NORSK MATEMATISK FORENINGS SKRIFTER

SERIE I. NR. 14

Remarque sur le calcul numérique des fonctions symétriques élémentaires.

PAR

RAGNAR FRISCH

KRISTIANIA
GRØNDAHL & SØNS BOKTRYKKERI
1923

Remarque sur le calcul numérique des fonctions symétriques élémentaires.

Soient $x_1\, x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ n quantités données numériquement. Nous nous proposons de calculer la fonction symétrique élémentaire d'ordre p $(1 \overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} n)$ de ces quantités, c'est-à-dire la somme des produits que l'on obtient en formant toutes les combinaisons possibles d'ordre p des n quantités $x_1\, x_2 \ldots x_n$. Soit a_p la somme considérée, de sorte que l'on a par définition:

$$a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$a_2 = x_1\, x_2 + x_1\, x_3 + \ldots + x_2\, x_3 + \ldots + x_{n-1}\, x_n$$
$$a_3 = x_1\, x_2\, x_3 + x_1\, x_2\, x_4 + \ldots + x_2\, x_3\, x_4 + \ldots + x_{n-2}\, x_{n-1}\, x_n$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$a_n = x_1\, x_2 \ldots x_n$$

Prenons le nombre des multiplications comme un indice de la quantité de travail que comporte le calcul.

Le nombre de termes en a_p étant $\binom{n}{p}$ il faut effectuer $(p\text{-}1)\binom{n}{p}$ multiplications pour calculer a_p directement.

Pour calculer la même quantité par la formule récurrente bien connue

$$(1) \qquad (-1)^{k-1}\, k\, a_k = s_k - a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}\, a_{k-1} s_1$$
$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \quad (k = 1, 2, 3 \ldots p)$$

il faut: d'abord $n\,(p-1)$ pour calculer les p quantités $s_1\, s_2 \ldots s_p$ et ensuite $1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1) = \binom{p}{2}$ pour développer les formules (1) pour $k = 2, 3, \ldots p$, soit en tout $(p-1)\left(n + \frac{p}{2}\right)$ multiplications (sans compter les multiplications par les coëfficients entiers k). Donc une économie de multiplications pour le cas ou $1 < p < n - 1$.

Nous pouvons obtenir une économie de multiplications plus considérable en procédant par un calcul récurrent non-seulement en k mais encore en i.

Supposons les n quantités x_i rangées en un ordre de succession choisi à l'arbitraire. Soit $x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ l'ordre choisi, et soit $a_{k,i}$ la fonction symétrique élémentaire d'ordre k des i quantités $x_1 x_2 \ldots x_i$.

$a_{k,i}$ étant la somme des produits que l'on obtient en formant toutes les combinaisons possibles d'ordre k des i quantités $x_1 x_2 \ldots x_i$ et $a_{k,i-1}$ étant la somme des produits que l'on obtient en formant toutes les combinaisons possibles d'ordre k *des mêmes quantités sauf* x_i, nous voyons que $a_{k,i}$ contient tous les termes de $a_{k,i-1}$ et en plus un certain nombre de termes ayant x_i comme facteur. Ces derniers termes ne se distinguant entre eux que par les combinaisons des $(k-1)$ facteurs autres que x_i — nous obtiendrons évidemment leur somme en multipliant par x_i la somme des produits que l'on obtient en formant toutes les combinaisons possibles d'ordre $(k-1)$ des $(i-1)$ quantités $x_1 x_2 \ldots x_{i-1}$, c'est-à-dire par $a_{k-1,i-1}$.

Nous avons donc

(2) $$a_{k,i} = a_{k,i-1} + x_i a_{k-1,i-1}$$

Formule qui permet de calculer $a_{p,n}$ à l'aide des quantités intermédiaires $a_{k,i} \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots p \\ i = k, (k+1) \ldots\ldots (n+k-p) \end{pmatrix}$

Les quantités $a_{1,i}$ $(i = 1, 2 \ldots (n-p+1))$ et $a_{k,k}$ $(k = 1, 2 \ldots p)$ étant calculées directement.

$a_{p,n}$ étant une fonction symétrique de $x_1 x_2 \ldots x_n$, le résultat est évidemment indépendant de l'ordre des quantités x_i que nous avons adopté. On voit que ceci n'est pas exact pour toutes les quantités intermédiaires $a_{k,i}$.

Les quantités $a_{1,i}$ ne nécessitant aucune multiplication, les autres quantités en nécessitant chacune une, le nombre total des multiplications sera $(p-1)(n-p+1)$, nombre qui est inférieur au nombre de multiplications nécessitées, soit par le calcul direct, soit par le calcul à l'aide de (1), sauf dans les cas $p = \begin{cases} 1 \\ n \end{cases}$, le calcul par (2) se confondant dans ces cas avec le calcul direct.

L'emploi de la formule (2) est surtout avantageux quand le problème particulier que l'on considère est tel, que l'on a besoin de connaître non-seulement la quantité $a_{p,n}$ mais encore toutes les quantités $a_{k,i} \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots i \\ i = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$, ce qui est par exemple le cas quand on veut développer la formule d'interpolation de Newton, suivant les puissances entières et positives de l'argument, les coëfficients de ce développement étant certaines expressions linéaires des fonctions symétriques élémentaires $a_{k,i}$ $\begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots i \\ i = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$ des valeurs données de l'argument, valeurs que l'on peut d'ailleurs supposer données à distances égales ou inégales.

Le nombre de multiplications nécessitées pour calculer toutes les quantités $a_{k,i}$ $\begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots i \\ i = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$ directement est $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=k}^{n} (k-1) \binom{i}{k}$ $= (n-3) 2^n + (n+3)$.

Pour calculer les mêmes quantités par les formules

$$(3) \qquad (-1)^{k-1} k a_{k,i} = s_{k,i} - a_{1,i} s_{k-1,i} + a_{2,i} s_{k-2,i} \ldots \ldots + (-1)^{k-1} a_{k-1,i} s_{1,i}$$

$$s_{k,i} = \sum_{j=1}^{i} x_j^k \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots i \\ i = 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

il faut effectuer d'abord $n(n-1)$ multiplications pour trouver les quantités $s_{k,i}$ et ensuite $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{i} (k-1) = \binom{n+1}{3}$ multiplications pour développer les formules (3), soit en tout $\frac{n+7}{3} \binom{n}{2}$. L'économie de multiplication par l'emploi de la formule (2) est donc considérable, l'application de cette formule nécessitant seulement $\binom{n}{2}$ multiplications. Pour $n = 10$ le nombre de multiplications est par exemple: calcul direct: 7181, calcul par (3): 255, calcul par (2): 45.

De plus, le calcul à l'aide de la formule (2) peut être fait par étapes correspondantes aux valeurs $1, 2 \ldots n$, de i, avec la possibilité de contrôler le résultat pour chaque étape.

En effet, posons dans l'identité

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i) = x^i - a_{1,i} x^{i-1} + a_{2,i} x^{i-2} - \ldots + (-1)^i a_i,$$

$x = -1$, nous aurons

$$a_{1,i} + a_{2,i} + \ldots + a_{i,i} = (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_i+1) - 1$$

relation qui est très commode pour le contrôle.

En pratique le calcul peut être effectué par le schéma que voici

		$a_{k,i}$							
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$		$k=n$		
$i=1$	x_1	x_1						$z_1=x_1+1$	z_1
$i=2$	x_2	x_1+x_2	x_1x_2					$z_2=x_2+1$	z_1z_2
$i=3$	x_3	$x_1+x_2+x_3$	.	$x_1\,x_2\,x_3$				$z_3=x_3+1$	$z_1z_2z_3$
$i=4$	x_4	$x_1+x_2+x_3+x_4$	.	.	$x_1x_2x_3x_4$			$z_4=x_4+1$	$z_1z_2z_3z_4$
.	.	.	.	.	.	.		.	.
.	.	.	. .	.	.			.	.
$i=n$	x_n	$x_1+x_2\,..+x_n$	..	..	..	..	$x_1x_2..x_n$	$z_n=x_n+1$	$z_1z_2\,..z_n$

Dans la première colonne on pose les indices $i=1, 2 \ldots n$, dans la deuxième les valeurs données $x_1\, x_2 \ldots x_n$. Vient ensuite la partie centrale du schéma, partie ou chaque carré correspond à une des quantités $a_{k,i}$. Dans la première colonne de cette partie du schéma on inscrit les sommes $\sum\limits_{j=1}^{i} x_j$ $(i=1, 2 \ldots n)$ c'est-à-dire les quantités $a_{1,i}$. Dans la diagonale on inscrit les produits $\prod\limits_{j=1}^{i} x_j$ $(i=1, 2 \ldots n)$ c'est-à-dire les quantités $a_{i,i}$. Dans les deux dernières colonnes du schéma on inscrit les quantités $z_i = x_i + 1$ et $\prod\limits_{j=1}^{i} z_j$.

Pour calculer les quantités sur la ligne i-ième, on fait sur une feuille mobile (quadrillée de la même façon que le schéma et posée au-dessus de la ligne $(i-1)$-ième) les produits de x_i par les quantités de la ligne $(i-1)$-ième, sauf la dernière quantité de cette ligne. Ces calculs étant faits, on déplace la feuille mobile d'une colonne vers la droite, et on inscrit sur la ligne i-ième du schéma, pour chaque colonne, la somme de la quantité inscrite sur la feuille mobile et la quantité correspondante sur la ligne $(i-1)$-ième. On contrôle si la somme des quantités sur la ligne i-ème est égale à la quantité $z_1\, z_2 \ldots z_i$ (inscrite à droite sur la même ligne) moins un. Le calcul vérifié on procède au calcul des quantités de la ligne $(i+1)$-ième, et ainsi de suite jusqu'à la ligne n-ième.

Ragnar Frisch.