11B

Storgaten 9,

OSLO.

13th March 1933.

Professor Maurice Frechet,
Faculte des Sciences de L'Universite de Paris,
1, Rue Pierre-Curie,
Paris V°, France.

Dear Colleague,

Thank you very much for your kind letter regarding my Paris lectures and thank you for the suggestion and advice.

On reflection I have decided to organise my lectures in such a way as to exhibit as much as possible the underlying scientifically valuable ideas, even if this has to be done by the use of some mathematical technique. I am aware of the fact that by this way some of the auditors may become less interested. But I thought that when the Institut Poincare invites a foreign scientist, the purpose would probably be to get acquainted with whatever valuable ideas he may have and that the object, only to a lesser degree, is to attract a large and popular audience. On the other hand, since the lectures are to be published in the Annales, I would rather like to work them out on a scientific rather than a popular basis.

I have recently sent an indication of the contents of my lectures to Madame Fournier at the Institut Poincare. I am sorry that I have no copies at hand, otherwise I would have sent you one.

With best regards,

Sincerely Yours,

Ragnar Frisch.

P.S. Excuse me for writing in English. It is so much easier on account of my secretarial help.

76/B

Oslo, Norway December 6, 1933

Professor Frechet,
Institut Henri Poincaré
Rue Pierre Curie,
Paris.

Dear Colleague,

Thank you ever so much for your letter from Stockholm regarding the invariance problem of linear regressions. I was interested to see that the regression determined by minimizing the absolute values of deviations is not invariant, as we both suspected.

With regard to the other regression you consider, you may be interested in the following facts:

The regression determined by minimizing the sum square of the deviations measured perpendicularly to the regression line in the regression called the Orthogonal mean regression. It was first introduced by Karl Pearson some thirty years ago. The determination of the regression coefficient by these principles in the general case of n variables is discussed in detail in my paper "Correlation and Scatter in Statistical Invariables" published in the Nordic Statistical Journal in 1929. In this paper I also discussed its invariance properties. It is indeed easy to show (as you point out for the case ~~an equal sign to~~) that this regression is invariant under an orthogonal transformation, and also under a change of origin. Furthermore it is of course invariant for any permutation of the variables, but it is not invariant for any stretch, that is to say a diagonal transformation, in other words for a transformation whose matrix is diagonal, such a transformation expresses of course nothing but a change in the units of measurement. This latter fact is, it seems, much more important than the invariance under an orthogonal transformation. In any practical case we must have a regression that is invariant for ~~the~~ a change units of measurements. I would like to state the case even a little sharper. The very idea of orthogonality in observation space is not a very fruitful one primarily because in practically all cases the units of measurements are conventional and therefore no metric defined in observation space. In other words, the notion of distance and angle does not exist, hence the notation "orthogonality" does not exist.

76/13

Some years ago I had an idea that one may look upon the problem from a more general angle of supposing that it was possible by some principle or another to define a metric on observation space and then determining the regression plane by minimizing the deviation defined orthogonally according to this metric. Furthermore, I thought one could possibly try to define the metric by requiring that it should be such that the orthogonal regression defined via this metric should be invariant. This was the subject of one of my lectures before the Econometric Society in Lausanne in 1931. Unfortunately such metric does not exist. So far this avenue of approach is not very promising.

One way to make the regression plane independent of a stretch is of course to normalize the variables, that is to say by dividing each variable by its standard deviation before applying the regression method. The regression obtained by first normalizing the variables and then minimizing the sum square of the orthogonal deviations may be called the normalized orthogonal regression. Obviously this regression will be invariant for a stretch and, furthermore, it will depend only on the second order moments. Incidentally this shows that in two variables the normalized orthogonal regression must be identical with the diogonal regression (i.e. the regression obtained by putting the normalized y variable equal to plus or minus, the normalized x variable accordingly as the correlation coefficient is positive or negative. As I mentioned in the discussion after your lecture in Oslo recently the diogonal regression is the only regression in two variables depending on the second order moments that is invariant for a stretch. Therefore the normalized orthogonal into variables must be identical with the diagonal. Incidentally this argument was actually the one that lead me to conclude that the normalized orthogonal into variables is simply the diogonal. Of course by going through the conclusion directly it is easy to verify that the normalized orthogonal into variables is nothing but diagonal.

With regard to your recent circular letter asking my opinion about the interpretation of the correlation coefficient, I may say this.

I do not think that one can use any mechanical rule of interpreting the magnitude of the correlation coefficient as the one you quote. Whether a correlation coefficient shall be considered as significantly different from zero or not, depends essentially upon the whole setting of the problem. Suppose for instance, that we have two time series that have the shape of sine curves with the same period but a slight difference in phase. If the observations were absolutely correct, the slightest amount of difference in phase would be indicated by the correlation coefficient different from zero. There even is a very definite connection between the size of the phase difference and the size of the correlation coefficient. Therefore if no errors were present any magnitude of the correlation coefficient different from zero would be significant, but if errors are present the magnitude of the correlation coefficient that must exist in order to indicate a significant difference in phase will of course depend essentially on the intensity of the errors. In the case of time series some information about this intensity may be obtained simply from the plot of the curves, and thus some notion can be obtained about the size of the correlation coefficient that is necessary in order to indicate a significant difference in phase, that is to say a significant deviation from linearity.

These questions are intimately connected on the one side with the problem of decomposing and smoothing time series, and on the other hand, with the study of cluster types in statistical variables, see for instance my paper "Correlation and Scatter". In the laboratory in the Institut of Economics in Oslo we are at present concentrating a considerable part of our efforts on this ~~whole~~ group of problems. I do not want, however, to make any statements about our results until the whole investigation is brought in shape for publication.

Of course, quite similar considerations may be applied to the case where the deviation from linearity is not due to a difference in phase between cyclical curves, but say, to the fact that the regression between the two variables is a curved line (for instance a parabola).

With best personal regards,

Cordially Yours,

Ragnar Frisch

Ad brevene fra M. Fréchet til R. Frisch.
Uregistrert vedlegg. [1931.]

Fréchet

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Travaux économétriques (à la date d'Octobre 1931) de
M. Maurice Fréchet
Membre de l'Académie Polonaise des Sciences
Membre de l'Institut International de Statistique
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

1°
Travaux portant directement sur
l'Econométrique

I Travaux publiés.

Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus (C.R. de la 16e Session de l'Institut International de Statistique à Rome, 192)

Sur l'existence d'un indice de désirabilité des biens indirects (C.R. Ac. Sc. Paris, t. 187, 1928)

II Travaux non publiés.

Sur les diverses définitions de l'indice d'inégalité des revenus (Conférence faite en Mars 1928 à l'Institut des Hautes Etudes de Bruxelles)

Les Principes de l'Economie Mathématique (Cours professé à l'Université de Strasbourg, 2e Semestre 1928)

2°
Travaux susceptibles de faciliter les
études économétriques.

Le Calcul des Probabilités à la portée de tous, par Fréchet et Halbwachs, 300 pages, Dunod chez, 1928.

Nomographie, par Fréchet et Roullet, Collection Colin, 208 pages, 1928

Représentation des lois empiriques par des formules mathématiques approchées, par Fréchet et Romann, 302 pages, chez Eyrolles, 1930

L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique Mathématique, par H. B. Heywood et M. Fréchet, avec une préface et une note de M. Hadamard, VI + 165 pages, chez Hermann, 1912.

M. Fréchet

B. Oslo
[illegible] nr.
761 A

Monsieur et cher Confrère:

Je vous serais très reconnaissant si vous pouviez me donner votre opinion sur l'usage du coefficient de corrélation, r

Pour préciser, je poursuis une enquete portant sur les extraits suivants d'un article paru a la page I 8 8 du BAROMETRO ECONOMICO (10 Mars 1933), parce que cet article énonce nettement les règles qui sont employees (a tort, a mon avis) par un grande nombre de statisticiens.

Il s'agit ici du coefficient de corrélation, r, dit encore coefficient de BRAVAIS- GALTON.

Voici les citations:

"La liaison est faible si
$-0,50 < r < -0,30$ ou $0,50 > r > 0,30$;
il n'y a pas de liaison entre les deux phénomènes si
$-0,30 < r < 0,30$"
"la dépendance ou corrélation est plus forte dans le cas où l'on trouve 0,80 que dans le cas où l'on trouve 0,60".

Je vous serais très obligé si vous pouviez - au cas où vous voudriez bien m'honorer d'une réponse-préciser sous une forme a peu près aussi brève que ces citations, votre opinion personnelle.

Par exemple:

" A mon avis : 1° . La liaison entre deux phénomènes dont le coefficient de corrélation est r, est faible si $0,30 < |r| < 0,50$
n'existe pas si $|r| < 0,30$

2°. La dépendance est plus forte quand le coefficient de corrélation est plus grand",

ou, " A mon avis, 1° . La liaison peut être, (quand elle n'est pas assujettie a être linéaire), aussi forte pour $r = 0$ que pour $r = 1$

2°. La dependance peut être plus forte quand le coefficient de corrélation est plus petit",

ou toute autre forme assez brève concernant une opinion intermédiaire.

Je vous serais en outre, obligé de spécifier si vous m'autorisez à publier votre réponse.

Une réponse sur carte postale me suffirait.

En vous adressant d'avance tous mes remerciements, je vous prie d'agréer, monsieur et cher confrère, l'expression de mes sentiments très distingués.

M. FRECHET, Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris,
12 Square Desnouettes,
Paris (15e) France

P.S. Voir une note sur ces questions dans les C.R. de Nov ou Déc. 1933
un court mémoire " " le Bull. Trimestr. de
l'Institut Intern. de Statist. de janvier 1934

M. Fréchet til R. Frisch [1932]. Registreres ikke.

I shall be glad to have you include my name in the list of the Advisory Editorial Board of the Econometric Society journal.

(signed) ..M. Fréchet......

FRECHET

[copy to Alfred Cowles, 3rd,
to Irving Fisher, and to Ragnar Frisch]

With appreciation of the honour so given.
and compliments to Professor Ragnar Frisch

FACULTÉ DES SCIENCES

INSTITUT HENRI POINCARÉ

11, Rue Pierre-Curie (Ve)

TÉL. : ODÉON 42-10

UNIVERSITÉ DE PARIS

Paris, le 16 Fév. 1932

U. B. Oslo
Brevs. nr.
761 A

Mon cher collègue.

Je vous écris au sujet de vos conférences à Paris.

Je dois vous prévenir que le nombre des auditeurs est tout à fait imprévisible. A certaines conférences, la salle est tout à fait pleine, à d'autres, on n'y voit que trois ou quatre auditeurs. La personnalité du conférencier n'est pas une des causes déterminantes de ces variations. Autant qu'on puisse déterminer, les causes peuvent être les suivantes : 1° le choix du titre de la conférence. S'il paraît en dehors des sujets qu'étudient nos élèves ceux-ci n'y vont pas. Or nous n'avons pas à la Faculté des Sciences, de cours d'Économétrique. D'autre part s'il peut intéresser des personnes en dehors de la Faculté le choix de l'heure joue un certain rôle. Les gens qui ont une profession ne peuvent guère se rendre libres – et encore ! – que vers 5 h ½. C'est donc l'heure que je vous recommanderais de choisir – si cette heure est disponible dans notre horaire. D'autre part, le mot Économétrique est nouveau ; il serait peut-être bon dans votre affiche de le remplacer par un autre mieux connu, ou de le faire suivre par un autre " — Econométrie et Économique rationnelle — " par exemple.

II Dans vos leçons je crois comprendre qu'une partie touche l'Econométrie sous mathématique l'autre est purement mathématique. Peut être (?) pourriez-vous diviser vos conférences en deux lots, l'un où vous ne feriez pas de mathématique ou dans lequel vous résumez les résultats obtenus par les mathématiques, et qui pourraient intéresser les étudiants de la Faculté de Droit et Economie politique". L'autre qui aurait un titre mathématique avec application à l'économétrie (par exemple Analyse tensorielle, application à l'économétrie) et qui attirerait nos étudiants de mathématiques).

Ce sont là de pures suggestions.

Vous pourriez aussi considérer les choses d'un point de vue différent. Vous pourriez décider que vous ferez abstraction du nombre de auditeurs. (Il y en aura au moins un, qui sera moi si je suis libre aux mêmes heures; malheureusement mon horaire après le 1er Mars n'est pas encore fixé) et vous préoccuper seulement de l'auditoire invisible beaucoup plus vaste et plus important constitué par les lecteurs des Annales de l'Institut Henri Poincaré où paraîtront vos conférences, si vous le voulez bien. Dans ce cas la division en deux parties, comme plus haut, ne serait pas, sans doute la meilleure.

Je désirais simplement vous prévenir de sorte que vous puissiez décider en connaissance de cause.

Je serai très heureux de cette occasion de faire connaissance avec vous et de me mettre au courant des sujets très intéressants que vous avez l'intention de développer.

J'allais oublier de dire que si vous le jugiez utile on pourrait, comme il a été fait précédemment, faire dactylographier un résumé en deux pages fait par vous de chaque leçon pour être distribué aux auditeurs à la leçon suivante.

Veuillez agréer, cher Monsieur, l'expression de mes sentiments très distingués.

M. Fréchet

12, Square Desnouettes
Paris, 15e, (Téléphone: Vaugirard 29-85)

U. B. Oslo
Brevs. nr.
761 A

Park Hotell

PARK HOTELL

Telefonanrop & Telegramadress | PARK HOTELL

90 rum med varmt och kallt vatten — Badrum

STOCKHOLM den 3 Dec. 1933
VASAGATAN 8

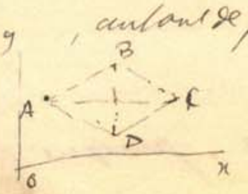
Mon cher collègue.

J'ai reflechi à votre interessante question d'une definition invariante des lignes de regression.

Tout d'abord je vous signale qu'il semble y avoir flottement dans les definitions des lignes de regression. Pour les uns, comme vous, ce sont les droites les plus rapprochées de l'ensemble des points observés. Pour les autres (de mémoire, je crois pouvoir citer Bowley et Tchuprow, mais je n'en suis pas sûr) ce sont les lignes des moyennes (de y pour x ~~[illegible]~~ donné ou de x pour y donné).

Mais ceci est un point secondaire.

La droite de regression definie comme je l'ai fait dans ma conférence, n'est pas invariante [Démonstration: Donnons 4 points disposés aux sommets d'un losange dont les diamètres sont parallèles aux axes. D'après la condition suffisante donnée dans ma conférence (droite par 2 des points, autant de points observés au dessus et au dessous), ~~la droite~~ minimum de $\sum_k |y_k - a x_k - b|$ sera donné ~~par~~ en prenant pour droite de regression AC. Et le minimum de $\sum_k |x_k - \alpha y_k - \beta|$ sera donné en prenant pour $x = \alpha y + \beta$ la droite BD]



Mais j'ai pensé qu'on s'approcherait un peu de votre idée en définissant comme droite de regression le grand axe de l'ellipse d'inertie (relative au centre de gravité) des masses m_{ij} (répétition) aux points observés (x_i, y_j). Car c'est la droite du plan telle que la somme des carrés des distances de la droite aux points observés est la plus petite. [Quelqu'un m'a dit que plusieurs auteurs définissent déjà ainsi la droite de régression, mais je ne sais lesquels.]

En effet, une telle droite est effectivement invariante dans toutes les transformations de la forme $\begin{cases} X = x\cos\alpha \mp y\sin\alpha + p \\ Y = \cancel{x}\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}$

Ces transformations sont plus générales que les vôtres, par la présence de p et de q, et moins générales par les ~~deutté~~ condition $\begin{cases} a^2 + a'^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 = 1 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$ à vérifier dans vos transformations $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = a'x + b'y \end{cases}$

On aurait ~~encore~~ aussi une droite invariante dans ces transformations en prenant celle (ou celles) pour lesquelles $\sum m_{ij}\, \delta_{ij}$ est minimum δ_{ij} étant la distance en valeur absolue du point x_i, y_j à la droite.

Je vous laisse à décider la question si l'utilité de l'invariance pour vos recherches serait atteinte par l'invariance restreinte précédente ~~ou~~ s'il est nécessaire de ~~ne~~ ne pas limiter le choix de a, b, a', b'. En tout cas il me paraît évident qu'il faut limiter au cas où $ab' - ba' \neq 0$ tout au moins s'il s'agit ~~de~~ d'étudier l'existence de dépendances fonctionnelles exactes. Et même il faudrait sans doute introduire une condition comme $\dfrac{|ab' - b'a|}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2}} \leq \varepsilon$ fixe s'il s'agissait de dépendances fonctionnelles approchées.

Votre bien cordialement dévoué

M. Fréchet

P.S. J'espère que votre rhume se sera dissipé.

Et je vous prie de ne pas oublier de répondre à ma circulaire, puisque vous avez bien voulu m'en exprimer l'intention.

U. B. Oslo
Brevs. nr.
761 A

FACULTÉ DES SCIENCES

INSTITUT HENRI POINCARÉ

11, Rue Pierre-Curie (V^e^)

TÉL. : ODÉON 42-10

UNIVERSITÉ DE PARIS

Paris, le 21 Déc. 1933

Mon cher collègue.

Je suis maintenant de retour à Paris et ravi de mon voyage en Scandinavie.

Je commence à classer mes papiers et j'ai relu les huit réponses que j'ai reçues au sujet de ma circulaire. La vôtre est une des plus intéressantes. Non seulement, je n'ai aucune objection à y faire, mais j'y ai appris beaucoup.

Cependant je me demande si la question à laquelle vous avez voulu répondre ne serait pas un peu différente de celle que j'avais dans l'esprit.

Il me semble que vous répondez à ceci :

Le coefficient r a-t-il une signification ?

Tandis que ma question est :

le coefficient $|r|$ repère-t-il l'intensité de la relation entre X et Y. Si $|r| > |r'|$ est-il exact ou au moins admissible que ~~les~~ l'ensemble des points observés (x_i, y_j, de poids n_{ij}) soi~~ent~~t plus proche d'une ligne (droite <u>ou</u> courbe) dans le premier cas que dans le second.

Si par exemple on pose $X = \sin t$, $Y = \sin(t+\varphi)$ où φ est constant et t varie, un bon index de l'intensité de la relation (entre X et Y) devrait être exactement égal à 1 quel que soit φ, car alors $Y = \sin(\varphi + \arcsin X)$. Donc Y entièrement fonction de X.

Et si l'on avait $Y = \sin(t+\varphi) + \varepsilon(t, \varphi)$, où $\varepsilon(t, \varphi)$ varie ~~[illegible]~~ sans être périodique en t, r devrait être d'autant plus voisin de 1 que l'ensemble des valeurs de ~~$\varepsilon(t,\varphi)$~~ pour ~~toutes~~ les valeurs $t + 2k\pi$ (t fixé) est plus petit quel que soit t.

Ma formule $r = \eta\rho$ (dont je me suis aperçu qu'elle a paru aux CR du 27 (ou du 20 ?) Nov.) me conduit à conclure que : ρ étant étranger à la notion d'intensité de la relation, on peut, peut-être faire des objections à η, mais on n'aura en tout cas jamais de raison d'employer r (ρ) de préférence à η <u>en ce qui concerne l'existence</u> d'une relation entre deux variables statistique. Par contre r peut servir pour l'interpolation, problème <u>essentiellement distinct</u>.

D'ailleurs, je serais heureux si vous pouviez réserver votre opinion sur le point que je soulève maintenant jusqu'à la publication d'un petit mémoire que j'ai sous presse dans le Bull. ~~Internat~~ de l'Inst. Int. de Statistique.

Encore merci et bien cordialement,

M. Fréchet

U B Oslo
Brevs nr
761A

15 Janvier 1934.

Mon cher collègue,

Voulez vous me permettre de rappeler à votre souvenir le questionnaire que j'ai eu l'honneur de vous adresser au sujet du soi-disant coefficient de corrélation.

Si vous teniez à envisager le cas où l'on connait quelquechose de plus que la valeur de ce coefficient, je serais heureux si vous pouviez, auparavant, prendre connaissance du court article de 8 pages que j'ai publié dans le dernier numéro paru (daté Janvier 1934) de la Revue de l'Institut International de Statistique, pages 16-23, en français, avec résumé en anglais. J'attire surtout votre attention sur la p.20, où je is avoir montré que, pour mesurer l'étroitesse d'une dépendance, on doit toujours préférer le rapport de corrélation η, de Pearson, au coefficient de corrélation r, même quand la courbe des moyennes est presque rectiligne et même, quand, de plus, les deux variables statistiques obéissent à la loi de fréquence de Laplace-Gauss.

Mais j'attire votre attention sur le fait que ma question concerne la légimité de l'estimation de l'étroitesse d'une relation fonctionnelle moyennant la seule connaissance du coefficient de corrélation, r, dit aussi de Bravais-Galton.

Si vous pouviez me donner une réponse assez proche, il me serait possible de l'insérer- et je le désirerais vivement -avec les autres réponses déjà reçues dans la communication que je compte présenter à la prochaine session (Pâques 1934) de l'Institut International de Statistique. Or les communications doivent être envoyées en temps utile pour l'impression avant la session.

En vous remerciant d'avance, je vous prie d'agréer, mon cher collègue, l'expression de mes sentiments très distingués.

P.S. Au cas où vous n'auriez pas à votre disposition la Revue mentionnée plus haut, je me ferais un plaisir de vous envoyer un tiré à part de mon article.

M.Fréchet Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
12 Square Desnouettes
Paris, 15ème.

Expédié par:

M.

CARTE POSTALE

CAISSE NATIONALE D'EPARG

18.000

BUREAUX DE POSTE

à votre disposition

PARIS ... R. ST ROMAIN 17 45 28-3 1963

Monsieur le Professeur

Ragnar Frisch

Sosialøkonomisk Institutt

Universitetet i

Oslo

Norvège

Mon cher confrère 27.3.63

Tout à fait d'accord sur vos objections et sur votre proposition de tenir le 1er Congrès mondial de la Société Internationale d'Économétrie (1) à Lausanne

Bien cordialement à vous

M Fréchet

FRECHET

(1) Je n'aime pas le titre Econ. Soc. qui semble correspondre à une Soc. Nationale.

P.S. Je ne compte pas assister à ce prochain Congrès, pour des raisons familiales

U. B. Oslo
Brevs nr.
761 A