e^{Q_4 t}$$

og tilsvarende for $v_2(t)$. Ved her å innføre (20), antar uttrykkene for v_1 og v_2 formen

$$(22) \quad \begin{aligned} v_1(t) &= H_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\phi_1 + a_1 t) + H_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\phi_2 + a_2 t) \\ v_2(t) &= K_1 e^{-\beta_1 t} \sin(\psi_1 + a_1 t) + K_2 e^{-\beta_2 t} \sin(\psi_2 + a_2 t) \end{aligned}$$

hvor $H_1, H_2, K_1, K_2, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ er nykonstanter der er sammensatt på en viss måte av de gamle konstanter. For den følgende regning er det mere praktisk å operere med de nye konstanter.

Vi ser av (22) at hver av de variable v_1 og v_2 kommer til å bestå av to dampede cykliske komponenter som hver for sig nettop er av formen (6) i 8537.

DempningsekspONENTEN β og frekvensen a (altså også perioden = $2\pi/a$), er bestemt utelukkende ved strukturkonstantene a og b , kun disse inngår nemlig i den karakteristiske ligning (16). Derimot er amplitudene H og K og fasene ϕ og ψ også avhengige av initialbetingelsene. Der er 4 initialbetingelser, nemlig de givne størrelser av v_1, v_2 og \dot{v}_1, \dot{v}_2 på t_0 , og der er 8 størrelser H, K og ϕ, ψ . Da systemets utvikling som vi har sett er helt determinert ut fra initialbetingelsene, må det kunne gå an å uttrykke 4 av de 8 parametre H, K og ϕ, ψ ved de andre 4. Den letteste måte å bestemme denne sammenheng er simpelthen å innføre i (6) uttrykkene (22) og de tilsvarende for \dot{v}_1 og \dot{v}_2 . Man vil da se at når vi velger amplitude og fase for komponentene i den ene variable, følger derav en bestemt amplitude og fase for komponentene i den annen variable. Fase og amplitude for denne ene variable vil være bestemt ved initialbetingelsene angående v_1, v_2 og \dot{v}_1, \dot{v}_2 .

La oss som talleksempel ta det tilfelle som dannet utgangspunktet for skritt-for-skritt-regningen i tabell 1. Dette leder til den karakteristiske ligning

$$(23) \quad Q^4 + 1.7741 Q^3 + 4.9398 Q^2 + 3.2950 Q + 2.3645 = 0$$

Røttene i denne ligning gir

$$(24) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 0.73355 & \beta_1 &= -0.37134 \\ \alpha_2 &= 1.79775 & \beta_2 &= -0.51577 \end{aligned}$$

Ved å velge initialbetingelsene $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 9.9585$, $\dot{v}_1(0) = 1.0000$, $\dot{v}_2(0) = -4.3476$, får man følgende tidsform på bevegelsen

$$(25) \quad \begin{aligned} v_1(t) &= v_{11}(t) + v_{12}(t) \\ v_2(t) &= v_{21}(t) + v_{22}(t) \end{aligned}$$

Funksjonene v_{11} og v_{12} er henholdsvis første komponent (langbølgen) og annen komponent (kortbølgen) i v_1 , og tilsvarende for v_2 . Vi får

$$(26) \quad \begin{aligned} v_{11}(t) &= 0.6816e^{-0.37134t} \sin 0.73355t \\ v_{12}(t) &= 0.27813e^{-0.51570t} \sin 1.79775t \\ v_{21}(t) &= 5.45850e^{-0.37134t} \cos 0.73355t \\ v_{22}(t) &= 4.50000e^{-0.51570t} \cos 1.79775t \end{aligned}$$

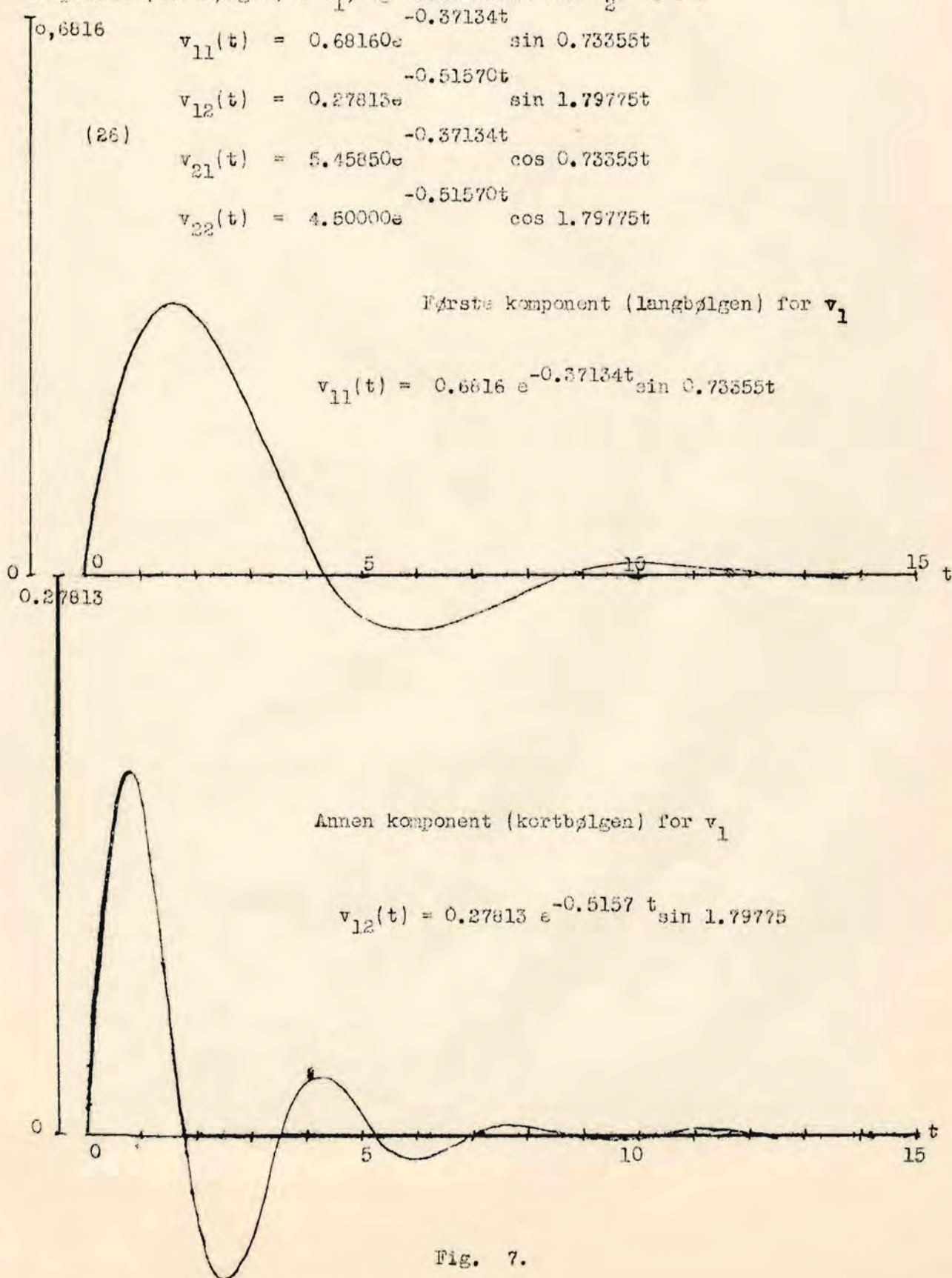


Fig. 7.

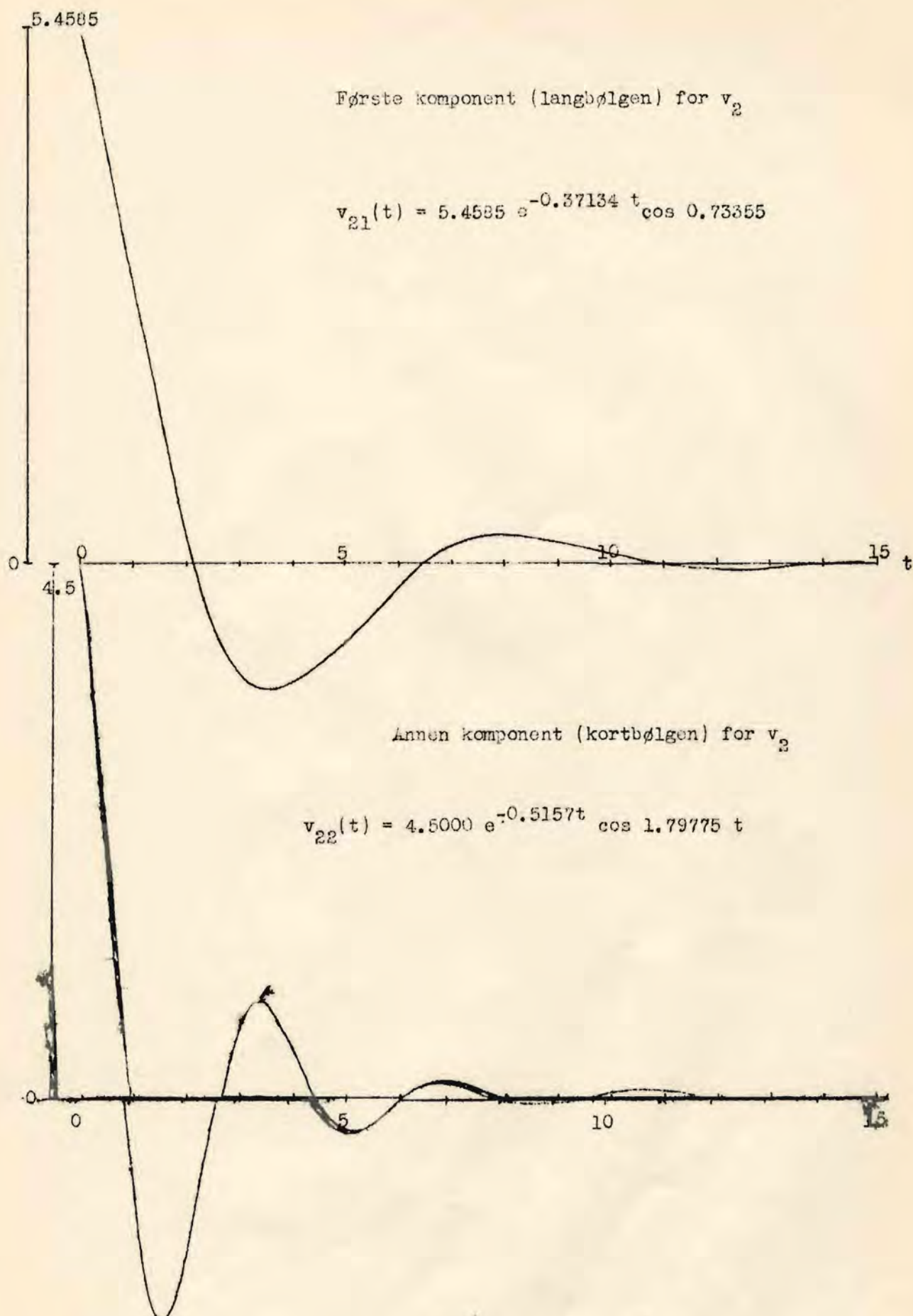


Fig. 8.

Disse komponenter er grafisk fremstillet i fig. 7 og 8. Første komponent er en bølge på ca $8\frac{1}{2}$ år, og annen komponent en bølge på ca $3\frac{1}{2}$ år. Dette gjelder både for v_1 og v_2 . Fasene og amplitudene er derimot forskjellige for v_1 og v_2 .

Disse cykler er de samme som den vi kom frem til i 8535. Dette ligger i valget av konstantene a og b. Nærværende er kun å opfatte som et valgt eksempel, konstantene er ikke bestemt på grunnlag av statistiske data, men dette vil antagelig kunne gjøres. Vi har her bare villet vise muligheten for fremkomsten av cykliske bevegelser under produksjonstilpasninger.

Hvis v_1 og v_2 er arbeide og kapital, vil de fremkomme sykler konkret kunne fortolkes som svingninger i beskjeftigelsesgraden (av arbeide og kapital).

Da de strukturbetingelser vi har oppstillet, nemlig (5), leder til en tidsform som er dempet, er de ikke tilstrekkelige til forklaring av de faktiske konjunktursvingninger som jo viser at bevegelsen vedlikeholdes. Vi må derfor innføre et element som tilfører systemet ny energi. Her som tidligere kan vi tenke oss dette i form av en rekke erratiske støt. Konkret kunde dette fortolkes f. eks. som naturmessig eller politisk betingede impulser for driftsherren til å avvike mer eller mindre fra den typiske handlemåte som er beskrevet ved (5).

Innvirkningen av disse støt på systemet kan beskrives på følgende måte. La oss anta at systemet v_1, v_2 startes på tidspunktet t_0 med initialbetingelsene $v_1(t_0), v_2(t_0), \dot{v}_1(t_0), \dot{v}_2(t_0)$. Hvis bevegelsen får fortsette uforstyrret, vil ordinaten for v_1 og v_2 på tidspunktet t kun være avhengig av initialbetingelsene og den tid som er gått siden igangsettelsen, og disse initialbetingelser inngår lineært. Vi må altså kunne skrivetidsformen på de variable slik:

$$(27) \quad \begin{aligned} v_1(t) &= P_{11}(\tau) \cdot v_1(t_0) + P_{12}(\tau) \cdot v_2(t_0) + Q_{11}(\tau) \cdot \dot{v}_1(t_0) + Q_{12}(\tau) \cdot \dot{v}_2(t_0) \\ v_2(t) &= P_{21}(\tau) \cdot v_1(t_0) + P_{22}(\tau) \cdot v_2(t_0) + Q_{21}(\tau) \cdot \dot{v}_1(t_0) + Q_{22}(\tau) \cdot \dot{v}_2(t_0) \end{aligned}$$

hvor P og Q er funksjoner av τ , d.v.s. av den tid som er gått siden igangsettelsen. ($\tau = t - t_0$).

Anta nu at systemet på hvert av tidspunktene t_1, t_2, \dots, t_n treffes av to tilfeldige støt, et støt ξ_1 som rammer første faktor, altså v_1 og et støt ξ_2 som rammer annen faktor, altså v_2 . Et slikt støt vil vi anta har en lignende egenskap som et fysisk støt: Posisjonen blir uforandret, men hastigheten påvirkes. Hermed menes at selve farten forandres og at bevegelsens retning forandres i det tidspunkt da støtet inntreffer. Og disse forandringer er diskontinuerlige. Støtene ξ_1 og ξ_2 må selvfølgelig tenkes forskjellige på de forskjellige tidspunkt, de må m. a. o. opfattes som funksjoner av τ , $\xi_1(\tau)$ og $\xi_2(\tau)$.

Den letteste måte til å analysere støtenes virkning er derfor å følge systemet i dets fri utvikling fra t_0 til t_1 og så betrakte t_1 som et nytt utgangspunkt, idet initialbetingelsene i dette nye utgangspunkt er for posisjonens vedkommende (altså for såvidt angår størrelsen av v_1 og v_2) den som systemet automatisk får ved den frie utvikling fra t_0 til t_1 , og for hastighetens vedkommende, de hastigheter som følger av denne frie utvikling pluss de diskontinuerlige tillegg som skyldes støtene. Fra t_1 kan så systemet følges på samme måte til t_2 o.s.v.. Gjør man det, vil man se at v_1 og v_2 simpelthen kan skrives som en sum av to uttrykk, nemlig for det første de uttrykk (27) der uttrykker hvad stillingen vilde vært uten støtene og dernest et tillegg (positivt eller negativt) der uttrykker den opkumulerte virkning på hastigheten av støtene. De vektorer med hvilke kumuleringen foregår, blir (siden det er hastighetene, ikke posisjonene som påvirkes ved støtene) intet annet enn de funksjoner Q der inngår i (27). Det fullstendige uttrykk for v_1 og v_2 på et visst tidspunkt t der ligger efter t_0 og således at der mellom t_0 og t har inntrefft visse støt blir altså

$$(28) \quad \begin{aligned} v_1(t) &= P_{11}(\tau) v_1(t_0) + P_{12}(\tau) v_2(t_0) + Q_{11}(\tau) \dot{v}_1(t_0) + Q_{12}(\tau) \dot{v}_2(t_0) \\ &\quad + \sum_{\tau} (Q_{11}(t-\tau) \cdot \xi_1(\tau) + Q_{12}(t-\tau) \cdot \xi_2(\tau)) \\ v_2(t) &= P_{21}(\tau) v_1(t_0) + P_{22}(\tau) v_2(t_0) + Q_{21}(\tau) \dot{v}_1(t_0) + Q_{22}(\tau) \dot{v}_2(t_0) \\ &\quad + \sum_{\tau} (Q_{21}(t-\tau) \cdot \xi_1(\tau) + Q_{22}(t-\tau) \cdot \xi_2(\tau)) \end{aligned}$$

hvor summasjonen \sum_{τ} er utstrakt over alle støt som er inntrefft mellom t_0 og t . De tilleggsledd som optrer i (28) sammenlignet med (27) er, som man ser, intet annet enn bevegelige gjennomsnitt utstrakt over de tidsrekker som representeres av støtene, og vektorene i disse bevegelige gjennomsnitt er funksjonene Q .

Hvis nu som i eksemplet foran strukturbetingelsene fører til dempede løsninger, så vil funksjonene Q være dempede kurver. Disse vektorer vil i det vesentlige ha det samme forløp som den tidsform der vilde fremkommet som løsning hvis systemet selv hadde fått gå uforstyrret. Q -ene vil m.a.o. bestå av to komponenter av den form som er angitt i fig 7. Noget lignende gjelder om P -ene.

På grunn av dempingen vil vi følgelig efter en viss tids forløp simpelthen kunne bortse fra den virkning på v_1 og v_2 som kommer fra de første ledd i (28). Kun virkningen av støtene blir altså tilbake, mens virkningen av den opprinnelige initialsituasjon på t_0 er borte. For tidspunkter t som ligger tilstrekkelig langt

fra t_0 har vi altså

$$(29) \quad v_1(t) = \sum_{\tau} (Q_{11}(t-\tau) \cdot \xi_1^{(\tau)} + Q_{12}(t-\tau) \cdot \xi_2^{(\tau)})$$

$$v_2(t) = \sum_{\tau} (Q_{21}(t-\tau) \cdot \xi_1^{(\tau)} + Q_{22}(t-\tau) \cdot \xi_2^{(\tau)})$$

hvor summasjonen \sum_{τ} løper over alle støtene som ligger foran tidspunktet t . Hver av de fire Q -ene i (29) består av de samme to komponenter nemlig en $8\frac{1}{2}$ års cykle og en $3\frac{1}{2}$ års cykle som angitt i fig. 7 og 8. De fire Q -ene adskiller sig fra hverandre kun ved kombinasjonsmåten for disse to komponenter (d.v.s. ved amplitude og fase). Denne kombinasjonsmåte er gitt ved strukturbetingelsene:

$$(30) \quad \begin{aligned} Q_{11}(\tau) &= R_1 e^{-\beta_1 \tau} \sin(a_1 + \alpha_1 \tau) + R_2 e^{-\beta_2 \tau} \sin(a_2 + \alpha_2 \tau) \\ Q_{12}(\tau) &= S_1 e^{-\beta_1 \tau} \sin(b_1 + \alpha_1 \tau) + S_2 e^{-\beta_2 \tau} \sin(b_2 + \alpha_2 \tau) \\ Q_{21}(\tau) &= R'_1 e^{-\beta_1 \tau} \sin(a'_1 + \alpha_1 \tau) + R'_2 e^{-\beta_2 \tau} \sin(a'_2 + \alpha_2 \tau) \\ Q_{22}(\tau) &= S'_1 e^{-\beta_1 \tau} \sin(b'_1 + \alpha_1 \tau) + S'_2 e^{-\beta_2 \tau} \sin(b'_2 + \alpha_2 \tau) \end{aligned}$$

hvor R og S er amplitudene, β dempningsekspONENTENE, a og b , a' og b' fasene og α frekvensen.

Talleksemplet foran gir da følgende uttrykk for vektene Q

$$(31) \quad \begin{aligned} Q_{11} &= 6.1247 e^{-\beta_1 \tau} \sin(3.0919 + \alpha_1 \tau) + 3.0431 e^{-\beta_2 \tau} \sin(6.1829 + \alpha_2 \tau) \\ Q_{12} &= 0.0560 e^{-\beta_1 \tau} \sin(0.8258 + \alpha_1 \tau) + 0.0453 e^{-\beta_2 \tau} \sin(5.1406 + \alpha_2 \tau) \\ Q_{21} &= 49.0490 e^{-\beta_1 \tau} \sin(4.6634 + \alpha_1 \tau) + 49.2357 e^{-\beta_2 \tau} \sin(1.4708 + \alpha_2 \tau) \\ Q_{22} &= 0.4489 e^{-\beta_1 \tau} \sin(2.3959 + \alpha_1 \tau) + 0.7327 e^{-\beta_2 \tau} \sin(0.4290 + \alpha_2 \tau) \end{aligned}$$

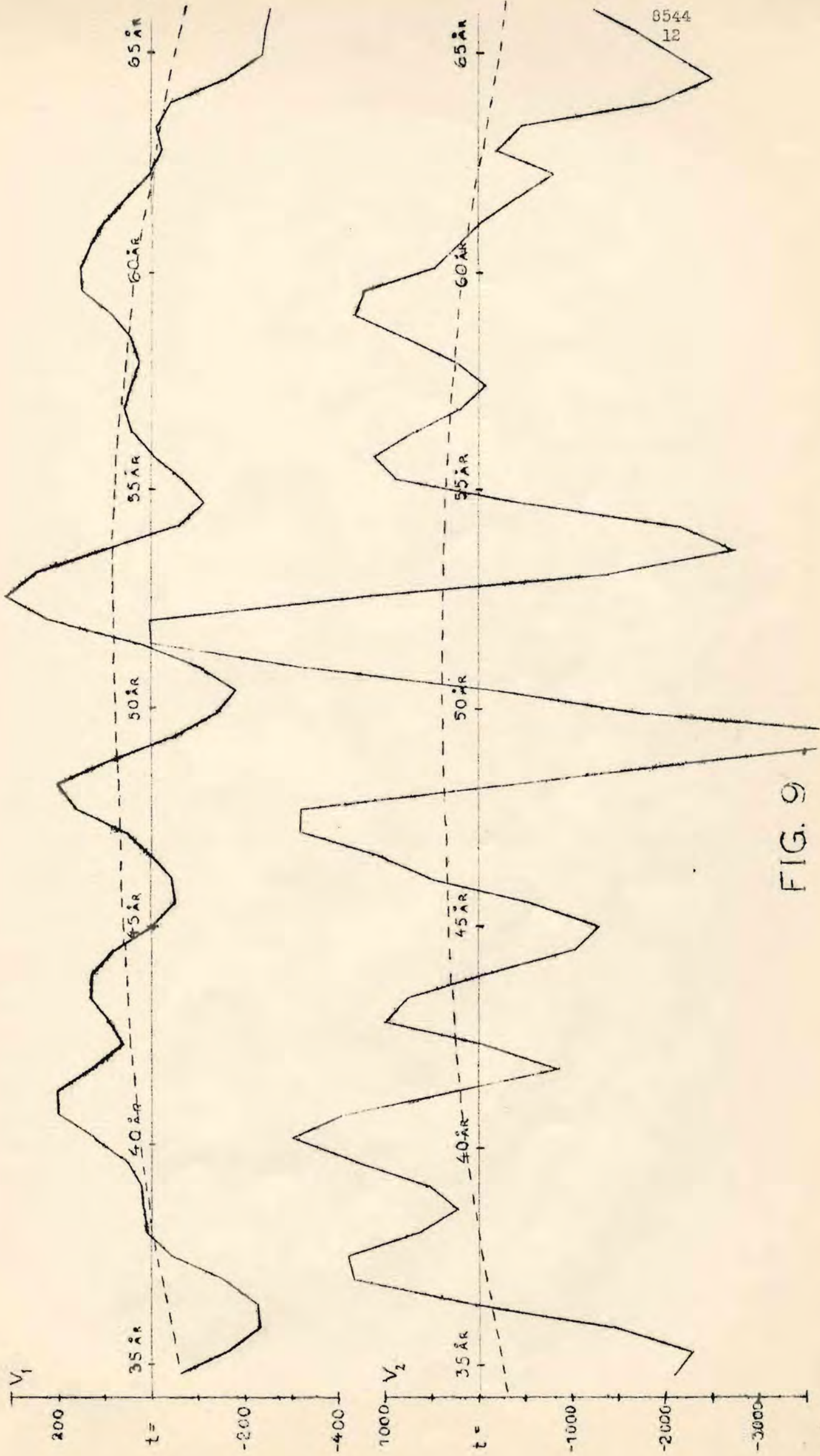
hvor α_1 , α_2 , β_1 , β_2 er definert ved (24).

I fig. 9 er angitt resultatene av en kumulering etter formel(29) med de vektorer som er opført i (31). Som støtrekkene ξ_1 og ξ_2 er brukt to erratiske serier konstruert på grunnlag av endesifre ved tåknninger i Det norske pengelotteri. For å forenkle regningene har vi antatt at støtene inntreffer ekvidistant, (0.54 års mellomrum).

De på grunn av støtene fremkomne tidskurver inneholder som man ser for det første de to komponenter som fremgikk av den teoretiske løsning, særlig er $3\frac{1}{2}$ - års cyklen fremtredende. Men dessuten har vi nu fått inn en underliggende bevegelse som, hvis vi fortsetter beregningen utover et lengere tidsrum, viser sig å bli en langcykle. (Se de prikkede kurver). Dette er en kumulantcykle hvis tilstedeværelse ikke svarer til nogen av de karakteristiske løsninger av den teoretiske ligning (16). Kumulantcyklens tilstedeværelse kan kun forklares ved teorien om lineæroparasjoner, men vi skal ikke gå inn på dette her.

I fig. 9 vil man se at der ikke er nogen systematisk tendens til demping. I vårt mekaniske eksempel foran (fig. 4) vil dette si at kula nu aldri faller til ro i bunnpunktet. Den vil uophørlig bevege sig - mer eller mindre regelmessig - i svingninger omkring bunnpunktet. Vi kan illustrere det ved at man stadig ryster litt på bollen.

Kurvebanen i fig. 6 vil, når den regnes ut ved talløksemplet foran, bli som i fig. 10. Legg merke til hvordan støtene diskontinuerlig forandrer utviklingens retning i de tidspunkter de inntreffer. (Se f. eks. ved $t = 38.5$ år hvor forandringen er særlig markert. På tross herav vil der dog stort sett bli en regelmessighet som gir uttrykk særlig for $3\frac{1}{2}$ - års bølgen.) De på kurvebanen anførte tall angir tidspunktene.



8544
12

FIG. 9

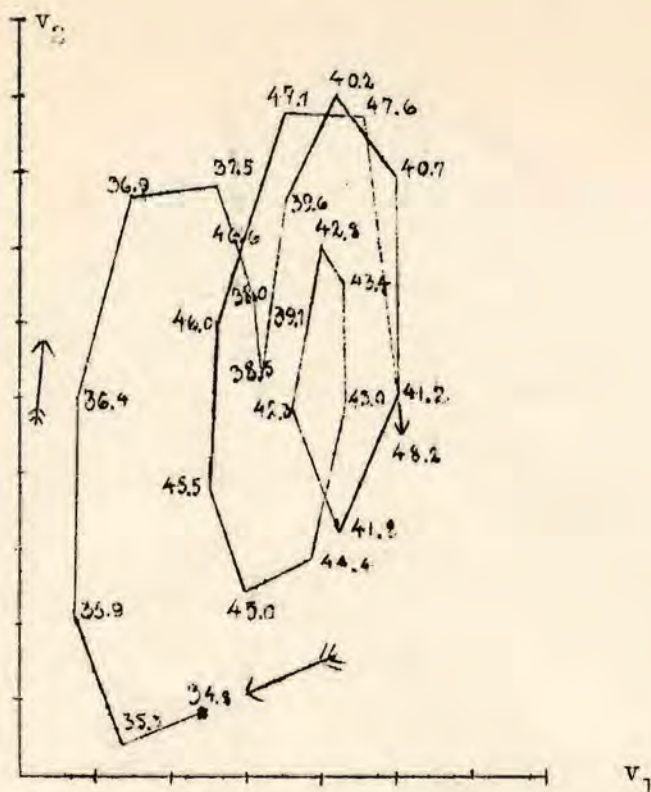


Fig. 10

855. Cirkulasjonssvingninger. Cirkulasjonens selv-sammensnøring og selv-ekspansjon.

I denne paragraf vil vi opstille et nytt makrodynamisk system. Vårt formål er som det vil erindres å gi en komparativ analyse av en rekke forskjellige makrodynamiske systemer.

8550. Betydningen av cirkulasjonssvingninger.

Gjenstanden for den nye makrodynamiske analyse i denne paragraf er selve cirkulasjonsprosessen i samfundet. Vi tar utgangspunkt i individenes psykologiske innstilling under byttetransaksjonene. Vi skal tenke oss at de byttende personer influeres i sin innkjøpspolitikk dels av hvad de selv solgte på et tidligere tidspunkt, dels av de gjeld de har i et gitt øieblikk. Selve denne psykologiske innstilling, altså rent bortsett fra tekniske eiendommeligheter ved produksjonsprosessen, kan bevirke at systemet (varebyttet) enten skrur sig selv stadig nedover, eller eventuelt er i stadig ekspansjon, eller eventuelt også beveger sig i cykler. Slike cykler vil vi da kalle rene cirkulasjonscykler fordi de tenkes fremkommet som en følge av individenes psykologiske innstilling overfor byttet, uten bestemte forutsetninger om produksjonsteknikken.

8551. Et simplifisert eksempel på selvsammensnøring eller selv-ekspansjon i cirkulasjonen.

La oss betrakte to byttende personer, a - en skomaker og b - en bonde. For enkelhets skyld tenker vi oss at disse utveksler sine varer med visse regelmessige mellomrum, f. eks. ved vår- og høstmarkeder (jfr. Nordlands-handelen på Bergen i gamle dager). La a_t være det som a kjøper (av b) på tidspunktet t og b_t det som b kjøper (av a) på t. Det er naturlig å anta at dersom f. eks. a ved en bestemt anledning har fått solgt meget, vil han næste gang han gjør innkjøp, selv kjøpe forholdsvis meget, og tilsvarende for b. (Rent konkret kan vi f. eks. tenke oss at enhver av partene først en tid efter markedet får salgsgjør for det av hans varer som blev solgt på dette marked. La oss betrakte det aller enkleste tilfelle: simpel proporsjonalitet mellem kjøp og foregående salg, altså

$$(1) \quad \begin{aligned} a_t &= \alpha \cdot b_{t-1} \\ b_t &= \beta \cdot a_{t-1} \end{aligned}$$

hvor α og β er visse konstanter. (1) sier at a's innkjøp på t er proporsjonalt med hans eget salg - (d.v.s. b's kjøp) - på tidspunktet t-1. Tilsvarende for bonden. Dette er et sett av strukturbetingelser. α og β er strukturparametre, de gir et slags uttrykk for partenes optimisme. Hvis f. eks. $\alpha > 1$, betyr det at skomakeren er optimist, han er tilbøielig til å kjøpe mere enn han solgte sist. Omvendt når $\alpha < 1$. Vi kan definere

- (2)
- | | | |
|----|-------------------------|------------------------|
| 1. | $\alpha > 1, \beta > 1$ | - ekspansjonsstemning. |
| 2. | $\alpha < 1, \beta < 1$ | - sparestemning. |

Disse alternativer bestemmer forskjellige utviklingsformer for systemet. For det følgende har det interesse å innføre et gjennomsnitt mellom α og β , altså et uttrykk for den gjennomsnittlige optimisme (eller pessimisme) i byttekretsen. Det viser sig praktisk å velge det geometriske gjennomsnitt

$$(3) \quad \gamma = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

Hvis $\gamma > 1$, betyr det at systemet gjennomsnittlig er i ekspansjonsstemning. $\gamma < 1$ betyr at der gjennomsnittlig er sparestemning.

La oss starte i en bestemt situasjon $t_0 = 0$. Vi kjenner a_0, b_0, α og β . Da er utviklingen helt determinert. Vi får nemlig

$$(4) \quad \begin{array}{l} t_0 : \begin{array}{l} a_0 \\ b_0 \end{array} \\ \hline t_1 : \begin{array}{l} a_1 = \alpha \cdot b_0 \\ b_1 = \beta \cdot a_0 \end{array} \\ \hline t_2 : \begin{array}{l} a_2 = \alpha \cdot b_1 = \alpha \cdot \beta \cdot a_0 = \gamma^2 a_0 \\ b_2 = \beta \cdot a_1 = \beta \cdot \alpha \cdot b_0 = \gamma^2 b_0 \end{array} \\ \hline t_3 : \begin{array}{l} a_3 = \alpha \cdot b_2 = \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot a_0 = \alpha \cdot \gamma^2 b_0 \\ b_3 = \beta \cdot a_2 = \beta \cdot \beta \cdot \alpha \cdot b_0 = \beta \cdot \gamma^2 a_0 \end{array} \\ \hline t_4 : \begin{array}{l} a_4 = \alpha \cdot b_3 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma^2 \cdot a_0 = \gamma^4 a_0 \\ b_4 = \beta \cdot a_3 = \beta \cdot \alpha \cdot \gamma^2 \cdot b_0 = \gamma^4 b_0 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \text{o. s. v.}$$

Herav kan vi nu lett bestemme hvad tidsformen på systemets utvikling blir helt generelt. La oss først betrakte kun de tidspunkter hvor t er et like tall, altså t_2, t_4, \dots . Av (4) sees da at vi har

$$(5) \quad \begin{array}{l} a_t = \gamma^t \cdot a_0 \\ b_t = \gamma^t \cdot b_0 \end{array} \quad t = 2n, n = 0, 1, \dots$$

Allerede ved på denne måte å følge de like tall for t får vi frem det vesentlige ved tidsformen i a og b. Forskjellen mellom de like og ulike verdier av t er bare at ved de siste får vi inn en kortcykle omkring den langtidsprogresjon som er definert ved (5). Ved å ta tilfallet: t ulike, får vi nemlig (jfr. (4))

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} a_t = \alpha \cdot \gamma^{t-1} \cdot b_0 = \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{b_0}{a_0} \right] \cdot \gamma^t \cdot a_0 \\ b_t = \beta \cdot \gamma^{t-1} \cdot a_0 = \left[\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{a_0}{b_0} \right] \cdot \gamma^t \cdot b_0 \end{array} \right\} t = 2n-1, n=1, 2, \dots$$

d. v. s. ved hvert ulike tidspunkt kommer der - sammenlignet med den ved (5) givne utvikling - inn en konstant faktor

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{b_0}{a_0} \quad \text{for } a_t \quad \text{og} \quad \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{a_0}{b_0} \quad \text{for } b_t.$$

Denne kortcykle som således svinger mellom annethvert tidspunkt, kan opfattes som en sesong - bevegelse. Det å betrakte bare de like tidspunkter, altså gå ut fra (5), kan opfattes som en metode til å eliminere sesongsvingningene.

(tilsvarende metoder benyttes ofte i statistikken. Arbeidsløsheten i en bestemt måned f. eks. måles ved sammenligning med samme måned tidligere år). Uttrykket for a_t og b_t kan også skrives på formen

$$(7) \quad \begin{aligned} a_t &= a_0 (A_1 + (-1)^t A_2) \cdot \gamma^t \\ b_t &= b_0 (B_1 + (-1)^t B_2) \cdot \gamma^t \end{aligned}$$

hvor

$$(8) \quad \begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{b_0}{a_0} - 1 \right), \quad A_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{b_0}{a_0} - 1 \right) \\ B_1 &= 1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{a_0}{b_0} - 1 \right), \quad B_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{a_0}{b_0} - 1 \right). \end{aligned}$$

I denne form fremtrer langtidsbevegelsen og kortcyklen som additive komponenter. Hovedbevegelsen, (primærkomponenten) er simpelthen en eksponentialfunksjon, $A_1 \cdot \gamma^t$ og sesongbevegelsen (sekundærkomponenten), gitt ved leddet $(-1)^t \cdot A_2 \cdot \gamma^t$, er en cykle med periodelengde på 2 tidsenheter, som altså svinger mellom et maksimum i ett tidspunkt og et minimum i det neste tidspunkt. Amplituden for kortcyklen stiger også eksponentielt.

Denne kortcykle er simpelthen en virkning av at byttet startet på en måte som var uharmonisk i forhold til strukturparametrene α og β . Hvis initialbetingelsene a_0 og b_0 er slik at $\frac{a_0}{b_0} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, vil, som det sees av (8), sekundærbevegelsen forsvinne. Disse sesongsvingninger er derfor av mindre interesse.

La oss som et talleksempel velge $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.4$, altså

$$\gamma = \sqrt{0.9 \cdot 0.4} = 0.6. \quad \text{Det er altså gjennem-}$$

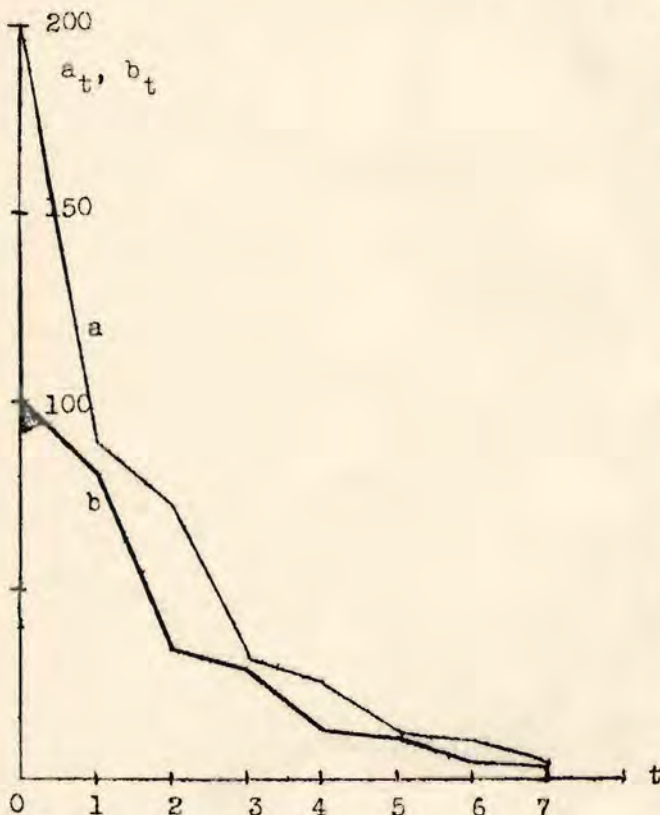


Fig. 1.

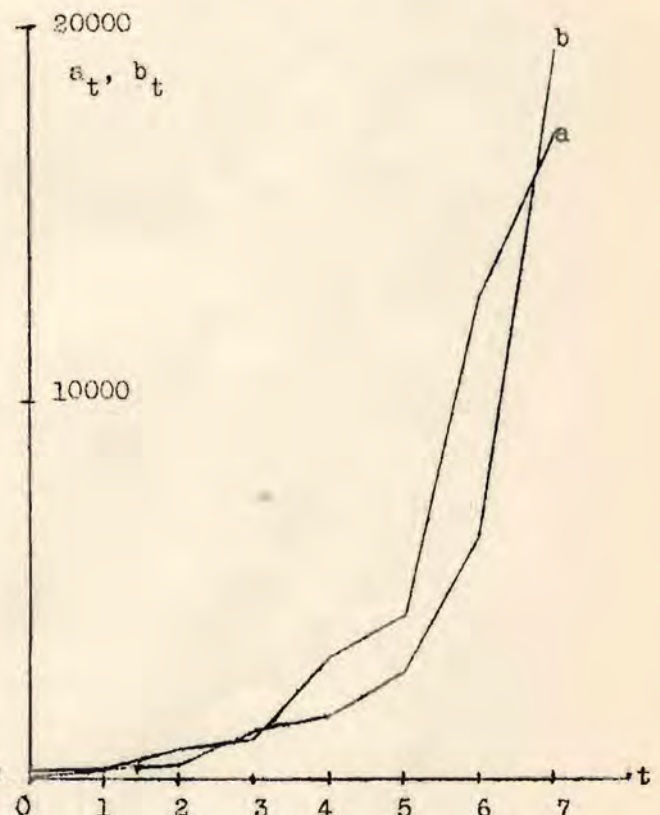


Fig. 2.

snittlig sparestemming i systemet. La oss sette $a_0 = 200$, $b_0 = 100$. Vi får konstantene i (8)

$$A_1 = 0.875, \quad A_2 = 0.125, \quad B_1 = 1.167, \quad B_2 = -0.167$$

og tidsformen

$$\begin{aligned} a_t &= 200 (0.875 + (-1)^t \cdot 0.125) \cdot 0.6^t \\ b_t &= 100 (1.167 + (-1)^t \cdot (-0.167)) \cdot 0.6^t \end{aligned}$$

Tidsformen er grafisk fremstillet i fig. 1. Til sammenligning betraktes et annet tilfelle da der gjennomsnittlig er ekspansjonsstemning. La oss sette $\alpha = 2.67$, $\beta = 1.5$. Dette gir

$$\gamma = \sqrt{2.67 \cdot 1.5} = \text{ca. } 2. \text{ La } a_0 = 200, b_0 = 100$$

Tidsformen for dette tilfelle er grafisk fremstillet i fig. 2.

Selv denne sterkt forenklaede problemstilling viser hvorledes selve innstillingen overfor byttet kan drive hele systemet, enten til ekspansjon eller til undergang. Det at en enkelt person sparer på et gitt tidspunkt vil delvis ta grunnen vekk under den totale omsetning i det neste tidspunkt.

Strukturbetingelsene (1) leder som vi har sett ikke til cykliske bevegelser (bortsett fra sesongsvingningene), utviklingen er stort sett kun beskrevet ved progressive karakteristika.

8552. Virkningen av eksistensminimet ved sirkulasjons-sammenspøring.

I forrige punkt har vi sett hvorledes de to parter, når de er i sparestemning ($\gamma < 1$), sparer hverandres omsetning bort. Det er imidlertid klart at eftersom systemet drives nedover, vil der etter hvert komme inn nye krefter, som motvirker en videre utvikling mot null. En av disse er eksistensminimet. Dette vil øve et motpress mot sparemotivet. De byttende parter kan ikke stadig fortsette med å nedsette kjøpet i direkte proporsjon med nedgangen i deres eget salg. Før eller senere kommer et punkt hvor de må bryte med denne politikk hvad nu enn følgene derav måtte bli. De vil altså før eller senere tvinges til å kjøpe noget mer enn det som formel 1, 8551 utsier.

For å uttrykke denne tendens på en simpel måte kan vi f. eks. beskrive partenes handlemåte ved følgende ligninger

$$(1) \quad \begin{aligned} a_t &= a_* + \alpha \cdot b_{t-1} \\ b_t &= b_* + \beta \cdot a_{t-1} \end{aligned}$$

hvor a_* og b_* er konstanter som avhenger av de respektive eksistensminimi. Vi har altså nu 4 strukturparametre nemlig a_* , b_* , α , β . Også nu kan vi se tidsformen direkte av strukturbetingelsene. La oss igjen starte i initialposisjonen a_0 , b_0 . Av (1) fåes da.

$$(2) \quad \begin{array}{l} t_0 : \\ \hline t_1 : \\ \hline t_2 : \\ \hline t_3 : \\ \hline t_4 : \end{array} \quad \begin{array}{l} a_0 \\ b_0 \\ \\ a_1 = a_* + \alpha b_0 \\ b_1 = b_* + \beta a_0 \\ \\ a_2 = a_* + \alpha b_1 = a_* \gamma^2 + \frac{a_* + \alpha b_*}{1 - \gamma^2} \cdot (1 - \gamma^2) \\ b_2 = b_* + \beta a_1 = b_* \gamma^2 + \frac{b_* + \beta a_*}{1 - \gamma^2} \cdot (1 - \gamma^2) \\ \\ a_3 = a_* + \alpha b_2 = (a_* + \alpha b_0) \gamma^2 + \frac{a_* + \alpha b_*}{1 - \gamma^2} \cdot (1 - \gamma^2) \\ b_3 = b_* + \beta a_2 = (b_* + \beta a_0) \gamma^2 + \frac{b_* + \beta a_*}{1 - \gamma^2} \cdot (1 - \gamma^2) \\ \\ a_4 = a_* + \alpha b_3 = a_* \gamma^4 + \frac{a_* + \alpha b_*}{1 - \gamma^2} \cdot (1 - \gamma^4) \\ b_4 = b_* + \beta a_3 = b_* \gamma^4 + \frac{b_* + \beta a_*}{1 - \gamma^2} \cdot (1 - \gamma^4) \end{array}$$

o. s. v.

Generelt får vi, hvis t er like

$$(3) \quad \begin{aligned} a_t &= a_0 \cdot \gamma^t + \frac{a_* + \alpha b_*}{1-\gamma^2} (1-\gamma^t) \\ b_t &= b_0 \cdot \gamma^t + \frac{b_* + \beta a_*}{1-\gamma^2} (1-\gamma^t) \end{aligned}$$

og

$$(4) \quad \begin{aligned} a_t &= (a_* + \alpha b_0) \cdot \gamma^{t-1} + \frac{a_* + \alpha b_*}{1-\gamma^2} (1-\gamma^{t-1}) \\ b_t &= (b_* + \beta a_0) \cdot \gamma^{t-1} + \frac{b_* + \beta a_*}{1-\gamma^2} (1-\gamma^{t-1}) \end{aligned}$$

når t er ulike. I dette tilfelle vil den sammentrekning av byttet som finner sted når $\gamma < 1$, ikke fullstendig utslette all virksomhet, men vi får en utvikling mot et stasjonsært nivå. Hvis nemlig t vokser over alle grenser, får vi nu når $\gamma < 1$

$$(5) \quad a_\infty = \frac{a_* + \alpha b_*}{1-\gamma^2}, \quad b_\infty = \frac{b_* + \beta a_*}{1-\gamma^2}$$

Heller ikke nu vil vi altså få cykler, men bare en monoton utvikling.

8553. Gjelden som medvirkende faktor ved dannelsen av cirkulasjonscykler.

Vi har hittil ikke tatt noget hensyn til gjeldsforholdet mellom de byttende parter. Den foregående analyse forutsetter naturligvis at der gjøres bruk av kreditt, ellers vilde jo alltid $a_t = b_t$, men vi har ikke tatt noget hensyn til at akkumuleringen av gjelden etterhvert kan komme til å influere på partenes videre innkjøpspolitikk. Den enkleste forutsetning om kredittforholdet er at a skylder til b (eller b skylder til a) differensen mellom alt innkjøp og alt salg i den tid som er gått forut. Av fig. 1,8551 sees at når $\gamma < 1$, vil gjelden, således definert, konvergere mot en bestemt størrelse (nemlig summen av alle differenser op til det tidspunkt da all handel ophører). Når $\gamma > 1$, vil derimot gjelden stige i det uendelige. Vi forutsetter $\alpha \neq \beta$. Dette siste resultat viser tydelig at vårt teoretiske skjema er alt for simpelt til å gi en plausibel forklaring av den langtidsutvikling som faktisk vil finne sted i et slikt tilfelle. For å gjøre systemet mere realistisk, vil vi nu anta at selve gjeldens høide på et bestemt tidspunkt vil påvirke individenes psykologiske innstilling overfor byttet. Virkningen av gjelden vil være følgende.

Set at $\gamma > 1$ og a stadig kjøper mere enn han selger, hans gjeld vokser stadig, hvilket betyr at b 's tilgodehavende stadig vokser. Da er det rimelig at a etter hvert får betenkeligheter ved å fortsette sitt store innkjøp mens b synes han får råd til å bruke litt mer. Før eller senere må der komme et omslag, så a begynner å spare for å tilbakebetale b . Dette vil vi nu søke å presisere på en slik måte at det blir mulig å slutte sig til hvilken tidsform systemet vil utvikle sig efter. Vi må altså søke å opstille et fullstendig determinert system. La oss anta at det i 8551 behandlede system generaliseres til

$$(1) \quad \begin{aligned} a_t &= \alpha b_{t-1} - \lambda G_{t-1} \\ b_t &= \beta a_{t-1} + \mu G_{t-1} \end{aligned}$$

hvor G_{t-1} er a 's totale gjeld, altså

$$(2) \quad G_{t-1} = (a_0 + a_1 + \dots + a_{t-1}) - (b_0 + b_1 + \dots + b_{t-1})$$

mens λ og μ er to nye konstanter som gir uttrykk for den psykologiske virkning av gjelden respektive tilgodehavendet. Det er rimelig å anta at a 's gjeld virker deprimerende på hans kjøp, altså at $\lambda > 0$. Likeså er det rimelig å anta $\mu > 0$.

Ved å velge visse initialbetingelser a_0 , b_0 , G_0 og størrelser på konstantene kan vi regne ut tidsformen på utviklingen skritt for skritt. La oss som eksempel velge $\alpha = 2.0000$, $\beta = 0.3764$, $\lambda = 0.2865$, $\mu = 0.0135$, og la oss gå ut fra initialbetingelsene $a_0 = 10.0000$, $b_0 = 7.0000$, $G_0 = 3.0000$. Da kan vi regne ut a_1 , b_1 , G_1 , nemlig ved formlene (1). Vi får

$$a_1 = 2.0000 b_0 - 0.2865 G_0$$

$$b_1 = 0.3764 a_0 + 0.0135 G_0$$

$$G_1 = G_0 + a_1 - b_1$$

Av a_1 , b_1 , G_1 kan vi videre beregne a_2 , b_2 , G_2 på nøyaktig samme måte som ovenfor. Resultatet av regningen er opført i tabell 1.

Tabell 1

t	a_t	b_t	G_t
0	10.0000	7.0000	3.0000
1	13.1405	3.8045	12.3360
2	4.0747	5.1126	11.2981
3	6.9883	1.6862	16.8002
4	- 1.3836	2.8545	12.3621
5	2.1673	-0.3539	14.8833
6	- 4.9719	1.0167	8.8947
7	- 0.5149	-1.7513	10.1311
8	- 6.4052	-0.0570	3.7829
9	- 1.1978	-2.3598	4.9449
10	- 6.1563	-0.3841	- 0.8073
.	.	.	.
.	.	.	.

Men ved denne fremgangsmåte kan man ikke umiddelbart se hvorledes tidsformen avhenger av strukturparametrene (f. eks. hvorvidt tidsformen blir eksponentiell eller cyklisk). Men vi er nettop interessert i å se hvorledes forskjellige alternativer for strukturparametrene påvirker tidsformen. For å se det må vi forsøke å finne et generelt matematisk uttrykk for tidsformen.

Da viser det seg for det første at man kan eliminere b og G av systemet (1) og således finne en ligning som kun inneholder den søkte tidsfunksjon a og strukturparametrene α , β , λ , μ , men til gjengjeld får man en forbindelse mellom a på ialt fem forskjellige tidspunkter. Vi får følgende ligning:

$$(3) \quad a_{t+4} - (2-\lambda-\mu) \cdot a_{t+3} - ((\alpha+\lambda)(\beta+\mu) - (1-\lambda)(1-\mu)) \cdot a_{t+2} + \\ + ((\alpha+\lambda)\beta + (\beta+\mu)\alpha) \cdot a_{t+1} - \alpha \cdot \beta \cdot a_t = 0$$

Denne ligning blir som man ser uforandret om vi ombytter α og β og samtidig ombytter λ og μ . Også tidsfunksjonen b må derfor tilfredsstille (3).

(3) er en differensligning av fjerde orden. Vi kan naturligvis på lignende måte som før løse denne ligning ved kjederegning (skritt- for skritt- regning). Men dette vilde ikke føre til noget vesentlig nytt, vi må se om vi ikke av (3) kan utsi noget generelt om tidsformen på løsningen a . På lignende måte som tidligere vil vi forsøke om ikkedden søkte tidsfunksjon a er et eksponentialpolynom, altså en tidsfunksjon av formen

$$(3a) \quad a_t = \sum_{\kappa} A_{\kappa} z_{\kappa}^t$$

hvor κ (likesom ved (8544.13)) løper over et visst antall ledd. Istedenfor eksponentene ϱ betrakter vi nu tallene z , men denne forskjell er helt formell, ved å sette $z = e^{\varrho}$ kommer vi nøyaktig over til samme form som vi brukte i (8544.13). Ved å innsette dette uttrykk for a i (3) og bemerke at ligningen skal gjelde på alle tidspunkter t , finner vi at tallene z_{κ} må være løsninger av den karakteristiske ligning

$$(4) \quad z^4 - (2-\lambda-\mu) \cdot z^3 - ((\alpha+\lambda)(\beta+\mu) - (1-\lambda)(1-\mu)) \cdot z^2 + \\ + ((\alpha+\lambda)\beta + (\beta+\mu)\alpha) \cdot z - \alpha \cdot \beta = 0$$

Dette er en fjerdegradsligning i z . Den har fire løsninger, der fremkommer altså fire ledd, $\kappa = 1, 2, 3, 4$ i det foranstående uttrykk (3a) for a_t .

Det sees umiddelbart at (4) er tilfredsstillet for $z = 1$. Følgelig kan vi dividere ligningen med $z-1$. Dette gir den reduserte karakteristiske ligning

$$(5) \quad z^3 - (1-\lambda-\mu)z^2 - (\lambda\beta + \alpha\mu + \alpha\beta)z + \alpha\beta = 0$$

Det at $z = 1$ er en rot i den totale karakteristiske ligning (4) betyr at tidsformen for a_t vil inneholde en konstant \bar{a} . Vi kjenner altså allerede en av komponentene. De øvrige bestemmes ved røttene i den reduserte karakteristiske ligning (5). Det er her to alternativer.

For det første kan ligning (5) ha 3 reelle røtter. La oss f. eks. gå ut fra den karakteristiske ligning

$$(6) \quad z^3 - 0.70 z^2 - 0.98 z + 0.72 = 0.$$

Denne ligning har roten $z_1 = 0.8$. Ved divisjon med $(z-0.9)$ får vi annengradslikningen

$$z^2 + 0.1 z - 0.9 = 0$$

Herav fåes $z_2 = 0.9$, $z_3 = -1$. Denne løsning kan også vises grafisk ved optegning av (6). (Se fig. 1).

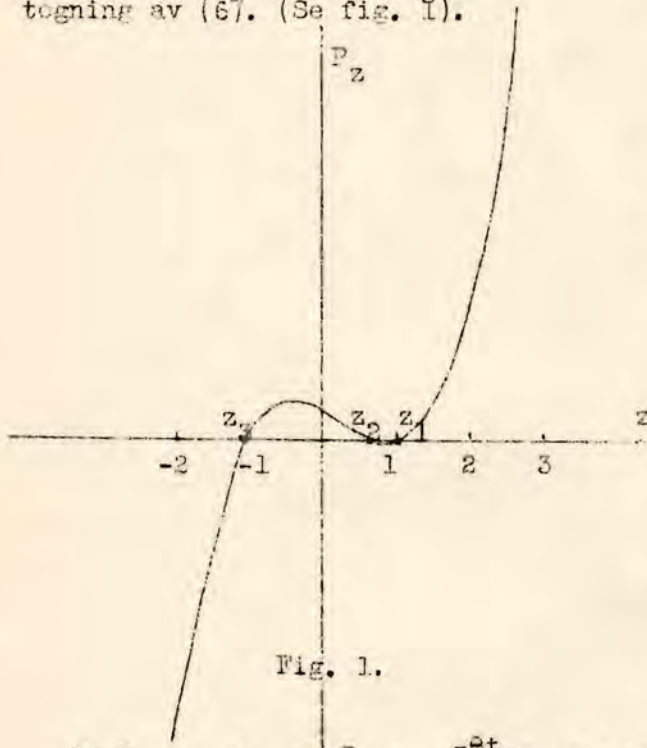


Fig. 1.

$$(6a) \quad a_t = \bar{a} + e^{-\theta t} (H_1 \sin \omega t + H_2 \cos \omega t) + (-1)^t \cdot A \cdot \zeta^t$$

og tilsvarende

$$(6b) \quad b_t = \bar{b} + e^{-\theta t} (K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t) + (-1)^t \cdot B \cdot \zeta^t$$

hvor $H_1, H_2, K_1, K_2, \bar{a}, \bar{b}, A, B$ er konstanter. (I første ligning har vi nu sløifet fotskriften på A , det er ikke lenger nødvendig å skrive A_4). Dempnings-eksponenten θ og frekvensen ω er gitt ved strukturkonstantene, mens de øvrige konstanter også avhenger av initialbetingelsene.

Løsningen (6) kan også skrives på formen

$$(7) \quad \begin{aligned} a_t &= \bar{a} + H \cdot e^{-\theta t} \sin(\phi + \omega t) + A (-1)^t \cdot \zeta^t \\ b_t &= \bar{b} + K \cdot e^{-\theta t} \sin(\psi + \omega t) + B (-1)^t \cdot \zeta^t \end{aligned}$$

hvor nu K og H er to nye konstanter.

Tidsformen på løsningen a_t eller b_t av (3) inneholder altså 3 komponenter. Den første av disse er en konstant, henholdsvis \bar{a} og \bar{b} . Den annen er en dempet sinusbølge. Periodelengde og dempning er felles for a og b (dempnings-eksponent θ , periode $= p = 2\pi/\omega$), mens amplitude og fase er forskjellige. H og K er amplitudene, ϕ og ψ er fasene. Den tredje komponent er en kortcykle som springer mellom et maksimum i ett tidspunkt og et minimum i det neste (positiv eller negativ eftersom t er like eller ulike), ζ^t er dempningen for denne cykle.

La oss som eksempel gå ut fra de strukturparametre som blev anvendt under skritt- for skritt- regningen i tabell 1. Med disse konstanter kan den karakteristiske ligning (5) skrives

$$z^3 - 0.7 z^2 - 0.8876 z + 0.7527 = 0$$

I dette tilfelle får altså a_t tidsformen

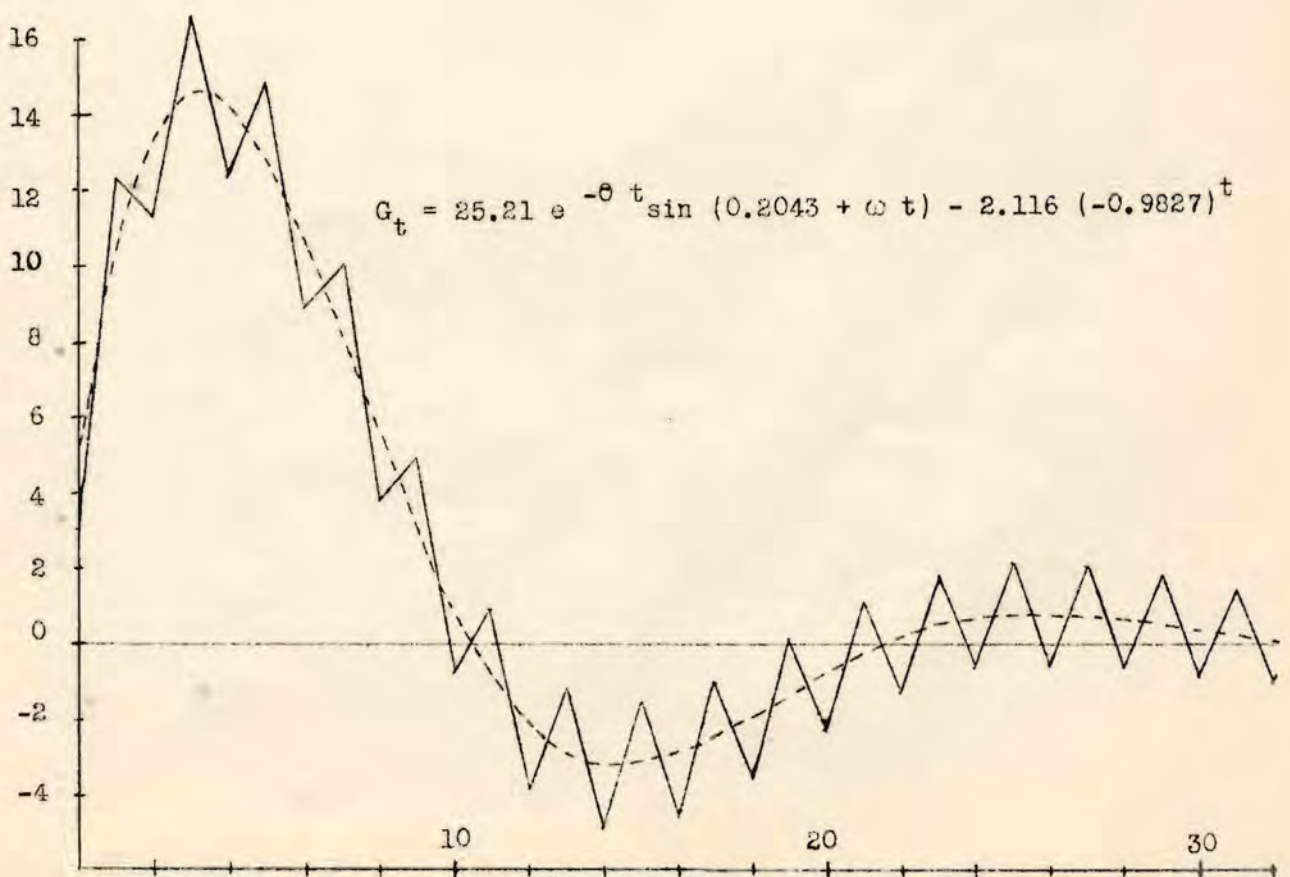
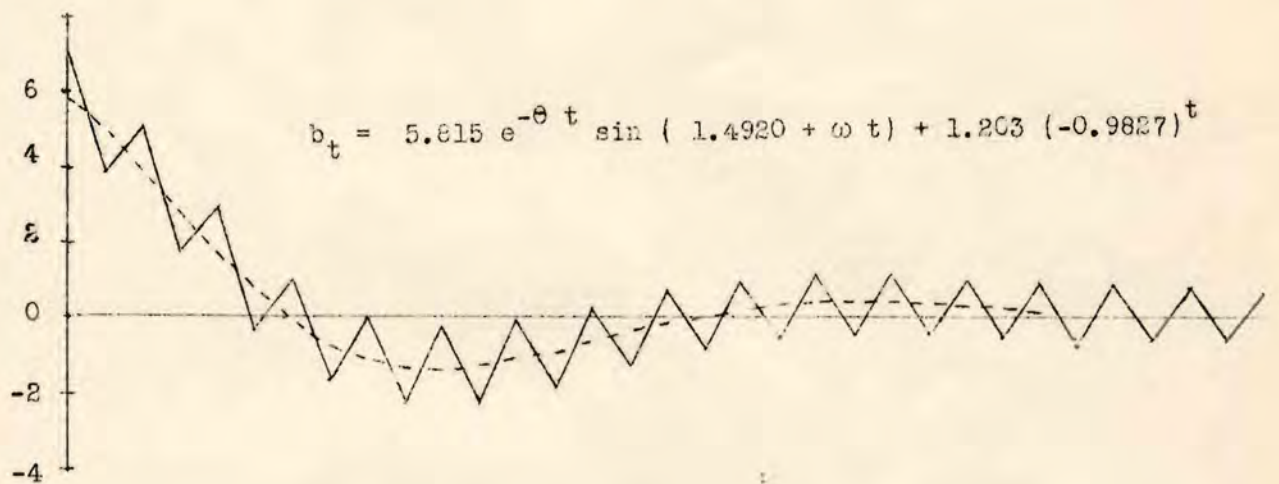
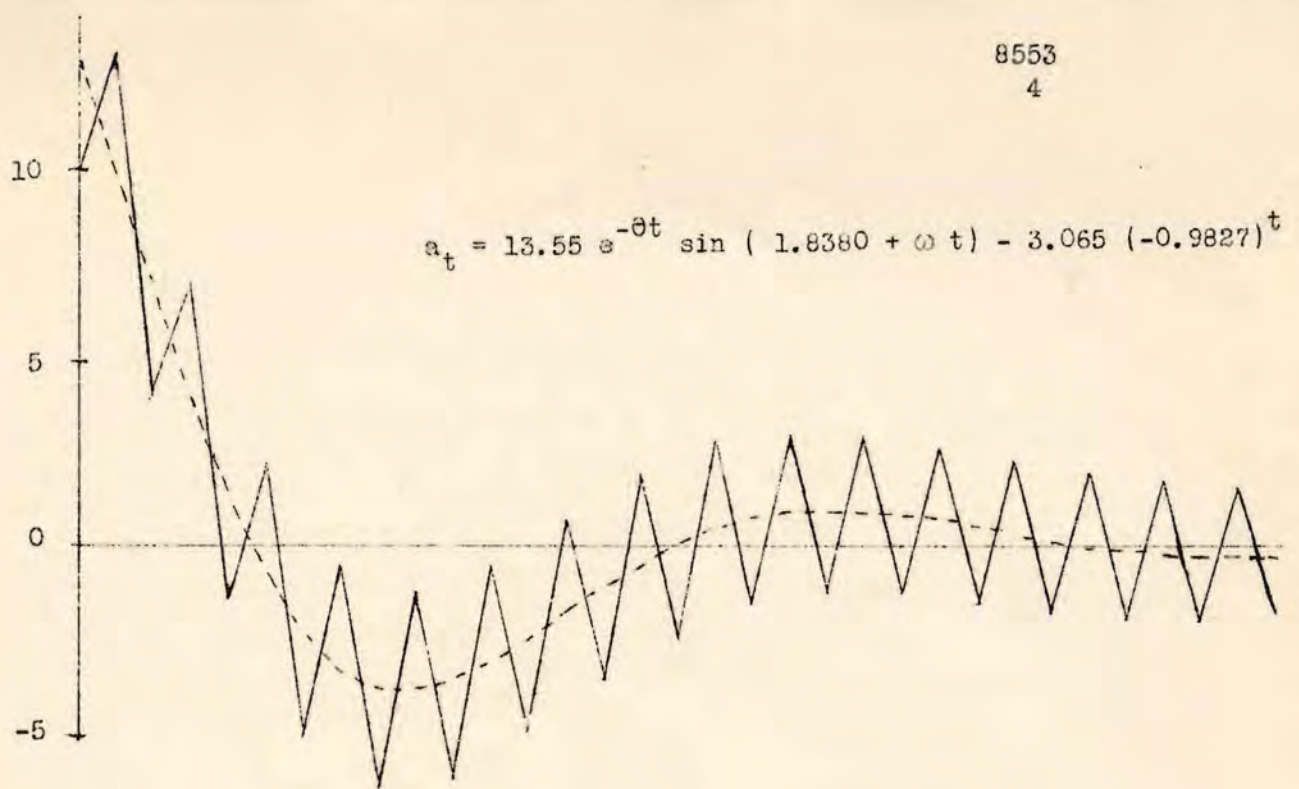
$$a_t = A_1 \cdot 1^t + A_2 \cdot 0.8^t + A_3 \cdot 0.9^t + A_4 \cdot (-1)^t$$

idet vi jo også, foruten de tre her funne røtter, må regne med den forannevnte rot $z = 1$. A -ene er konstanter som bestemmes ved å velge visse initialbetingelser a_0, b_0, G_0 .

For det annet kan (5) ha en reell rot og to konjugert imaginære røtter (se herom 8544). Det kan vises at dersom α og β forutsettes positive, må alltid denne ene reelle rot bli negativ. La denne negative rot være $Z = -\zeta$. De to konjugert imaginære røtter kan skrives på formen

$$z = e^{-\theta} (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$

Innføres dette så antar a_t tidsformen



F i g. 2.

Denne ligning har en reell rot nemlig

$$z_3 = -0.9827 = -c$$

og to konjugert imaginære røtter, nemlig

$$z_1 = 0.8413 + i.0.2412 = e^{-0.1333} (\cos \omega + i \sin \omega)$$

$$z_2 = 0.8413 - i.0.2412 = e^{-0.1333} (\cos \omega - i \sin \omega)$$

hvor altså $\theta = 0.1333$ og $\omega = 0.2793$, altså $p = \frac{2\pi}{0.2793} = 22.5$. Hvis man går ut fra initialbetingelsene i tabell 1, altså $a_0 = 10.0000$, $b_0 = 7.0000$, $G_0 = 3.0000$, får man tidsformen

$$a_t = 13.55 e^{-\theta t} \sin(1.8380 + \omega t) - 3.065 (-0.9827)^t$$

(8)

$$b_t = 5.815 e^{-\theta t} \sin(1.4920 + \omega t) + 1.203 (-0.9827)^t$$

Det viser sig - hvad man måtte vente - at også gjeldens tidsform blir en utvikling med samme slags komponenter som a og b. Vi får nemlig

$$(9) \quad G_t = 25.21 e^{-\theta t} \sin(0.2043 + \omega t) - 2.116 (-0.9827)^t$$

Disse tidskurver er grafisk fremstillet i fig. 2.

8554. Forskjellige talleksempler som viser hvorledes de cycliske karakteristika (periode, dempning etc) avhenger av strukturparametrene, (de byttende parters optimisme etc.).

Fordelen ved den generelle matematiske løsning av tidsformen som vi diskuterte i slutten av 8553 er at man får oversikt over sammenhengen mellom tidsformens karakteristika og strukturparametrene. Ved hjelp av den karakteristiske ligning kan man regne ut hvad periodelengdene og dempningene blir for en rekke alternativer for strukturparametrene.

Tabell. 1

Eksempel nr.	Hvis strukturparametrene er				vil tidsformens karakteristika bli		
	α	β	λ	μ	Cyklens lengde $p = \frac{2\pi}{\omega}$	Dempningsfaktor pr. periode $e^{-\theta p}$	Den reelle rot $-c$
1	2.00	0.50	0.56	0.04	20	0.10	-1.3
2	1.50	0.584	0.274	0.0262	30 ₁	0.05	-1.07
3	2.00	0.376	0.28	0.013	22 ₂	0.05	-0.98
4	2.00	0.36	0.25	0.05	30 ₂	0.01	-0.95
5	3.00	0.29	0.29	0.003	30	0.05	-0.95
6	2.048	0.433	0.158	0	30	0.165	-1.0
7	6.428	0.1465	0.102	0	30	0.407	-1.0
8	2.734	0.364	0.0088	0	120	0.698	-1.0
9	1.350	0.739	0.0023	0	360	0.698	-1.0

La oss f. eks. betrakte nr. 5 i tabell 1. Her er a (skomakeren) i ekspansjonsstemning ($\alpha = 3.0$) mens b (bonden) vil spare ($\beta = 0.29$); samtidig er a temmelig følsom overfor forandringer i hans gjeldssituasjon ($\lambda = 0.29$), b derimot ikke ($\mu = 0.003$). Resultatet er en cykle med temmelig sterk dempning, efter en periode er hare 5 % av amplituden tilbake.

I det næste eksempel, nr. 6, er kjøpelysten respektive sparelysten mindre sterk hos de to parter, og de er begge mindre følsomme overfor forandringer i gjeldssituasjonen. Resultatet er en cykle med svakere dempning, efter en periode er der ennu tilbake 16.5 % av amplituden. Denne tendens er ennu mere fremtredende i eksempel 9. I dette eksempel er forskjellen mellom partenes "ekspansjonsstemning" ikke stor ($\alpha = 1.35$, $\beta = 0.739$) og ingen av partene tar synderlig hensyn til forandringer i gjelden. I dette tilfelle fremkommer en cykle med meget liten dempning (ca. 30 % pr. periode). Eks. 3 er det tilfelle som er gjengitt grafisk i fig. 2, 8553.

I eks. 8 og 9 er periodelengdene meget større enn ved de øvrige eksempler.

Siden tidsenhetsen kan velges vilkårlig, kan de lange perioder i disse eksempler simpelthen betraktes som uttrykk for at byttetransaksjonene her foregår mere fritt. Også i denne henseende er de siste eksempler mere realistiske enn de øvrige.

8555. Cirkulasjonssvingninger vedlikeholdt av erratiske støt.

Den teoretiske løsning blir forskjellig alt etter valget av strukturparametre, men alle de løsninger vi har diskutert har det til felles at de er dempet. Også i dette tilfelle kan bevegelsene tenkes vedlikeholdt ved tilfeldige støt. Konkret kan disse her fortolkes som en serie tilfeldige begivenheter der bevirker at kjøper og selger ikke handler nøiaktig i overensstemmelse med strukturbetingelsene. Solve teknikken ved innføringen av de erratiske støt i systemet er fullstendig analog den vi tidligere har anvendt: Den dempede løsning som følger av den dynamiske teori, gir bare vektsystemet for det bevegelige gjennomsnitt ved hvilket støtene kumuleres. Til illustrasjon er i fig. 1 angitt den tidskurve som fremkommer når en serie erratiske støt rammer det system der er opført i 3dje linje i tabell 1 8554. (Vi bortser her fra den konstante komponent samt sesongsvingningene). Som erratiske støt er anvendt en tilfeldig variabel konstruert på grunnlag av endesifre ved trekninger i Det norske pengelotteri. Støtene tenkes for enkelhets skyld fordelt ekvidistant med 16 støt pr. periode. Som fig. 1 viser er dette fullt tilstrekkelig til å vedlikeholde bevegelsen.

856. Profittakkumulering som faktor i konjunkturforløpet.

I denne paragraf betrakter vi igjen et nytt alternativ for et makrodynamisk system. Vi fester nu oppmerksomheten ved den ting at selve eksistensen av profitt som søker investering vil være en kraft der kan drive systemet til ekspansjon, til kontraksjon eller til cykliske bevegelser.

8561. Et forenklet system som illustrerer arten av de begreper der kommer til anvendelse ved studiet av profittcykler.

Vi opererer nu med følgende fundamentalvariable:

- x = produksjonen av konsumvarer pr. tidsenhet.
- y = produksjonen av kapitalgjenstander pr. tidsenhet.
- W = kapitalstocken = den samlede mengde av realkapital som er tilstede.
- r = profitten pr. tidsenhet.

Alle disse variable er å betrakte som realbegreper, vi tar foreløpig ikke hensyn til prisvariasjoner. Størrelsene tenkes målt ved et eller annet slags indekstall.

Vi pålegger følgende forenklande forutsetninger. For det første vil vi anta at der bare eksisterer to grupper av økonomiske individer, nemlig driftsherrer og arbeidere. Dernest vil vi anta at driftsherrenes konsumsjon er forsvinnende i forhold til arbeidernes, vi setter driftsherrenes konsumsjon = 0. Der er altså kun en konsumentgruppe i samfundet, nemlig arbeiderne. På den annen side vil vi anta at arbeiderne intet sparer. All sparing utføres av driftsherrene. Begrepene driftsherre og kapitalist faller altså sammen, vi tar begrepet driftsherre i den klassiske betydning av kombinert kapitalist og entreprenør. Vi har å gjøre med to slags produksjon, nemlig konsumvareproduksjon og kapitalproduksjon. I forbindelse med de forutsetninger vi har presisert ovenfor vil det være naturlig å anta at profitten er et begrep som kun beregnes i konsumvareproduksjonen, d. v. s. driftsherrenes egentlige formål er kun å produsere konsumvarer. Det at de må investere i kapitalgjenstander, betraktes altså bare som et indre anliggende for driftsherren, et spørsmål om driftsherrens nærmere handlemåte for å ta vare på profitten. I praksis vil der naturligvis også forekomme profitt i kapitalproduksjonen. I et annet makrodynamisk system kan dette gjerne gjøres til en av hovedbetingelsene. I det system som her betraktes får vi imidlertid frem de ting som er vesentlige, uten å trekke inn begrepet profitt i kapitalproduksjonen.

Hvorledes vil nu profitten i konsumvareproduksjonen bli å beregne? Den avhenger for det første av visse produksjonstekniske betingelser og for det annet av arbeidslønnens høide. Mest generelt vilde det være å gå ut fra en produktfunksjon, altså en relasjon som viser samvariasjonen mellom faktormengde og produktmengde og så studere tilpasningen via substitusjonen. Her skal vi imidlertid kun anta at der eksisterer et teknisk gitt blandingsforhold mellom

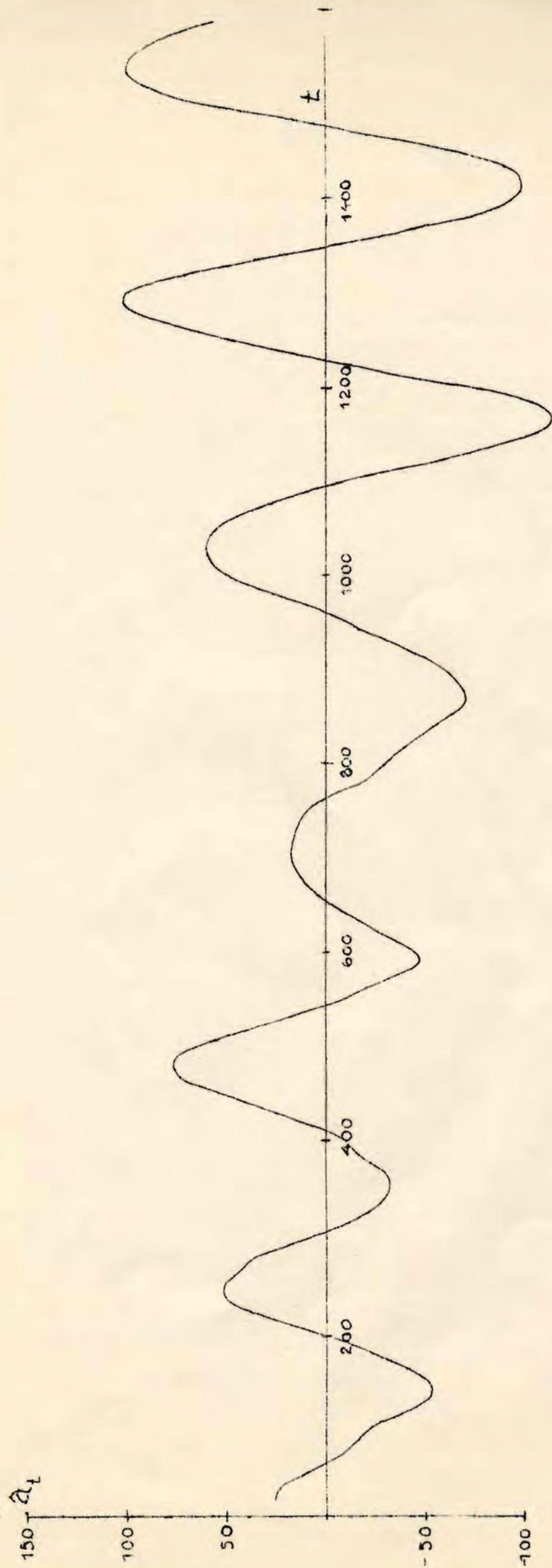


Fig. 1.

arbeide og kapital som er karakteristisk for produksjonen, og dessuten at mengden av produktet derved er gitt. Arbeidslønnen antas også gitt. Vi betrakter derfor følgende størrelser som data i analysen:

- ω = arbeidslønn i konsumenheter (hl. korn) pr. arbeidsdag.
 a = arbeidskoeffisienten i konsumvareproduksjonen, d. v. s. det antall arbeidsdager som er inkorporert i hver konsumvareenhet (f. eks. 1 hl. korn).
 (1) b = arbeidskoeffisienten i kapitalproduksjonen, d. v. s. det antall arbeidsdager som er inkorporert i hver enhet kapitalgjensstander.
 h = slitningsprocenten i konsumvareproduksjonen, d. v. s. direkte slitning på kapitalen for å produsere 1 enhet konsumvarer.
 k = slitningsprocenten i kapitalproduksjonen, d. v. s. direkte slitning på kapitalen for å produsere 1 enhet kapitalgjensstander. Der fremkommer imidlertid også en indirekte slitning, nemlig på den kapital som brukes for å reproducere slitningen i første omgang. Denne nye slitning må igjen erstattes, hvilket betyr ny slitning o.s.v. Den totale direkte og indirekte slitning blir (se 8511, (9))

$$(2) \quad m = \frac{h}{1-k}$$

Da vi her ikke regner med noen særskilt kapitalrente, men tar denne inn under begrepet profitt, blir selve kapitalholdet ikke noget omkostningsmoment. Derimot er selvfølgelig h og k omkostningsmoment.

I sin produksjonspolitik vil nu driftsherron resonnere på følgende måte: Hvis der skal produseres x konsumvareenheter pr. år, vil dette medføre en total slitning på

$$(3) \quad \frac{h}{1-k} \cdot x \text{ kapitalenheter}$$

Dette er et omkostningsmoment. Hvor meget arbeide må til for å reproducere denne slitning? Dette blir

$$(4) \quad b \cdot \frac{h}{1-k} \cdot x \text{ arbeidsdager}$$

(jfr. definisjonen av b). De indirekte omkostninger ved produksjon av x konsumvareenheter blir altså

$$(5) \quad \omega \cdot b \cdot \frac{h}{1-k} \cdot x \text{ konsumvareenheter.}$$

idet ω er arbeidslønnen i konsum-enheter pr. arbeidsdag. Hertil kommer direkte utgift til arbeidslønn i konsumvareproduksjonen, nemlig

$$(6) \quad \omega \cdot a \cdot x \text{ konsum-enheter}$$

Alt ialt blir altså de direkte og indirekte utgifter

$$(7) \quad \omega \cdot a \cdot x + \omega \cdot b \cdot \frac{h}{1-k} \cdot x \text{ konsum-enheter.}$$

Den samlede profitt ved produksjonen av x konsum-enheter pr. år blir da

$$(8) \quad r = x - \omega \left(a + b \frac{h}{1-k} \right) \cdot x = \left(1 - \omega \left(a + b \frac{h}{1-k} \right) \right) x$$

og profitt pr enhet produsert

$$(9) \quad \rho = \frac{r}{x} = \left(1 - \omega \left(a + b \frac{h}{1-k} \right) \right)$$

Hvis altså ω og de tekniske koeffisienter er gitt, vil profitten også være gitt. Det viktige spørsmål er nu hvad driftsherrerne gjør med profitten. Vi forutsetter at det som blir profitt ved produksjonen brukes til å betale nye arbeidere i kapitalproduksjonen. Der skjer altså ingen opsamling av konsumvareforråd. Denne forutsetning uttrykkes ved investeringsligningen:

$$(10) \quad y = \frac{h}{1-k} \cdot x + \frac{r}{\omega \cdot b}$$

total investering = reinvestering + nyinvestering.

For r konsumvare-enheter kan der nemlig kjøpes $\frac{r}{\omega}$ arbeidsdager og dermed produseres $\frac{r}{\omega \cdot b}$ enheter kapitalgjenstander. Den i investeringsligningen uttrykte forutsetning er helt vesentlig. Av den følger at den samlede årlige produksjon av konsumvarer alltid i sin helhet utdeles til arbeiderne enten som lønn i kapitalproduksjonen eller som lønn i konsumvare-produksjonen. $\frac{r}{\omega \cdot b}$ er altså den totale sparing i samfundet.

Den forutsetning som ligger i (10) kan også uttrykkes på en annen måte. La oss betrakte kapitalens nettotilvekst pr. år, \dot{W} . Den årlige nyinvestering var $\frac{r}{\omega \cdot b}$. Dette er imidlertid ikke kapitalens nettotilvekst, vi må trekke fra slitet på kapitalstocken. Nettotilveksten blir da

$$(11) \quad \dot{W} = (1 - k) \frac{r}{\omega \cdot b}$$

Det er lett å se at dette inneholder samme forutsetning som (10). La oss nemlig helt generelt betrakte kapitalstockens tilvekstgrad pr. år

$$(12) \quad \dot{W} = y - (h \cdot x + k \cdot y) = (1 - k) \cdot y - h \cdot x$$

Innføres her den spesielle forutsetning (10) fåes

$$(13) \quad \dot{W} = (1 - k) \left(\frac{h}{1 - k} x + \frac{r}{\omega \cdot b} \right) - h \cdot x = (1 - k) \frac{r}{\omega \cdot b}$$

Det å anta at all profitt går til nyinvestering er altså ensbetydende med å forutsette at nettotilveksten i kapitalstocken blir

$$(1 - k) \frac{r}{\omega \cdot b}$$

Den forutsetning som ligger i (10) kan uttrykkes også på en tredje måte, nemlig ved avsetningsligningen:

$$(14) \quad x = \omega (a x + b y)$$

Efter våre forutsetninger blir nemlig den totale lønn den totale kjøpekraft i samfundet. Alle konsumvarer blir arbeidslønn. At forutsetningen (14) er ensbetydende med (10) sees ved i (10) å innføre uttrykket for r . Dette gir nemlig

$$y = \frac{h}{1 - k} x + \frac{r}{\omega \cdot b} = \frac{h}{1 - k} x + \frac{(1 - \omega(a + b \frac{h}{1 - k}))}{\omega \cdot b} \cdot x$$

eller

$$x = \omega (a x + b y)$$

Av ligningene (8), (11) og (14) følger videre

$$(15) \quad y = \frac{1 - \omega \cdot a}{\omega \cdot b} \cdot x$$

$$(16) \quad r = (1 - \omega (a + b \frac{h}{1 - k})) \cdot x$$

$$(17) \quad \dot{W} = \left(\frac{1 - \omega \cdot a}{\omega \cdot b} (1 - k) - h \right) \cdot x$$

Både y , r og \dot{W} er altså proporsjonale med x . Likegyldig hvilken utvikling systemet følger, må der altså mellom y , r , \dot{W} og x bestå relasjonene (15), (16) og (17).

Disse relasjoner fremstilles grafisk ved en rett linje, f. eks. som antydnet i fig. 1. Tilsvarende rette linjer kan trekkes i (r, x) og i (\dot{W}, x) - koordinatene. Vi har nu tre ligninger nemlig (15), (16) og (17) mellom de fire ukjente x , y , r og \dot{W} . Problemet er altså ennå ikke fullt determinert, men vi har innnevret frihetsgraden for de variable. For å gjøre systemet determinert, kunde vi innføre en ny betingelse om produksjonspolitikken, f. eks. produksjonspolitikken ligning fra 8512, altså

$$(18) \quad y = m x + p \dot{x}$$

Ligning (15) i forbindelse med (18) gir

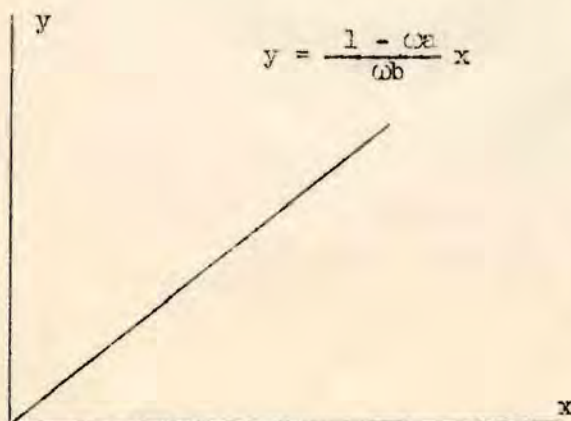


Fig. 1.

$$(19) \quad \dot{x} = \left(\frac{1 - \omega a}{\omega \cdot b \cdot \eta} - \frac{m}{\eta} \right) \cdot x$$

Vi får altså nu en utvikling som en kapital satt på rente (uten cykliske beve-
gelser).

Vil denne utvikling gå opover eller nedover? Dette kan sees ved
betraktning av strukturbetingelsene. Av (11) sees direkte at vi får en ekspan-
sjon når profitten r er positiv og omvendt en kontraksjon når r er negativ. Dette
er i overensstemmelse med forutsetningen om at all profitt går til kapital-
investering. Men når de tekniske koeffisienter er gitt, vil profitten pr. produ-
sert enhet, $\frac{r}{x}$, kun avhenge av ω (se (9)). Da x må antas positiv, er det like-
gyldig for bestemmelsen av r 's fortegn om vi betrakter r eller $Q = \frac{r}{x}$.

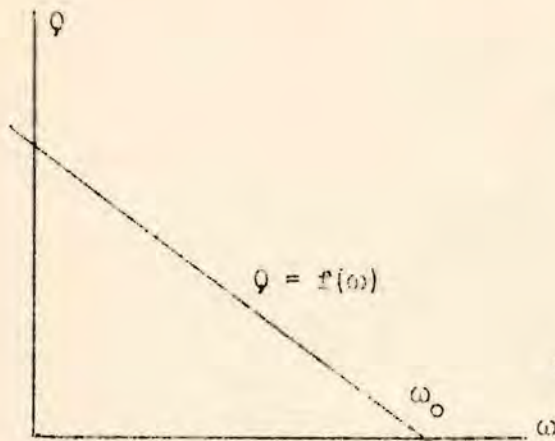


Fig. 2

pet kapitalrente, og visse spesielle betingelser om produksjonspolitikken.

Q kan fremstilles grafisk som funksjon av ω . Se fig. 2. Linjens skjæringspunkt med den horisontale akse angir den størrelse av ω for hvilken profittrenten $Q = 0$. Ivorvidt dette system skal ekspandere eller snøre sig sammen avhenger altså av arbeidslønnen. Vi har ekspansjon ($Q > 0$) når $\omega < \omega_0$ og kontraksjon ($Q < 0$) når $\omega > \omega_0$. Dette illustrerer en meget viktig ting, nemlig den at i praksis kan og under våre betingelser vil en nødset-
telse av arbeidslønnen bety øket sparing, fordi profitten derved økes. Hermed er ikke sagt noget om hvor meget mindre enn ω_0 ω må være for å gi en optimal kombinasjon av sparing og forbruk. Dette blir et vurderingsproblem som ikke kan løses tilfredsstillende uten å trekke inn begre-

8562. Et stasjonsært system hvor profitten opsamles i form av forråd. Maksimalisering av arbeidernes andel av totalproduktet.

I punkt 8561 betraktet vi det tilfelle hvor sparingen skjer i form av fast kapital, men hvor der ikke opsamles forråd. Nu skal vi betrakte det tilfelle da sparing skjer i form av forrådsdannelse.

La Z være forrådet av konsumgoder. Vi forutsetter at der kun produ-
seres en vare (f. eks. korn), videre at der ikke trenges fast kapital i produk-
sjonen, den eneste produksjonsfaktor er arbeidet. Forutsetningen om at arbeidene ikke sparer, men kun konsumerer og at driftsherrene kun sparer, men ikke konsume-
rer, opprettholdes som i 8561. Sparingen kan nu kun ta form av dannelse av et forråd av konsumvarer. For å presisere forutsetningene kan vi tenke oss at driftsherrenes motiv til sparingen er en slags glede ved å se konsumvare-forrådet (kornhaugen) vokse, altså en slags samlemani. Denne tankegang overført på et moderne samfund er kanskje ikke så helt urealistisk som den kan synes ved første øikast.

Da vi nu ikke har nogen fast kapital, blir det ikke tale om nogen slitning. Vi får altså med betegnelsene fra 8561

$$(1) \quad r = (1 - a\omega)x \quad \text{eller}$$

$$(2) \quad Q = \frac{r}{x} = (1 - a\omega)$$

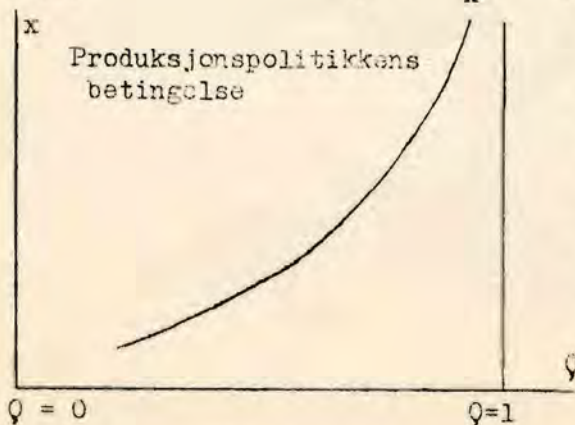


Fig. 1

La oss tenke oss at profitten pr. konsum-
varenehet er det drivmotiv som ligger bak driftsherrenes produksjonsvirksomhet, slik at produksjonen stiger når profitten pr. konsumvarenehet stiger. Grafisk kan denne produksjonspolitikens betingelse illu-
streres som i fig 1. Da der til enhver verdi av Q ved (2) svarer en bestemt verdi av ω (når arbeidskoeffisienten a er gitt), kan vi følgelig like godt frem-
stille produksjonspolitikken i dens avhengig-
het av ω , altså som i fig. 2.

Fig. 2 illustrerer på en gang arbeidernes og driftsherrenes motiv til

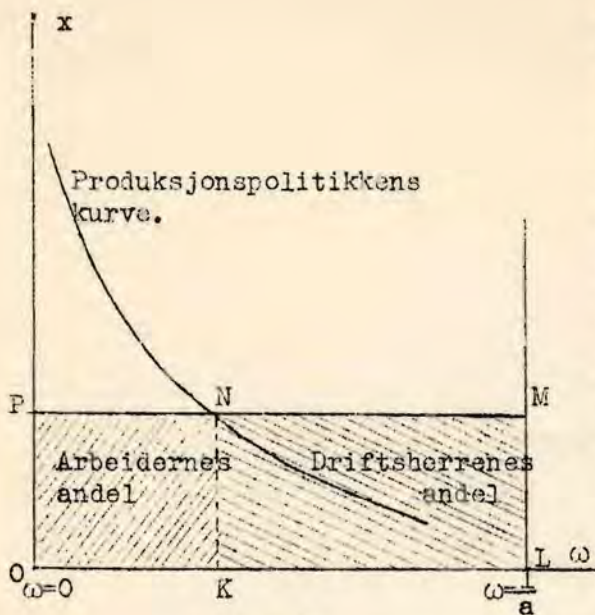


Fig. 2

er selvfølgelig interessert i høiest mulig lønn - såsant han er sikret arbeide-. En heving av lønnen kan imidlertid bety mindre andel for arbeiderklassen som helhet. Arealet til venstre i fig. 2 vil nemlig, når punktet N beveger seg mot høyre, få sin grunnlinje øket, men sin høyde nedsatt. Fallhastigheten på produktkurven avgjør om lønnshevingen, under forutsetning av den gitte produksjonspolitik, skal bli en fordel for arbeiderklassen som helhet, eller ikke. Vi får her et lignende tilpasningsproblem som ved monopolprisdannelsen. Det gjelder for arbeiderklassen som helhet å gjøre arealet OMKP størst mulig. Dette er ensbetydende med å finne et punkt på kurven hvor elastisiteten er -1. Betingelsen om maksimal andel for arbeiderklassen kan altså skrives

$$(3) \quad \left(- \frac{v}{x} \right) = 1$$

hvor v er fleksibilitets symbolet. Hvis arbeiderklassen har makt til å gjennomføre en slik lønn, vil systemet utvikle seg jevnt. Der vil da hvert år bli produsert en varemengde representert ved det samlede skraverte areal i fig. 2, herav vil den høire side representere en del som ikke blir utnyttet men simpelthen hvert år legges til kornhaugen. Det er en "krigsomkostning" som arbeiderne - under den gitte form på produksjonspolitikens kurve - må betale for at produksjonen skal holdes vedlike. For en høyere arbeidslønn vilde denne "krigsomkostning" bli mindre, men totalproduksjonen vilde lide et ennu sterkere skår, så arbeiderne alt ialt ikke vilde stå sig på det.

Under de her nevnte forutsetninger vil der altså ikke opstå nogen utvikling i systemet, det vil være stasjonært. Ved å gjøre forutsetningene litt mer kompliserte vil der imidlertid, som vi nu skal se, fremkomme krefter som skaper en bevegelse i systemet.

8563. Et mere generelt system hvor profitten opsamles i form av forråd. (Med en anmerkning om betingelsen for løsbarehet av et homogent ligningssystem).

Vi generaliserer for det første forutsetningene derhen at vi antar at forrådet av konsumvarer er utsatt for et naturlig svinn på $\mu \%$ pr. tidsenhet. Dette bevirker en negativ tilvekst i forrådet

$$(1) \quad \dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = - \mu Z \quad (\text{når der ikke kommer ny tilvekst ved produksjon}).$$

Svinprocenten μ forutsettes positiv.

Hvis der i et gitt øieblikk eksisterer en positiv driftsprofitt $Q \cdot x$, så vil dette inneholde en tendens til å øke lageret. Vi forutsetter jo nemlig at all profitt må investeres i en økning av kornhaugen. Den samlede tilvekst pr. tidsenhet i "kornhaugen" blir altså

$$(2) \quad \dot{Z} = Q \cdot x - \mu Z = \text{lagerets nettotilvekst}.$$

Hvis vi oppfatter $Q \cdot x$ som en bruttoprofitt, kan \dot{Z} definert ved (2) oppfattes som en nettoprofitt. Denne blir altså den tilvekst som fremkommer i lageret efter at der er gjort fradrag for det naturlige svinn.

For å formulere produksjonspolitikken ligning innfører vi nu begrepet driftsherrrens ekspansjonsraskhet. Det er naturlig å anta at driftsherrren vil skynde sig desto mere med å øke produksjonen jo større nettoprofitten \dot{Z} er. La \dot{x} være produksjons-accelerasjonen, (x er produksjonshastigheten, altså produksjonen pr. tidsenhet). Som en første tilnærning kan vi anta at der er simpel proporsjonalitet mellom \dot{x} og \dot{Z} , altså

$$(3) \quad \dot{x} = \lambda \cdot \dot{Z}$$

hvor λ er en konstant som karakteriserer ekspansjonsraskheten. Hvis λ er liten, betyr det at driftsherrrens må ha et temmelig "hardt slag i hodet" (stor \dot{Z}) for å øke produksjonen. En stor λ betyr derimot at produksjonen lett accelererer selv ved en liten stigning i netto-profitten. Sett f. eks. at $\lambda = 0.2$. Betingelsen for en produksjonsaccelerasjon $\dot{x} = 100$ er da $\dot{Z} = 500$. Sett derimot at $\lambda = 2$. Utsikten til en nettoprofitt $\dot{Z} = 50$ er da tilstrekkelig til å fremkalle en produksjons-

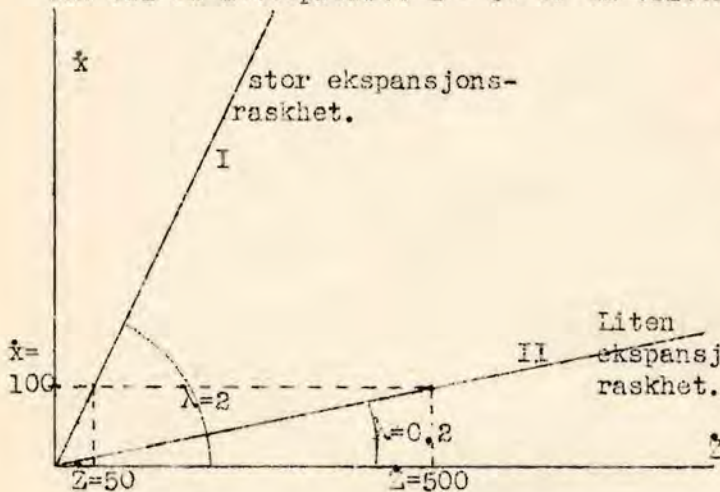


Fig. 1

og la oss gå ut fra en initialposisjon $x_0 = 200$, $Z_0 = 400$ på tidspunktet t_0 . Av (4) finnes da $\dot{x}_0 = 2.5 \cdot 0.3 \cdot 200 - 2.5 \cdot 0.01 \cdot 400 = 140$ og $\dot{Z}_0 = 0.3 \cdot 200 - 0.01 \cdot 400 = 56$. \dot{x}_0 og \dot{Z}_0 er forskyvning pr tidsenhet i henholdsvis x - og Z - retning i situasjonsdiagrammet, d. v. s. komponentene for den forskyvning som vil skje i situasjonsdiagrammet i løpet av den neste tidsenhet $t_1 - t_0$ (se fig. 2). På tidspunktet t_1 vil vi da - om vi antar at tidsenheten er tilstrekkelig liten til at vi kan regne med lineær interpolasjon - befinne oss i situasjonen $x_1 = 200 + 140 = 340$, $Z_1 = 400 + 56 = 456$. I denne nye situasjon vil accelerasjonene x og Z ved (4) bli lik $\dot{x}_1 = 2.5 \cdot 0.3 \cdot 340 - 2.5 \cdot 0.01 \cdot 456 = 243,60$, $\dot{Z}_1 = 0.3 \cdot 340 - 0,01 \cdot 456 = 97,44$. Følgelig vil vi på tidspunktet t_2 befinne oss i situasjonen $Z_2 = 456 + 97,44 = 553,44$, $x_2 = 340 + 243,6 = 583,60$ o. s. v.

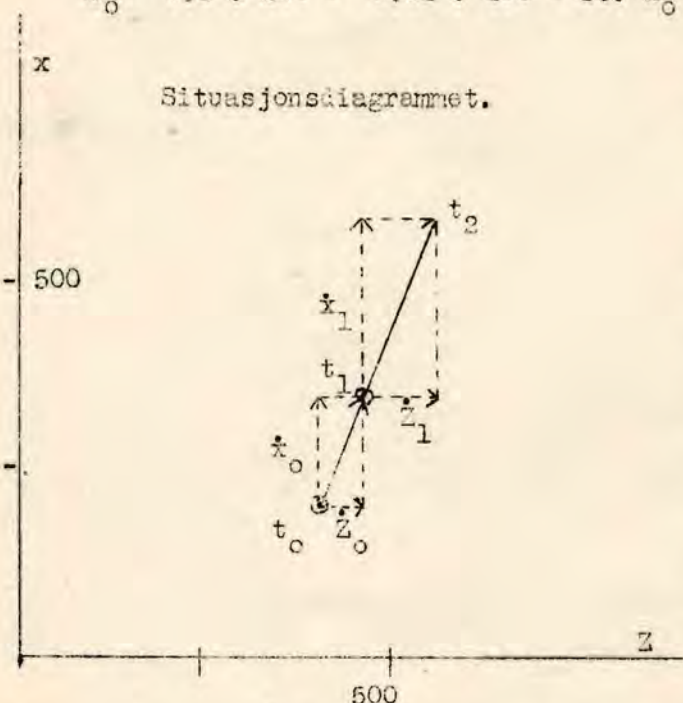


Fig. 2

rett linje idet vi har $\dot{x} = \lambda \cdot \dot{Z}$. Såsant initialposisjonen er gitt, er altså den historiske kurve i (x, Z) -diagrammet gitt. Problemet er da kun å finne med hvilken hastighet punktet (x, Z) vil bevege sig frem (og eventuelt tilbake) langs den historiske kurve. Denne bevegelse vil bestemme formen på x og Z tatt hver for sig som tidskurver.

Av formen på strukturbetingelsene kan vi se at systemet på en eller annen måte vil utvikle sig eksponentielt, (at der altså kun blir en bevegelse frem, men ikke tilbake langs den historiske kurve). x og Z kan altså skrives på formen

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= \bar{x} + c \cdot e^{\gamma t} \\ Z &= \bar{Z} + c \cdot e^{\gamma t} \end{aligned}$$

hvor \bar{x} og \bar{Z} er de konstante nivåer for henholdsvis x og Z , c og C er konstanter, e er grunntallet i det naturlige logaritmesystem = 2,7182... og γ eksponentialkarakteristikken som bestemmer raskheten i tidsutviklingen av x og Z . γ må derfor åpenbart avhenge av strukturbetingelsene, for ett sett av strukturbetingelser får vi en rask utvikling, for et annet sett en langsom utvikling. Problemet blir å bestemme avhengigheten mellom γ og strukturbetingelsene. Dette gjøres ved å innsette (5) i strukturbetingelsene (4) og undersøke for hvilken verdi av γ disse er opfylt. Da må vi først finne tilvekstgraden av (5). Dette blir

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= c \cdot \gamma \cdot e^{\gamma t} \\ \dot{Z} &= C \cdot \gamma \cdot e^{\gamma t} \end{aligned}$$

Tilvekstgraden av (5) er altså selv en eksponentialfunksjon idet dog konstantene \bar{x} og \bar{Z} nu er forsvunnet. Vi skal illustrere dette ved et talleksempel.

La oss gå ut fra eksponentialfunksjonen $y = 2 + e^x$ (kurve I fig. 3). Vi differensierer denne kurve numerisk ved å trekke enhver ordinat fra den efterfølgende og dividere med det tilsvarende intervall for x (her 0.2). Det derved fremkomne tall er tilnærmet = ordinaten på differenskurven midt i intervallet for x . Eksempel. $x_1 = 0$, $y_1 = 3$, $x_2 = 0.2$, $y_2 = 3.2214$. Dette gir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3.2214 - 3.0000}{0.20 - 0.00} = \frac{0.2214}{0.2} = 1.107$$

for abscissen $x = 0.1$. Tilsvarende for $x = 0.3$ o. s. v. (Se fig. 3).

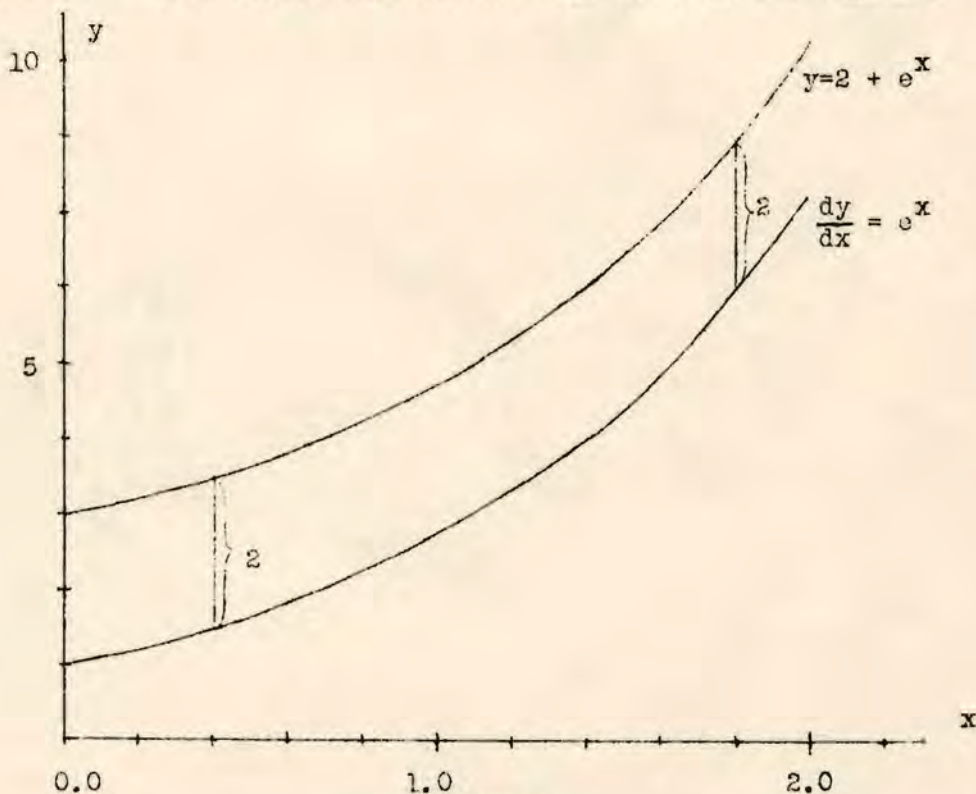


Fig. 3

ordinaten på den fremkomne differenskurve er bare parallellforskjøvet i forhold til den opprinnelige eksponentialkurve, d. v. s. differenskurven av eksponentialfunksjonen $y = 2 + e^x$ er selv en eksponentialfunksjon med samme stigningsraskhet.

Ved innsetning av (5) og (6) i (4) fåes

$$(7) \quad \begin{aligned} c \cdot \gamma \cdot e^{\gamma t} &= \lambda \cdot \varrho(\bar{x} + c \cdot e^{\gamma t}) - \lambda \cdot \mu(\bar{Z} + C \cdot e^{\gamma t}) \\ C \cdot \gamma \cdot e^{\gamma t} &= \varrho(\bar{x} + c \cdot e^{\gamma t}) - \mu(\bar{Z} + C \cdot e^{\gamma t}) \end{aligned}$$

Vi ordner disse ligninger slik

$$(8) \quad \begin{aligned} \lambda \cdot \varrho \cdot \bar{x} - \lambda \cdot \mu \cdot \bar{Z} + e^{\gamma t}(\lambda \cdot \varrho \cdot c - \lambda \cdot \mu \cdot C - c \gamma) &= 0 \\ \varrho \cdot \bar{x} - \mu \cdot \bar{Z} + e^{\gamma t}(\varrho \cdot c - \mu \cdot C - C \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

Hvis løsningen av systemet skal være av formen (5), må (8) være opfylt for enhver t . Hver av ligningene i (8) består av ett ledd som varierer med t , og et konstantledd. Hvis ligningene skal være opfylt for enhver t må begge disse ledd hver for sig være = 0. Dette gir

$$(9) \quad Q.\bar{x} - \mu.\bar{z} = 0$$

$$(10) \quad \lambda.Q.c - \lambda.\mu.C - c.\gamma = 0$$

$$Q.c - \mu.C - C.\gamma = 0$$

Vi skriver (10) på formen

$$(11) \quad (\lambda.Q - \gamma).c - \lambda.\mu.C = 0$$

$$Q.c - (\mu + \gamma).C = 0$$

(11) vil vi nu et øieblikk opfatte som to lineære ligninger i de to ukjente c og C . Disse ligninger er homogene, d. v. s. høire-sidene er $= 0$. Betingelsen for at et slikt ligningssystem skal ha en løsning (bortsett fra den trivielle $c = C = 0$) er at den determinant som dannes av koefficientene i systemet er lik 0. Dette gjelder uansett hvor mange variable som inngår.

Anmerkning om betingelsen for løsbarehet av et lineært homogent ligningssystem.

Som et eksempel på den forannevnte betingelse om at koefficientdeterminanten må være null, tar vi følgende: Gitt de tre ligninger

$$1. \quad x + y + 3z = 0$$

$$2. \quad 4x + 3y + 6z = 0$$

$$3. \quad 7x + 8y + 9z = 0$$

De to første ligninger gir

$$y + 6z = 0 \quad \text{. Første og siste ligning gir}$$

$$y - 12z = 0$$

Herav finnes $y = 0$, $z = 0$ og herav $x = 0$. Koefficientenes determinant er nemlig

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 18, \text{ altså } \neq 0.$$

Denne løsning $x = y = z = 0$ sier oss intet, idet den tilfredsstillter ethvert homogent ligningssystem. Men sett nu at vi har ligningene

$$1. \quad x + 2y + 3z = 0$$

$$2. \quad 4x + 5y + 6z = 0$$

$$3. \quad 7x + 8y + 9z = 0$$

Her er determinanten av koefficientene $= 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Da er x , y og z bestemt på en vilkårlig proporsjonalitetsfaktor nær. De to første ligninger gir nemlig

$$\frac{y}{z} = -\frac{6}{3}, \quad \frac{x}{z} = \frac{3}{3}$$

Settes $z = 1$, fåes $y = -2$, $x = 1$. Som kontroll kan vi innsette dette i 3. hvilket gir $7 - 16 + 9 = 0$. På samme måte ses at også de andre ligninger er tilfredsstillt.

I studiet av vårt økonomisk - dynamiske problem får vi altså betingelsene

$$(12) \quad \begin{vmatrix} (\lambda.Q - \gamma) & -\lambda.\mu \\ Q & -(\mu + \gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Her optrer den ukjente eksponentialkarakteristikk γ , men forøvrig kun koefficientene λ , Q , μ i de oprinnelige strukturbetingelser. Ikke bare det, men vi ser at determinanten (12) fremgår simpelthen ved å ta determinanten av koefficientene til høire side i struktursystemet (4) og simpelthen tilføie $-\gamma$ i hvert av diagonalelementene. (12) er den karakteristiske ligning for det forelagte problem. Den kan også kalles nøkkel-ligningen, da den tjener til bestemmelse av eksponentialkarakteristikken γ , og den gir "nøkkelen" til det øvrige. (Ligningen kalles også undertiden sekulær-ligningen. Dette siste uttrykk skriver sig fra astronomien idet denne (og lignende ligninger for flere variable) brukes til bestemmelse av langtidsbevegelsene i planetenes baner). Ved hjelp av den karakteristiske ligning kan γ bestemmes. Utvikles determinanten (12) så får vi

$$-(\lambda.Q - \gamma)(\mu + \gamma) + Q.\lambda.\mu = 0 \quad \text{d. v. s.}$$

$$(13) \quad \gamma^2 - (\lambda \cdot \varrho - \mu) \cdot \gamma = 0$$

(13) tilfredsstilles av røttene $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \lambda \cdot \varrho - \mu$. $\gamma_1 = 0$ antyder at der kommer inn et konstant nivå. (Det er representert ved \bar{x} og \bar{z} i (5)). $\gamma_2 = (\lambda \cdot \varrho - \mu)$ er den eksponentialkarakteristikk vi søker. Tidsformen på (6) kan altså skrives på formen

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= \bar{x} + c \cdot e^{(\lambda \varrho - \mu)t} \\ z &= \bar{z} + C \cdot e^{(\lambda \varrho - \mu)t} \end{aligned}$$

For å bestemme de fire koeffisienter \bar{x} , \bar{z} , c og C innsetter vi ligning (6) i ligningen $\dot{x} = \lambda \cdot z$. Det gir

$$(15) \quad c = \lambda \cdot C$$

og iflg. (9) har vi

$$(16) \quad \varrho \cdot \bar{x} - \mu \cdot \bar{z} = 0$$

Ved å ta som gitt x_0 og z_0 på $t = 0$, fåes

$$(17) \quad \begin{aligned} x_0 &= \bar{x} + c \\ z_0 &= \bar{z} + C \end{aligned}$$

(15) - (17) er fire ligninger til bestemmelse av konstantene c , C , \bar{x} og \bar{z} . Vi finner

$$(18) \quad \begin{aligned} c &= \frac{\mu \cdot z_0 - \varrho \cdot x_0}{\mu - \varrho \cdot \lambda} \\ c &= \lambda \cdot \frac{\mu \cdot z_0 - \varrho \cdot x_0}{\mu - \varrho \cdot \lambda} \\ \bar{x} &= \mu \cdot \frac{x_0 - \lambda \cdot z_0}{\mu - \varrho} \\ \bar{z} &= \varrho \cdot \frac{x_0 - \lambda \cdot z_0}{\mu - \varrho \cdot \lambda} \end{aligned}$$

Når (18) innsettes i (14), får vi den endelige tidsform på x og z uttrykt ved initialbetingelsene (x_0 , z_0). Som et talleksempel tar vi følgende:

Anta at driftsherrens ekspansjonsraskhet overfor en profitt-accelerasjon er $\lambda = 1.5$ og at der kan ventes en profitt pr. enhet = 30% , men bruttoprofiten får et fradrag av 1% p. g. av naturlig svinn, altså $\mu = 0.01$. Vi starter på tidspunktet $t_0 = 0$, med initialbetingelsene $x = 200$, $z = 400$. Ved (14) og (18) får vi da den tidsform som er gjengitt i fig. 4 og 5.

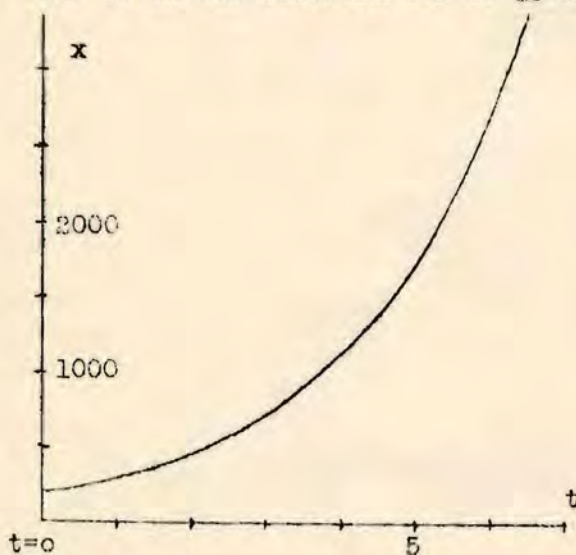


Fig. 4

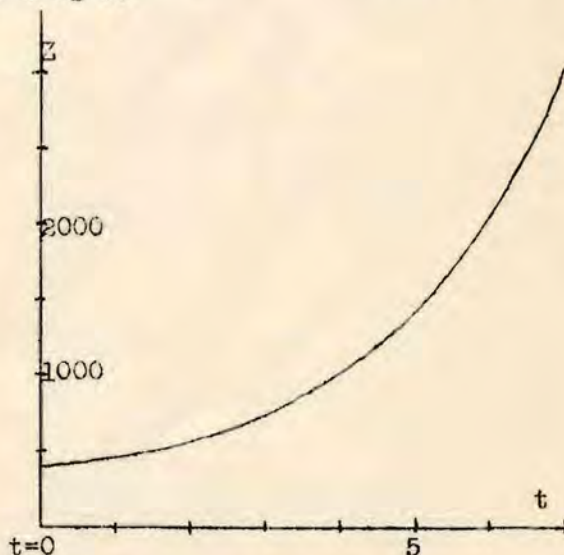


Fig. 5

La oss se litt nærmere på betingelsene for at utviklingen skal bli stigende eller synkende. Denne betingelse fremgår umiddelbart når vi bemerker at eksponentialkarakteristikken for de funne tidskurver er $\gamma = \lambda \cdot \varrho - \mu$. Herav følger at

$$(19) \quad \lambda \cdot \varrho > \mu \quad \text{gir stigende utvikling}$$

$$(20) \quad \lambda \cdot \varrho < \mu \quad \text{gir synkende utvikling.}$$

La oss søke å gi en konkret tolkning av disse betingelser. (19) sier at dersom vi skal få en stigende utvikling, må bruttoprofitraten ϱ være så stor at den

holder det naturlige svinn stangen. Dette avhenger for det første av arbeidslønnen ω . Jo mindre den er desto mer blir det igjen til profitt. Men dessuten får vi å ta hensyn til den ekspansjonsraskhet λ som driftsherron legger for dagen. Hvorvidt der skal bli eller ikke bli nogen nettoprofitt (etter fradrag av det naturlige svinn) avhenger nu ikke bare av arbeidslønnens størrelse, men også av driftsherrrens ekspansjonsraskhet. Dette er det mest interessante trekk ved den løsning vi her har fått. Sett f. eks. at λ i tiden op til t har vært meget stor, driftsherrne har altså reagert raskt, og produksjonen har vært i hurtig stigning. Da vil produksjonen x på t være meget større enn gjennomsnittsproduksjonen op til t . Altså vil lagerbeholdningen på t være liten i forhold til den løpende produksjon på t . Men dette betyr igjen at det naturlige svinn på tidspunktet t vil spille en relativt liten rolle for nettoprofitten Z_t , idet jo svinnet regnes i procent av det tilstedeværende lagor. Der vil altså da være en stor chance for at nettoprofitten blir positiv (og følgelig utviklingen stigende). Også størrelsen av bruttoprofitt-raten (bestemt ved størrelsen av arbeidslønnen) og størrelsen av det naturlige svinn spiller inn. Det nøiaktige uttrykk for samspillet mellom disse tre størrelser λ , φ og κ er bestemt ved (19) og (20). Som et eksempel la oss anta at vi på tidspunktet t har et lager $Z_t = 1000$ og en produksjonshastighet $x_t = 100$. La oss sette $\lambda = 2$, $\varphi = 0.2$ og $\kappa = 0.01$. Dette gir $\dot{Z}_t = 0.2 \cdot 100 - 0.01 \cdot 1000 = 10$, altså $\dot{x}_t = \lambda \cdot Z_t = 2 \cdot 10 = 20$, $x_{t+1} = 120$. La oss nu med de samme konstanter sette $Z_t = 500$. Dette gir $\dot{Z}_t = 0.2 \cdot 100 - 0.01 \cdot 500 = 15$, altså $\dot{x}_t = 2 \cdot 15 = 30$, $x_{t+1} = 130$. Dette viser hvorledes et stort lager vil nedsette nettoprofitten og derved - via det negative incitament det gir driftsherrn - hemme produksjonen.

8564. Tretthetsfenomenet i ekspansjonen.

Den sammenheng mellom ekspansjonsraskheten λ og profittens størrelse som vi har utledet i 8563 illustrerer et viktig trekk ved oppgangsperiodene i de faktiske konjunkturbevegelser. Det viser sig nemlig at det er under selve ekspansjonsperioden, (før de store anlegg enn er ferdige) at de høie profitter fremkommer. Hvis nu λ var så stor at driftsherrne så å si alltid "løp i forveien", vilde det alltid være stor løpende produksjon i forhold til den tilsvarende kapitalstock, som ødelegges ved naturlig svinn (og også trekker rente). Følgelig vil der være en tendens til stor profitt, altså til fortsatt ekspansjon. Men så snart farten i ekspansjonen minsker, vil kapitalbeholdningen begynne å vokse i forhold til den øieblikkelige produksjon, altså en minsket betingelse for profitt. Så snart driftsherrne begynner "å se sig tilbake", så akselerasjonen i utviklingen et øieblikk slapper av, vil dette i sig selv allerede minke nettoprofitt-raten. "Kornhaugen" begynner da å bli større i forhold til den løpende produksjon enn tidligere, det naturlige svinn blir mere dominerende i bestemmelsen av nettoprofitten og kan tilslutt opsluke hele profitten, slik at omslaget kommer. Rent konkret sett er dette sikkert et meget viktig fenomen i konjunkturbevegelsen. Men det betyr at det er urealistisk å forutsette λ konstant for hele konjunkturforløpet. Det viste sig fruktbart å forutsette den konstant for en kortere tid for å se tendensen i utviklingen i et gitt øieblikk, men vil vi se hele utviklingen i sammenheng, må vi la forutsetningen om konstant λ falle. Vi tenker oss da at der gjør sig gjeldende et slags tretthetsfenomen som gjør at driftsherrne ikke følger den nøiaktige proporsjonalitet (8563.3) når x en lengere tid har vært i stigning. Vi kan også kanskje kalle det et uvanthetsfenomen. Driftsherrne er vant til en viss gjennomsnittlig størrelse på produksjonen og store avvikelser fra denne gjennomsnittlige størrelse vil etterhvert øve et press på λ . Når produksjonen er og gjennom lengere tid har vært "overnormal", tenderer det til å senke λ , omvendt når produksjonen er og gjennom lengere tid har vært "undernormal", d. v. s. for å incitere driftsherrn til produksjonsutvidelse trengs i første tilfelle en større nettoprofitt enn i siste tilfelle. Med våre tidligere betegnelser kan vi altså si at en oppgangsperiode karakteriseres ved kurve I i fig. 1 8563, en nedgangsperiode ved kurve II.

Hvorledes vil dette tretthetsfenomen påvirke bevegelsen? For å studere det vil vi nu betrakte ekspansjonsraskheten λ ikke som en konstant, men som avhengig av produksjonen x på følgende måte

$$(1) \quad \lambda(t) = \bar{\lambda} - c \cdot \int_{t-\varepsilon}^t x(\tau) \cdot d(\tau)$$

Formelen sier at ekspansjonsraskheten $\lambda(t)$ på tidspunktet t er avhengig, for det første av et konstant nivå som er karakteristisk for vedkommende samfund, men dernæst også av et ledd som simpelthen er det bevegelige gjennomsnitt av produksjonen x , tatt fra t bakover et intervall av lengde ε . Dette annet ledd kan selvfølgelig også tenkes gitt en mer komplisert form, men det simple bevegelige gjennomsnitt vil være tilstrekkelig for å få frem det som her er det vesentlige.

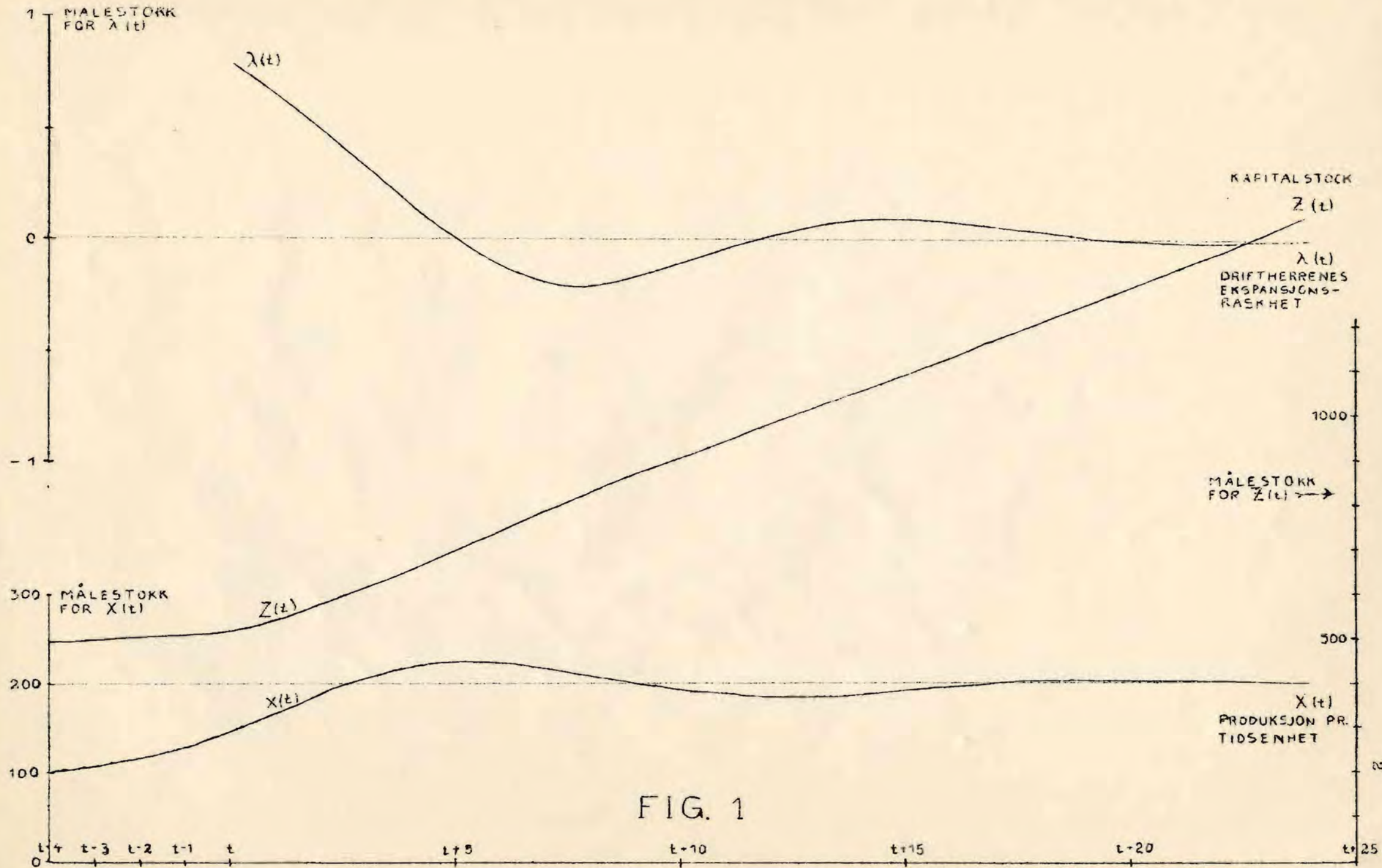


FIG. 1

Det å bestemme den generelle løsning av tidsformen når λ er definert ved en ligning av formen (1) er en komplisert matematisk oppgave hvis det skal gjøres eksakt. Vi kan imidlertid få en tilnærmet løsning ved å anta at λ forløper med tiden på en slik måte at den over kortere tidsrum er forholdsvis mere konstant enn de øvrige variable. Da kan vi gå ut fra løsningen i 8563 og bare forandre λ med visse mellomrum i overensstemmelse med (1) ovenfor. Sett først at systemet er i ekspansjon, altså $\lambda, \rho > \mu$. Da vil siste ledd i formel (1), det bevegelige gjennomsnitt vokse, idet de nye ledd som etterhvert går inn i det bevegelige gjennomsnitt stadig blir større enn de ledd som går ut. (Jfr. forelesningene over Polypolteori, bemerkning 4 side 7322.6). Men da vil $\lambda(t)$ avta. Driftsherrens begynner å "se sig tilbake" i produksjonskappløpet. I strukturbetingelsene må altså nu λ forandres. Men dette medfører en minsket produksjonsaccelerasjon \dot{x} . Når etterhvert \dot{x} på denne måte er blitt negativ, vil x selv begynne å avta. Videre, Når produksjonen er kommet så langt ned at det nye ledd som inngår i det bevegelige gjennomsnitt er mindre enn det ledd som går ut, vil gjennomsnittet begynne å synke, og fra det tidspunkt av vil $\lambda(t)$ igjen begynne å stige o. s. v. På denne måte vil vi kunne få et determinert system som beveger sig i cykler.

La oss f. eks. gå ut fra et system hvor $\lambda = 2$, $c = 1/500$, $\mu = 0.002$, $\rho = 0.20$. Vi antar at λ er avhengig av gjennomsnittet av x på 5 foregående tidspunkter, idet vi altså for enkelhets skyld erstatter integralet i (1) med en sum. Sett at bevegelsen op til tidspunktet t har vært følgende

Tabell 1.

t	x	Z
t-4	100	500
t-3	110	505
t-2	121	510
t-1	133	515
t	146	520

Da kan vi ved hjelp av strukturbetingelsene regne ut x_{t+1} og Z_{t+1} . Vi får nemlig

$$\lambda(t) = 2 - \frac{1}{500} \sum_{t-4}^t x(t) = 0.780 \quad \text{og}$$

$\dot{Z}(t) = 0.20 \cdot 146 - 0.002 \cdot 520 = 28,16$. Dette gir $\dot{x}(t) = 0.78 \cdot 28,16 = 21,965$, altså får vi

$$x_{t+1} = x_t + \dot{x}_t = 146 + 21,965 = 167,965$$

$$Z_{t+1} = Z_t + \dot{Z}_t = 520 + 28,16 = 548,16. \quad \text{Når vi}$$

kjenner x_{t+1} og Z_{t+1} , kan vi på nøyaktig samme måte som ovenfor beregne $\lambda(t+1)$, x_{t+2} og Z_{t+2} o. s. v. Resultatene er grafisk gjengitt i fig. 1.

Som man ser har λ og x motsatt fase, det således at bunnpunktet for λ faller et par år etter topppunktet for x , d. v. s. virkningen av den stigende produksjon blir hørende igjen i λ et par år utover.

Også lagerbeholdningen Z viser cykler, men disse er praktisk talt umerkkelige i forhold til den gjennomsnittlige ordinat for Z .

Med de strukturparametre vi her har valgt, vil bevegelsen som man ser, bli dempet. Vedlikeholdet av bevegelsen vil kunne skje ved tilfeldige støt på en lignende måte som vi før har drøftet.

8565. Den variable arbeidslønn i sin virkning på profittakkumuleringscyklen.

Systemet i 8563 fører som vi har sett til en eksponentiell løsning. Hvis $\lambda, \rho > \mu$, blir utviklin en stadig stigende, ellers synkende. I 8564 så vi hvordan en mer realistisk forutsetning om λ skapte cykler. Nu skal vi se hvorledes en forandring av forutsetningene om arbeidslønnen w også kan skape cykler.

I praksis vil der være en viss øvre grense x_0 for produksjonen, bestemt ved det totale arbeiderantall. Til å produsere x_0 trenges $a \cdot x_0$ arbeidsdager.

La oss først gå ut fra systemet i 8563 og tenke oss at systemet utvikler sig etter de der beskrevne lover, og at utviklingen er en stigning. Da vil produksjonen x etterhvert nærme sig den øvre grense x_0 . Når denne grense nås, vil der fremdeles være en nettopprofitt. Men fra nu av er en videre ekspansjon umulig. Det eneste driftsherren har å gjøre fra dette tidspunkt er å bevege sig

langs det horisontale nivå x_0 (se fig. 1) Herunder vil kapitalbeholdningens (kornhaugens) vekst trykke nettopprofitten. Vil dette medføre at utviklingen etter en viss tid slår om til nedgang? Dette kan ikke bli tilfelle så lenge ω holdes konstant. Det er lett å se at veksten i "kornhaugen" vil avta på en så-

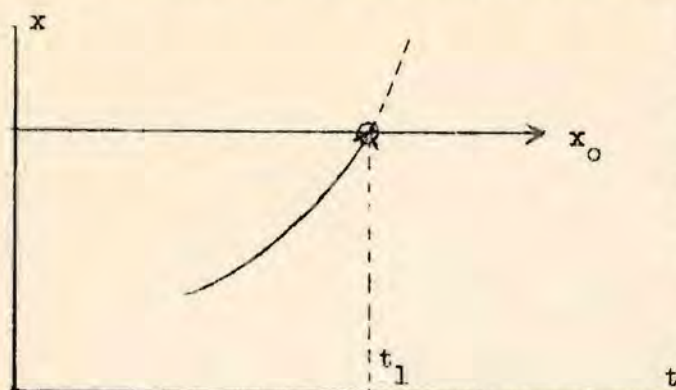


Fig. 1.

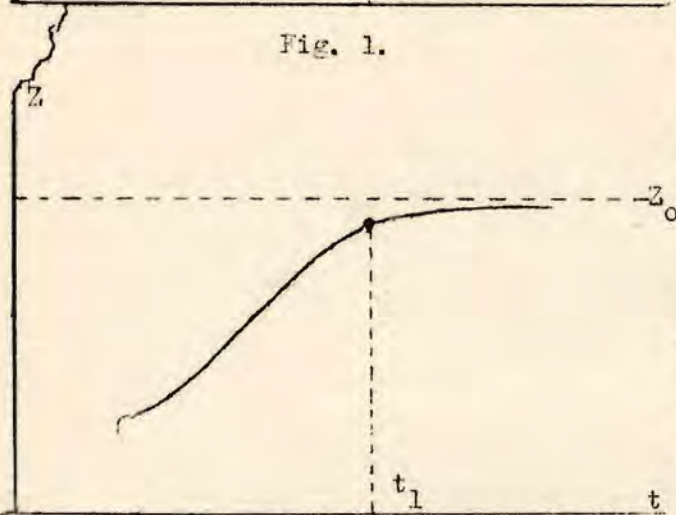


Fig. 2.

dan måte at Z stiger monotont mot et konstant nivå (fig. 2), Z_0 . Det eneste som skjer er at tangenten får en knekk i det punkt hvor hele arbeidsstyrken er utnyttet. La oss f. eks. anta at $x_0 = 200$, profitten $\rho = 10\%$ og svinnprocenten $\mu = 2\%$. Da vil Z nærme seg et stasjonært nivå bestemt ved ligningen

$$\dot{Z} = \rho \cdot x - \mu \cdot Z = 0,10 \cdot 200 - 0,02 \cdot Z = 0, \text{ d. v. s. } Z = 1000. \text{ Når } Z \text{ er vokset til } 1000, \text{ er altså svinnet i lageret blitt så stort at hele profitten opslukes.}$$

Det er imidlertid urealistisk å anta at arbeidslønnen skulde forbli konstant under en stadig stigende produksjon. Det at vi nærmer oss punktet t' vil si at den industrielle reservearmen etterhvert blir beskjefligget. I praksis vil det presse arbeidslønnen op. La oss derfor nu anta at arbeidslønnen avhenger av produksjonen. Vi vil anta en lignende sammenheng som vi før gikk ut fra angående λ . Vi antar altså at arbeidslønnen avhenger av den løpende produksjon x og av den gjennomsnittlige produksjon i tiden like forut. For å operere med et enkelt uttrykk, kan vi da sette

$$(1) \quad \omega(t) = \bar{\omega} + c \sum_{t-\varepsilon}^t x(t)$$

hvor $\bar{\omega}$ og c er konstanter. Det realistiske vil være å anta c positiv. Hvis x betegner den cycliske komponent i produksjonen slik at altså x varierer gjennom positive og negative verdier, kan vi fortolke $\bar{\omega}$ som eksistensminimumet for en arbeiderfamilie. La oss nu undersøke hvorledes systemet vil utvikle sig. Systemet er determinert, vi har nemlig 3 ukjente, x , Z og ω og til bestemmelse herav 3 ligninger nemlig (1) foran og dessuten strukturbetingelsene (4), 8563). Følgelig kan vi regne ut hvorledes en situasjon vokser ut av den foregående. Det viser sig da at vi får en utvikling i cykler og disse kan være dempet eller antidempet, alt etter valget av konstanter. Som et eksempel la oss gå ut fra følgende sett av parametre: $\lambda = 2$, $\mu = 0,001$, $a = 0,36$, $c = 0,002$, $\bar{\omega} = 1$. Sett nu at utviklingen op til t har vært følgende

Tabell 1.

tidspunkt	x	Z
$t-4$	130	1015
$t-3$	110	1005
$t-2$	121	1010
$t-1$	133	1015
t	146	1020

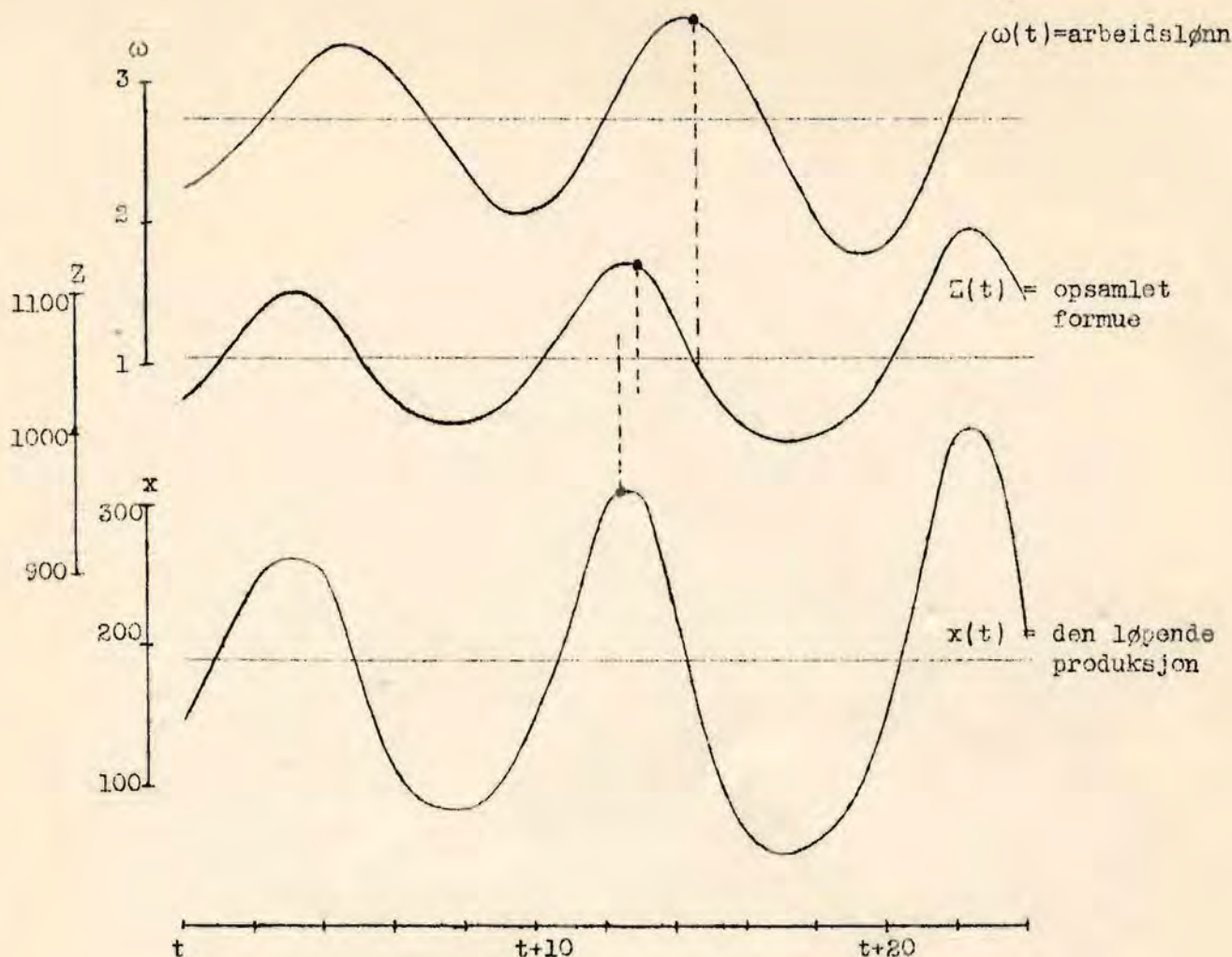
La oss anta at $\omega(t)$ kun avhenger av de 5 foregående x -er, d. v. s. $\varepsilon = 4$. Da kan vi regne ut x_{t+1} og Z_{t+1} . Vi får nemlig

$$\omega(t) = 1 + 0,002 \sum_{t-4}^t x_t = 1 + 0,002 \cdot 640 = 2,28 \text{ og herav } \rho = 1 - \omega(t)a = 0,18.$$

Dette gir $\dot{Z}_t = \rho \cdot x - \mu \cdot Z = 0,18 \cdot 146 - 0,001 \cdot 1020 = 25,2$ og

$$\dot{x}_t = \lambda \cdot \dot{Z} = 2 \cdot 25,2 = 50,4 \text{ altså}$$

$$x_{t+1} = x_t + \dot{x}_t = 146 + 50,4 = 196,4, \text{ og } Z_{t+1} = Z_t + \dot{Z}_t = 1020 + 25,2 = 1045,2.$$



F i g. 3.

Fra tidspunktet $t + 1$ kan vi nu på samme måte skyte oss frem til $t+2$ o. s. v. Resultatet av regningene er gjengitt grafisk i fig. 3. Der fremkommer i alle tre variable en typisk bølgebevegelse på ca. 10 år. Bevegelsen er antidempet. Dette er et resultat av det spesielle valg av konstanter i eksemplet. La oss derfor prøve med et annet sett av parametre: $\lambda = 1$, $\mu = 0.001$, $a = 0.5$, $c = 0.002$, $\bar{\omega} = 1$. La der være gitt følgende observasjonsmateriale.

Tabell 2.

tidspunkt	x	Z
$t-4$	100	1000
$t-3$	110	1005
$t-2$	121	1010
$t-1$	133	1015
t	146	1020

Efter samme fremgangsmåte som ovenfor gir strukturbetingelsene med disse konstanter en utvikling som gjengitt i fig. 4. Bevegelsen er nu dempet.

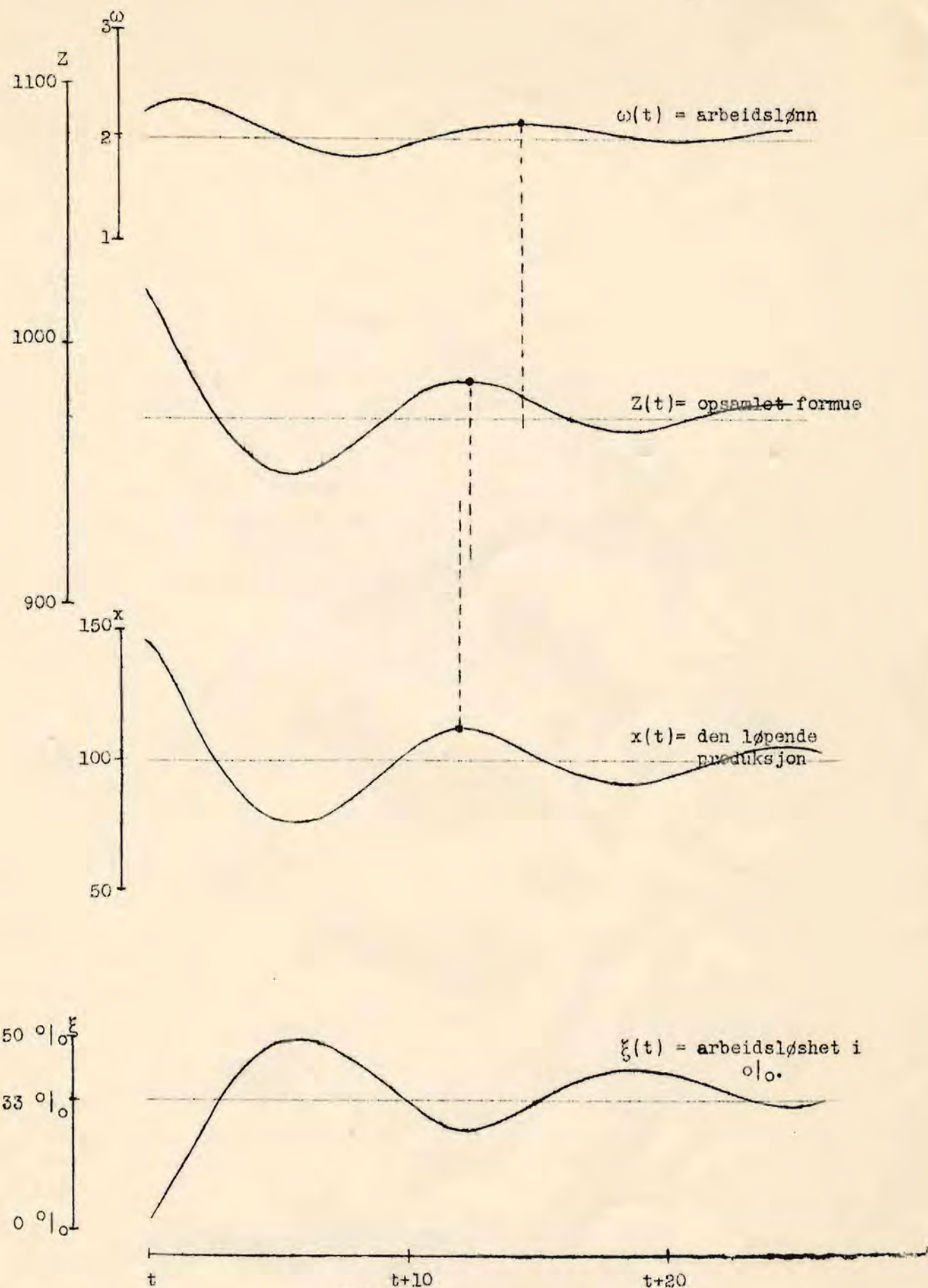
I begge tilfelle er utviklingen i x og Z næsten synkron idet dog omslaget i den løpende produksjon kommer litt før omslaget i "Kornhaugen" - som efter våre forutsetninger representerer den opsamlede formue. Utviklingen i arbeidslønnen ligger derimot betydelig efter, omslaget her kommer først et par år efter.

Disse trekk ved det her behandlede teoretiske system er ganske realistiske. De stemmer nokså godt med erfaringen.

La oss anta at den produktmengde som kan produseres når alle arbeidere er beskjeftiget er $x_0 = 150$. Da kan arbeidsløshetsprocenten uttrykkes slik

$$(2) \quad \zeta(t) = \frac{x_0 - x}{x_0} \quad \Big|_0$$

Denne størrelse er gjengitt ved den nederste kurve i fig. 4, beregnet efter samme talleksempel som de øvrige kurver i denne figur. Kun i begynnelsen, ved tidspunktet t er næsten alle arbeidere beskjeftiget, senere stabiliserer arbeidsløsheten sig omkring en permanent nivå = ca. 33 % $\Big|_0$. Hvis systemets svingninger hadde vært vedlikeholdt av erratiske støt eller på annen måte, vilde leilighetsvis - nemlig ved hver høikonjunktur det meste av arbeidsløsheten være eliminert,



F i g. 4

men fremdeles vilde det normale være en arbeidsløshet på ca. 33 %.

I fig. 3 og 4 har vi ikke tegnet kurvene før tidspunktet t . Hvis vi tegner kurvene helt fra tidspunktet $(t-4)$ får vi følgende bilde, fig. 5. Kurven har en knekk ved t , først fra det punkt av begynner det karakteristiske dempet cykliske forløp som kurvene senere viser. Formen på den første del av kurven kommer av de mer eller mindre vilkårlige initialbetingelser vi valgte. Det at kurven senere - på tross av dette vilkårlige valg - faller inn i den cykliske rytme viser at tidsformen alt ialt er langt sterkere avhengig av strukturbetingelsene enn av de mer eller mindre tilfeldige initialbetingelser. Da initialbetingel-

sene også kan opfattes på samme måte som mer eller mindre tilfeldige impulser, viser dette fenomen også at det er strukturbetingelsene, ikke fordelingen av de tilfeldige støt der vedlikeholder svingningene, som øver størst innflydelse på tidsformen.

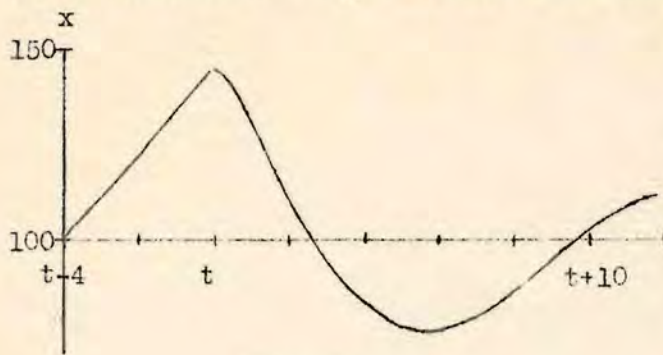


Fig. 5.

Dette har også adskillig interesse fra et praktisk politisk synspunkt: Vi må søke å innrette strukturbetingelsene for systemet slik at der blir dempning. Såsent bare denne betingelse er oppfylt, vil de tilfeldige støt som treffer systemet bli av mindre betydning.

I denne og de foregående paragrafer har vi drøftet forskjellige makrodynamiske systemer fra et realøkonomisk synspunkt uten å trekke pengene inn i analysen. Neste semester vil vi gå nærmere inn på virkningen av de monetære faktorer i konjunkturforløpet.

(Slutt på forelesningene i vårsemestret 1934).
