Solution d'un problème du calcul des probabilités.

(Premier problème de Simmons.)

Par **Ragnar Frisch** (Christiania).

A la dernière réunion annuelle de la Société Norvégienne de Mathématiques, M. le Professeur Guldberg a fait une conférence très intéressante, dans laquelle il a montré comment on est arrivé par des considérations élémentaires du calcul des probabilités à un problème connu sous le nom de »Problème de Simmons». Je me permets de présenter quelques réflexions sur ce problème, que m'a suggéré l'intéressante conférence de M. Guldberg.

Soit p la probabilité pour la réalisation d'un certain évènement. La probabilité pour que l'évènement se produise ν fois en s épreuves est d'après un théorème bien connu $T_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$ où $q = 1 - p$.

Les probabilités pour que l'évènement se produise respectivement $0, 1, 2 \ldots s$ fois en s épreuves, seront donc données par les termes du développement de $(q+p)^s$ c'est-à-dire par les termes de la série

$$(1) \quad T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_s = q^s + \binom{s}{1} p^1 q^{s-1} + \binom{s}{2} p^2 q^{s-2} + \cdots + p^s$$

où p et q sont des quantités positives satisfaisant à la relation $q + p = 1$, s un nombre entier et positif.

Formant le quotient $\frac{T_\nu}{T_{\nu-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s-\nu+1}{\nu}$ nous voyons que le terme T_ν est plus grand que, respectivement égal à, ou plus petit que le terme précédant suivant que

$$(2) \qquad \nu \lesseqgtr (s+1)p.$$

Il faut distinguer deux cas principaux suivant que $(s+1)p$ est ou n'est pas un nombre entier.

Premièr cas. — $(s+1)p$ est un nombre entier. Dans ce cas nous déduisons de la relation (2) que les termes de la série (1) sont croissants jusqu'au terme $T_{(s+1)p-1}$ inclus, et décroissants à partir du terme $T_{(s+1)p}$.

Les deux termes consécutifs $T_{(s+1)p-1}$ et $T_{(s+1)p}$ sont égaux et plus grand que les autres termes de la série. On peut dire qu'ils forment un couple de termes maximals.

Deuxième cas. — $(s+1)p$ n'est pas un nombre entier.

Soit $E(x)$ un symbole désignant le plus grand des nombres entiers non négatifs, qui sont compris dans la quantité positive x de sorte que

$$(3) \qquad x - 1 < E(x) \leqq x.$$

Si $(s+1)p$ n'est pas un nombre entier, les termes de la série (1) vont en croissant jusqu'au terme $T_{E((s+1)p)}$ inclus et de là en décroissant. Il existe dans ce cas un seul terme maximal, à savoir le terme $T_{E((s+1)p)}$. Cela signifie que le résultat *le plus probable* des s épreuves est que l'évènement se produise $E((s+1)p)$ fois. La probabilité de ce résultat est justement la valeur du terme $T_{E((s+1)p)}$.

Remarquons que si $p < \frac{1}{s+1}$ le terme maximal se trouve être le premier terme de la série. La série est dans ce cas monotone et décroissante. Si $q < \frac{1}{s+1}$ la série est monotone et croissante.

Si $(s+1)p$ n'est pas un nombre entier, il faut encore distinguer les deux cas ou sp est ou n'est pas un nombre entier. Cette distinction sera fondamentale pour notre problème.

sp et $(s+1)p$ ne pouvant à la fois être des nombres entiers, si sp est un nombre entier la série (1) a toujours un seul terme maximal, qui est justement le terme T_{sp} puisque dans ce cas $E((s+1)p) = sp$.

Remarquons que les diverses règles ci-dessus relatives au maximum de la série (1) sont embrassées par la règle unique: L'exposant de p dans le terme maximal, éventuellement dans le second des deux termes maximals, est toujours $E((s+1)p)$.

Remarquons enfin que $q+p$ étant égal à l'unité, nous pouvons sans nuire à la généralité supposer $p \leqq \frac{1}{2}$.

Cela étant, soit $p \leqq \frac{1}{2}$ (sp ou $(s+1)p$ un nombre entier ou non). Alors le nombre de termes dans la série (1) ou l'exposant de p est plus petit que sp n'est jamais supérieur au nombre de termes ou l'exposant de p est plus grand que sp. Pour cette raison j'appelle avec M. Simmons[1] les premiers termes le *côté-court*, et les derniers termes le *côté-long* (shortside, longside) de la série (1).

On voit que la somme du côté-court représente la probabilité pour que l'évènement $\left(\text{dont la probabilité est égale à ou plus petite que } \frac{1}{2}\right)$ se produise moins de sp fois en s épreuves. La somme du côté-long représente la probabilité pour que l'évènement se produise plus de sp fois en s épreuves.

Si sp est un nombre entier le côté-court est identique aux termes qui précèdent le terme maximal, et le côté-long identique aux termes qui suivent le terme maximal. Le terme maximal lui-même n'appartient dans ce cas ni au côté-court, ni au côté-long. Au contraire, si sp n'est pas un nombre

[1] Proceedings of the London Mathematical Society Vol. XXVI (1895), p. 292. La notation employée par M. Simmons est une autre que celle adoptée ici.

entier, le terme maximal appartient au côté-long si $E((s+1)p) > sp$ c'est-à-dire s'il y a un nombre entier et positif entre sp et $(s+1)p$, dans le cas contraire le terme maximal appartient au côté-court. Si $(s+1)p$ est un nombre entier, c'est-à-dire si la série (1) possède un couple de deux termes maximals, le premier de ces termes appartient au côté-court, le second au côté-long.

L'expérience fournit beaucoup d'exemples où les séries ayant montré moins de sp arrivées d'un certain évènement dont la probabilité est plus petite que $\frac{1}{2}$ *sont plus fréquentes* que les séries ayant montré plus de sp arrivées de l'évènement. Ainsi M. Simmons a par exemple trouvé que entre 100 séries chacune de 150 chiffres tirés au sort, les séries ayant montré un chiffre donné par exemple 7, moins de 15 fois, étaient plus fréquentes que les séries ayant montré le même chiffre plus de 15 fois.[1]

Un tel résultat est-il à prévoir d'après la théorie? C'est là le problème de Simmons. La solution de ce problème dépend d'une comparaison entre la somme du côté-court et la somme du côté-long de la série (1).

Quand sp n'est pas un nombre entier il est facile de trouver telles valeurs numériques de s et p qui rendent la somme du côté-court de la série (1) soit plus petite soit plus grande que la somme du côté-long. Au contraire quand sp est un nombre entier on ne trouve pas de telles valeurs numériques de s et p qui rendent la somme du côté-court plus petite que la somme du côté-long.

Deux problèmes se posent alors. L'un que j'appelle le premier problème de Simmons peut être formulé ainsi: sp étant un nombre entier, p étant $< \frac{1}{2}$ la somme du côté-court est-elle toujours plus grande que la somme du côté-long. Si la réponse est affirmative, l'excès du côté-court sur le côté-long est-il d'autant plus grand que p est plus petit (s supposé constant)? L'autre problème que j'appelle le deuxième problème de Simmons peut être formulé de la façon suivante: sp n'étant

[1] l. c., p. 291.

pas un nombre entier p étant $< \frac{1}{2}$, s ou p étant considéré comme des variables fortuites, c'est-à-dire des variables pouvant prendre des valeurs distinctes positives avec des probabilités données (s étant encore assujetti à la condition d'être un nombre entier) quelles sont les lois de distribution de s et p, sous lesquelles l'espérance mathématique du côté-court est plus grande que l'espérance mathématique du côté-long?

Il est essentiel de distinguer nettement les deux problèmes. C'est ce que M. Simmons n'a pas fait d'une manière suffisamment précise dans le mémoire cité. Le fait qu'il emploie le même symbole pour représenter l'excès du côté-court sur le côté-long aussi bien le cas où sp est un nombre entier que dans le cas contraire, se prête facilement à quelque ambiguité, d'autant plus qu'il ne prend pas toujours le soin d'exprimer explicitement dans lequel des deux cas les propositions sont établies. Le fait que pour quelques-uns des passages il a seulement rendu les résultats probables à l'aide des exemples numériques, tandis que pour d'autres il a donné une démonstration rigoureuse, ne contribue pas à rendre son exposition de la matière très claire. C'est ce qui explique que les auteurs qui ont cité son mémoire ont cru qu'une certaine condition spéciale introduite par M. Simmons, à savoir la condition que p doit être la forme $\frac{1}{D}$ où D est un nombre entier et positif, est une condition nécessaire pour la validité de tous ses résultats. Pourtant si on se borne à considérer la première partie seulement de ce que j'ai appelé premier problème de Simmons, à savoir l'existence de l'inégalité des deux côtés, on peut dire que le mémoire de M. Simmons contient une solution qui n'a pas besoin d'être qualifiée par la condition $p = \frac{1}{D}$,[1] ou du moins on peut dire que le mémoire contient

[1] Il faut remarquer que la déduction de M. Simmons sur ce point contient une légère inexactitude. La quantité K_r (l. c., p. 316) n'est pas nécessairement monotone dans sa variation comme le suppose M. Simmons. (»K_r . . . diminishes with increasing rapidity at every subsequent term.») Il peut se faire qu'elle passe par un extrême. Dans ce cas l'extrême est

une idée à l'aide de laquelle la solution en question se présente immédiatement. C'est l'idée de comparer deux à deux les termes de la série (1) qui se trouvent à distances égales du terme maximal.[1]

Des deux problèmes de M. Simmons le premier est à mon avis de beaucoup le plus intéressant.[2] Dans les lignes qui suivent je donnerai la solution de ce problème. Supposant $sp =$ un nombre entier, $p < \frac{1}{2}$ je vais d'abord démontrer par une méthode complètement différente de celle employée par M. Simmons, non-seulement que la somme du côté-court est toujours plus grande que la somme du côté-long, mais encore que l'excés est d'autant plus grand que p est plus petit (s supposé constant). Ensuite je vais établir la première partie de ce résultat aussi par une autre méthode. Je démontrerai un lemme très simple relatif à des distributions quelconques satisfaisant à une certaine condition. Utilisant l'idée de M. Simmons je tirerai de ce lemme immédiatement la proposition que la somme du côté-court est plus grande que la somme du côté-long.

---

cependant un maximum et cela suffit pour garantir la validité du passage. Ci-après je donne la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité considérée passe par un extrême.

[1] M. Simmons remarque qu'en partie il doit la démonstration à M. Biddle qui aura donné la démonstration sous une forme quelque peu différente dans le »Educational Times Reprint« Vol. LXIII. Quest. 12686. Malheureusement cette collection n'est pas à ma disposition.

[2] M. Fisher critiquant (Mathematical Theory of Probabilities p. 277 et suiv.) la manière dont M. Keynes a exposé le théorème de M. Simmons a fait remarquer que notre problème n'est en somme autre chose que de savoir si la loi de distribution exprimée par le développement binomial est assymmétrique en »skew«, et que c'est là une propriété du développement binomial qui a déjà été remarquée par Laplace. Je ne puis m'associer à cette remarque. Sans doute Laplace a reconnu l'assymmétrie du développement binomial *dans le sens que les termes se trouvant à distances égales du terme maximal ne sont pas toujours égaux.* En effet à la page 283 de la »Théorie Analythique . . .« nous trouvons une expression pour le terme général du développement binomial, qui dans notre notation peut s'écrire

$$T_{m-l} = \binom{s}{m-l} p^{m-l} q^{s-m+l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{s p_0 q_0}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2 s p_0 q_0}} \cdot \left[1 + \begin{matrix}\text{termes contenant } l \\ \text{élevé à des puissan-} \\ \text{ces impaires.}\end{matrix}\right]$$

$$m = E((s+1)p), \quad p_0 = \frac{m}{s}, \quad q_0 + p_0 = 1.$$

Cependant ce n'est pas dans ce sens là que nous étudions l'assymétrie du développement binomial. C'est dans le sens que la somme des termes se trouvant avant le terme maximal est plus grand que la somme des termes se trouvant après le terme maximal, ce qui est une toute autre chose.

Notre étude du développement binomial ne se confond pas non plus avec l'étude de son »skewness« dans le sens de Pearson (Phil. Trans. A. vol. CLXXXVI p. 343) et de Yule (Theory of Statistics 5ième Ed. p. 150). Le »skewness« de Pearson et de Yule étant défini comme la différence entre la moyenne arithmétique des observations (mean) et la dominante (mode) divisée par la déviation type (standard deviation), est toujours égal à zéro pour la distribution binomiale discontinue quand sp est un nombre entier, parceque dans ce cas la dominante (= l'exposant sp de p dans le terme maximal) et la moyenne arithmétique $\sum_{\nu=0}^{s} \nu \binom{s}{\nu} p^{\nu} q^{s-\nu} = sp$ se confondent.

Le coëfficient d'excès.

Soit $m = E((s+1)p)$ l'exposant de p dans le terme maximal éventuellement dans le second des termes maximals de la série (1). Alors m est définie univoquement par les relations

$$(4) \qquad (s+1)p - 1 < m \leqq (s+1)p$$

(m un nombre entier non négatif).

Je considère p comme variable indépendante et $m = E((s+1)p)$ définie par (4) comme une fonction de p et du paramètre constant s.

L'interprétation géométrique de $m = E((s+1)p)$ entre $p = 0$ et $p = \frac{1}{2}$ dans un système de coordonnées rectangulaires est une suite de segments de droites parallèles à l'axe des p à distances $k = 0, 1, 2 \ldots \begin{cases} \frac{s}{2} & (s \text{ pair}) \\ \frac{s-1}{2} & (s \text{ impair}) \end{cases}$ et donc les extrémités se trouvent à distances $\frac{k}{s+1}$, $\frac{k+1}{s+1}$ de l'axe des m.

J'appelle coëfficient d'excès l'expression

$$V(p) = 2\sum_{\nu=m+1}^{s} T_\nu + T_m = 2\sum_{\nu=m}^{s} T_\nu - T_m \tag{5}$$

où m est définie comme fonction de p par (4).

Le coëfficient d'excès est donc une fonction de la variable indépendante p et du paramètre constant s.

Si sp est un nombre entier et positif la différence entre la somme du côté-court et la somme du côté-long est

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} T_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{s} T_\nu = 1 - \left[2\sum_{\nu=m}^{s} T_\nu - T_m\right] = 1 - V(p).$$

Cet excès est donc d'autant plus grand que $V(p)$ est plus petit. L'excès est positif si $V(p) < 1$.

Si sp doit être un nombre entier et positif et $p \lesseqgtr \frac{1}{2}$, p est assujetti à prendre les valeurs

$$p = \frac{k}{s},\quad k = 1, 2 \ldots \begin{cases} \frac{s}{2} & (s \text{ pair}) \\ \frac{s-1}{2} & (s \text{ impair}). \end{cases}$$

Dans le cas $k = \frac{s}{2}$, nous avons évidemment $V\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ parceque alors le développement binomiale est parfaitement symétrique.

On voit que le premier problème de Simmons revient à démontrer

$$V\left(\frac{1}{s}\right) < V\left(\frac{2}{s}\right) < \ldots < \begin{cases} V\left(\frac{s}{2s}\right) = 1 & (s \text{ pair}) \\ V\left(\frac{s-1}{2s}\right) < 1 & (s \text{ impair}). \end{cases}$$

Lemme I. —

Soit p et q des quantités réelles, $q + p = 1$, s un nombre entier et positif, g un quelconque des nombres entiers non négatifs $0, 1, 2, \ldots s$.

Alors

$$\sum_{\nu=g}^{s} (\nu - sp)\binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu} = q\,g\binom{s}{g} p^g q^{s-g}.$$

En effet, nous avons

$$\sum_{\nu=g}^{s} (\nu - sp)\binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu} =$$

$$= p\left[\sum_{\nu=g}^{s} \nu\binom{s}{\nu} p^{\nu-1} q^{s-\nu} - \sum_{\nu=g}^{s} ((s-\nu)+\nu)\binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}\right] =$$

$$= p\left[\sum_{\nu=g}^{s} \nu\binom{s}{\nu} p^{\nu-1} q^{s-\nu} - p\sum_{\nu=g}^{s} \nu\binom{s}{\nu} p^{\nu-1} q^{s-\nu} - \sum_{\nu=g}^{s-1} (\nu+1)\binom{s}{\nu+1} p^\nu q^{s-\nu}\right] =$$

$$= pq\left[\sum_{\nu=g}^{s} \nu\binom{s}{\nu} p^{\nu-1} q^{s-\nu} - \sum_{\nu=g+1}^{s} \nu\binom{s}{\nu} p^{\nu-1} q^{s-\nu}\right] = q\,g\binom{s}{g} p^g q^{s-g}.$$

Corollaire. —

On tire du lemme ci-dessus immédiatement la valeur de la déviation moyenne d'une variable fortuite X qui peut assumer les valeurs $\nu = 0, 1, 2, \ldots s$ avec les probabilités

$$T_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}.$$

En effet, remarquant que $\sum_{\nu=0}^{s} \nu\, T_\nu = sp$ donc $\sum_{\nu=0}^{s} (\nu - sp)\, T_\nu = 0$ nous avons pour la déviation moyenne l'expression

$$M(|X - sp|) = 2\sum_{\nu=h}^{s} (\nu - sp)\binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu} = 2\,q\,h\binom{s}{h} p^h q^{s-h}$$

où $h = E(sp + 1)$.

Si sp est un nombre entier l'expression de la déviation moyenne ne change pas si nous écrivons $h-1$ au lieu de h, ce qui donne $2\,spq\binom{s}{sp}p^{sp}q^{sq}$ c'est-à-dire $2\,spq$ multiplié par le terme maximal.

Si $(s+1)p$ est un nombre entier, h se confond avec l'exposant de p dans le second des deux termes maximals.

S'il y a un nombre entier entre sp et $(s+1)p$, h se confond encore avec l'exposant de p dans le terme maximal. Dans tout autre cas h excède d'une unité l'exposant de p dans le terme maximal.

Théorème I. —

Soit s un nombre entier et positif >3, soit k un quelconque des nombres entiers et positifs $2, 3 \ldots \begin{cases} \frac{s}{2} & (s \text{ pair}) \\ \frac{s-1}{2} & (s \text{ impair}). \end{cases}$ *Je dis que le coëfficient d'excès défini par* (5) *satisfait à l'inégalité*

$$V\left(\frac{k-1}{s}\right) < V\left(\frac{k}{s}\right).$$

Pour démontrer cette inégalité je définis la fonction suivante de p

$$W_k(p) = 2\sum_{\nu=k}^{s} T_\nu - T_k \tag{7}$$

où k et s sont deux paramètres *ne dépendant pas de p*, k et s des nombres entiers et positifs $k \lesseqgtr s$.

Posons pour abréger

$$\frac{k}{s} = p_0 \qquad \frac{k-1}{s} = p_1,$$

$$\frac{s-k}{s} = q_0 \qquad \frac{s-k+1}{s} = q_1.$$

Soit T_{m_0} le terme maximal de la série (1) pour $p = p_0$, T_{m_1} le terme maximal pour $p = p_1$.

En vertu de (4) nous avons

$$m_0 = E((s+1)p_0) = k$$
$$m_1 = E((s+1)p_1) = k-1.$$

D'où en tenant compte des définitions (5) et (7)

$$V\left(\frac{k}{s}\right) = W_k\left(\frac{k}{s}\right),$$
$$V\left(\frac{k-1}{s}\right) = W_{k-1}\left(\frac{k-1}{s}\right)$$

donc

$$V\left(\frac{k}{s}\right) - V\left(\frac{k-1}{s}\right) = W_k(p_0) - W_{k-1}(p_1) =$$
$$= W_k(p_0) - W_k(p_1) - \left[\binom{s}{k}p_1^k q_1^{s-k} + \binom{s}{k-1}p_1^{k-1}q_1^{s-k+1}\right].$$

C'est-à-dire

$$V\left(\frac{k}{s}\right) - V\left(\frac{k-1}{s}\right) = \int_{p_1}^{p_0} W'_k(p)\,dp - \binom{s}{k}\left[p_1^k q_1^{s-k} + \frac{k}{s}\cdot p_1^{k-1} q_1^{s-k}\right]. \tag{8}$$

Puisque $\frac{d}{dp}(p^\nu q^{s-\nu}) = \frac{1}{pq}(\nu - sp)\,p^\nu q^{s-\nu}$ nous aurons en appliquant le lemme I

$$W'_k(p) = \frac{2}{pq}\sum_{\nu=k}^{s}(\nu - sp)\binom{s}{\nu}p^\nu q^{s-\nu} - \binom{s}{k}\frac{d}{dp}(p^k q^{s-k}),$$
$$= \binom{s}{k}\left[2\,k\,p^{k-1}q^{s-k} - \frac{d}{dp}(p^k q^{s-k})\right].$$

Portant la valeur de $W'_k(p)$ dans (8) nous obtenons l'expression suivante pour la différence cherchée

$$V\left(\frac{k}{s}\right) - V\left(\frac{k-1}{s}\right) =$$

$$= 2\binom{s-1}{k-1}\left[\frac{\int\limits_{p_1}^{p_0} p^{k-1}\, q^{s-k}\, dp}{(p_0 - p_1)} - \frac{p_0^{k-1}\, q_0^{s-k} + p_1^{k-1}\, q_1^{s-k}}{2}\right]$$

ou, en posant

$$R(p) = p^{k-1}\, q^{s-k}$$

$$(9)\qquad V\left(\frac{k}{s}\right) - V\left(\frac{k-1}{s}\right) = 2\binom{s-1}{k-1}\left[\frac{\int\limits_{p_1}^{p_0} R(p)\, dp}{p_0 - p_1} - \frac{R(p_0) + R(p_1)}{2}\right].$$

$R(p)$ étant un polynome en p (de degrée $s-1$), pour démontrer que le second membre de (9) est positif il suffit de montrer que la dérivée seconde

$$R''(p) = p^{k-3}\, q^{s-k-2}\,[(k-1)(k-2) - 2(k-1)(s-2)\,p + (s-1)(s-2)\,p^2]$$

est négative partout dans l'intervalle (p_1, p_0).

Cela revient à montrer que la conique

$$r = r(p) = (k-1)(k-2) - 2(k-1)(s-2)\,p + (s-1)(s-2)\,p^2 =$$
$$= (k-1)\,[(k-2) - (s-2)\,p] - (s-2)\,p\,[(k-1) - (s-1)\,p]$$

reste toujours dans le demi-plan des r négatifs quand p varie de $p = p_1$ à $p = p_0$. Puisque la dérivée seconde $r''(p) = 2(s-1)(s-2)$ est positive partout dans l'intervalle considéré, il suffit encore de montrer que $r(p_1)$ et $r(p_0)$ sont négatifs.

Nous avons

$$r(p_1) = \frac{k-1}{s}\,[(k-2)\,s - (s-2)(k-1)]$$
$$- \frac{(s-2)(k-1)}{s^2}\,[(k-1)\,s - (s-1)(k-1)] =$$
$$= -\,p_1\,(s q_1 - 2 p_1) = -\,p_1\,[(s-k-1) + 2\,q_1],$$

$$r(p_0) = \frac{k-1}{s}\,[(k-2)\,s - (s-2)\,k]$$
$$- \frac{(s-2)\,k}{s^2}\,[(k-1)\,s - (s-1)\,k] =$$
$$= -\,q_0\,(s p_0 - 2\,q_0) = -\,q_0\,[(k-2) + 2\,p_0].$$

Les dernières expressions sont bien négatives quand les conditions de l'énoncé sont satisfaites. Donc $R''(p)$ est négatif partout dans l'intervalle considéré, et le second membre de (9) est bien positif.

Théorème II.

Soit p et q des quantités positives, $p < \frac{1}{2}$, $q + p = 1$. Soit s un nombre entier et positif.

Je dis que quand sp est un nombre entier et positif, la somme du côté-court de la série (1) est plus grande que la somme du côté-long. L'excès de la somme du côté-court sur la somme du côté-long est d'autant plus grande que p est plus petit (s supposé constant).

En termes stochastiques le théorème peut être formulé ainsi:

Soit p la probabilité pour l'arrivée d'un certain évènement. On fait une série de s épreuves uniformes. Si $p < \frac{1}{2}$ et sp est un nombre entier, alors il est plus probable que l'évènement arrive moins de sp fois, que plus de sp fois dans les s épreuves. L'excès de la probabilité pour une série ayant montré moins de sp arrivées de l'évènement sur la probabilité pour une série ayant montré plus de sp arrivées de l'évènement, est d'autant plus grand que p est plus petit.

D'après une remarque antérieure le théorème n'est pas vrai dans le cas où sp n'est pas un nombre entier.

Dans le cas où s est un nombre pair, le coëfficient d'excès défini par (5) est égal à l'unité pour $p = \frac{1}{2}$ comme nous l'avons déjà remarqué. Dans le cas $s =$ un nombre pair le théorème est donc une conséquence immédiate du théorème I.

De même si la relation

$$V\left(\frac{s-1}{2s}\right) < 1 \tag{10}$$

était vérifiée dans le cas ou s est un nombre impair, le théorème serais aussi une conséquence immédiate du théorème I le seul cas possible qui n'est pas compris dans la condition $s > 3$ du théorème I, à savoir le cas $s = 3$, $p = \frac{1}{3}$, étant compris dans la relation (10).

Pour démontrer l'inégalité (10) je définis la fonction suivante de p

$$U(p) = 2 \sum_{\nu=\frac{s+1}{2}}^{s} T_\nu \tag{11}$$

où s est un paramètre indépendant de p, s un nombre impair et positif.

Posons pour abréger

$$p_0 = q_0 = \frac{1}{2} \qquad p_1 = \frac{s-1}{2s}$$
$$q_1 = \frac{s+1}{2s}.$$

Soit T_{m_1} le terme maximal de la série (1) pour $p = p_1$. En vertu de (4) nous avons

$$m_1 = E((s+1)p_1) = \frac{s-1}{2}$$

d'où en tenant compte des définitions (5) et (11)

$$V\left(\frac{s-1}{2s}\right) = U(p_1) + \binom{s}{\frac{s-1}{2}} p_1^{\frac{s-1}{2}} q_1^{\frac{s+1}{2}}.$$

Retranchant cette égalité de l'égalité

$$1 = U(p_0)$$

il vient

$$1 - V\left(\frac{s-1}{2s}\right) = \left[U(p_0) - U(p_1) - \binom{s}{\frac{s-1}{2}} p_1^{\frac{s-1}{2}} q_1^{\frac{s+1}{2}}\right] = \tag{12}$$
$$= \int_{p_1}^{p_0} U'(p)\,dp - \binom{s}{\frac{s-1}{2}} p_1^{\frac{s-1}{2}} q_1^{\frac{s+1}{2}}.$$

A l'aide du lemme I nous trouvons sans difficulté

$$U'(p) = (s+1)\binom{s}{\frac{s+1}{2}} (p\,q)^{\frac{s-1}{2}}.$$

Portant cette valeur en (12) nous obtenons

$$1 - V\left(\frac{s-1}{2s}\right) = \binom{s-1}{\frac{s-1}{2}} \left[\frac{\int_{p_1}^{p_0} (p\,q)^{\frac{s-1}{2}}\,dp}{p_0 - p_1} - (p_1\,q_1)^{\frac{s-1}{2}}\right]. \tag{13}$$

Puisque $(p\,q)^{\frac{s-1}{2}}$ est un polynome entier en p croissant dans tout l'intervalle (p_1, p_0) le second membre de (13) est positif, d'où

$$V\left(\frac{s-1}{2s}\right) < 1.$$

Le théorème est donc établi dans sa généralité.

Voyons maintenant comment on peut démontrer la première partie du théorème II par une autre méthode très simple.

Nous établissons d'abord un lemme assez intéressant.

Lemme II. —

Soit X une variable fortuite qui dans l'intervalle fermé (a, b), $a < b$, *peut assumer une valeur entre* $x - \frac{dx}{2}$ *et* $x + \frac{dx}{2}$ *avec la probabilité* $\varphi(x)\,dx$, $\varphi(x)$ *étant une fonction satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *à toute valeur de* x *appartenant à l'intervalle* (a, b) *correspond une valeur unique, non négative de* $\varphi(x)$.

2) *à toute valeur de* x *n'appartenant pas à l'intervalle* (a, b), $\varphi(x)$ *est égal à zéro.*

3) $\varphi(x)$ *possède une dérivée unique à tout point de l'intervalle* (a, b).

4) $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 1$.

Soit $M = \int_a^b x\varphi(x)\,dx$ *l'espérance mathématique de* X.

Je dis que si

$$b - M > M - a \tag{*1}$$

et s'il existe une quantité positive l *telle que,* $(M - \xi)$ *appartenant à l'intervalle* (a, b)

$$\varphi(M - \xi) \gtreqless \varphi(M + \xi) \tag{*2}$$

suivant que $\xi \lesseqgtr l$ (ξ *positif*) *alors*

$$\int_a^M \varphi(x)\,dx > \int_M^b \varphi(x)\,dx$$

c'est-à-dire: la probabilité pour une valeur de X inférieure à M est plus grande que la probabilité pour une valeur de X supérieure à M.

En effet de (*1) et (*2) nous tirons

$$\int_0^l (l - \xi)\,\varphi(M - \xi)\,d\xi > \int_0^l (l - \xi)\,\varphi(M + \xi)\,d\xi$$

$$\int_l^{M-a} (\xi - l)\,\varphi(M - \xi)\,d\xi < \int_l^{b-M} (\xi - l)\,\varphi(M + \xi)\,d\xi$$

d'où

$$\int_0^{M-a} (l - \xi)\,\varphi(M - \xi)\,d\xi > \int_0^{b-M} (l - \xi)\,\varphi(M + \xi)\,d\xi$$

la transformation $x = M - \xi$ au premier membre et $x = M + \xi$ au second membre nous donne

$$\int_a^M (l + (x - M))\,\varphi(x)\,dx > \int_M^b (l - (x - M))\,\varphi(x)\,dx.$$

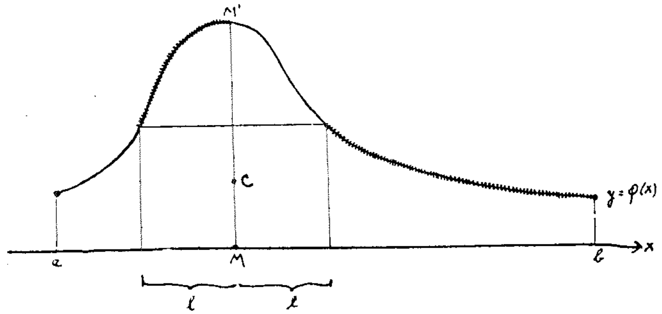
Remarquant que

$$\int_a^M (x - M)\,\varphi(x)\,dx = -\int_M^b (x - M)\,\varphi(x)\,dx$$

la dernière inégalité se réduit à l'inégalité de l'énoncé

$$\int_a^M \varphi(x)\,dx > \int_M^b \varphi(x)\,dx.$$

On peut donner à ce résultat une interprétation qui le rend presque intuitif.



Considérons la courbe dont l'équation rapportée à un système de coordonnées rectangulaires est $y = \varphi(x)$. Soit H l'aire limitée par cette courbe, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des y $x = a$ et $x = b$. Soit A la partie de cette aire qui se trouve entre les droites $x = a$ et $x = M$, B la partie de l'aire H qui se trouve entre $x = M$ et $x = b$. Soit $\overline{MM'}$ la droite $x = M$.

Imaginons l'aire H couverte par une couche de masse également dense. Soit C le centre de gravité de H. Puisque

$$M = \int_a^b x\,\varphi(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = 1,$$ C se trouve sur $\overline{MM'}$, et les moments de A et B par rapport au point C sont égaux.

Faisons l'hypothèse que l'aire B est égale à l'aire A. Alors nous pouvons déformer l'aire B de façon à la rendre parfaitement symétrique à l'aire A par rapport à $\overline{MM'}$.

Et les conditions auxquelles satisfait la fonction $\varphi(x)$ sont telles que pour performer cette opération nous n'avons besoin que de déplacer des éléments de masse vers $\overline{MM'}$.

La déformation de l'aire B ne peut donc que diminuer le moment de B par rapport à C, c'est-à-dire déplacer le centre de gravité de l'aire H (vers la gauche). Cependant l'opération accomplie les aires A et B étant devenues symétriques par rapport à $\overline{MM'}$, le centre de gravité de l'aire H doit toujours se trouver sur $\overline{MM'}$. Notre hypothèse ne peut donc être soutenue. Même résultat pour l'hypothèse $A < B$. Il faut donc bien que l'aire A soit plus grand que l'aire B.

Si la variable fortuite X est discontinue, l'énoncé prendra la forme suivante:

Soit X une variable fortuite qui peut assumer les valeurs $t = a, a+1, a+2, \ldots, a+N = b$ avec les probabilités φ_t, les quantités φ_t étant non négatives et satisfaisant en outre à la condition $\sum_{t=a}^{b} \varphi_t = 1$.

Soit $M = \sum_{t=a}^{b} t\,\varphi_t$.

Soit M_a et M_b les deux nombres qui satisfont aux conditions

$$M - 1 \gtreqless M_a < M < M_b \lesseqgtr M + 1$$

$$M_a \equiv M_b \equiv a \equiv b \quad (\text{mod. } 1)$$

soit

$$\delta_a = M - M_a$$

$$\delta_b = M_b - M.$$

Je dis que si

(*3) $$b - M_b > M_a - a$$

et s'il existe un nombre entier et positif l tel que, $(M_a - \varepsilon)$ appartenant à l'intervalle (a, b)

(*4) $$\begin{cases} \varphi_{M_a} - \varepsilon \geqq \varphi_{M_b} + \varepsilon & \text{pour } \varepsilon = 0, 1, 2 \ldots (l-1) \\ \text{mais } \varphi_{M_a} - \varepsilon \leqq \varphi_{M_b} + \varepsilon & \text{pour } \varepsilon = l, l+1, l+2 \ldots \end{cases}$$

alors

$$(l + \delta_a) \sum_{t=a}^{M_a} \varphi_t > (l + \delta_b) \sum_{t=M_b}^{b} \varphi_t .$$

En particulier dans le cas $M \equiv a$ (mod. 1) donc $\delta_a = \delta_b = 1$, $M_a = M - 1$, $M_b = M + 1$ l'inégalité se réduit à

$$\sum_{t=a}^{M-1} \varphi_t > \sum_{t=M+1}^{t} \varphi_t .$$

En effet, de (*3) et (*4) nous tirons

$$\sum_{\varepsilon=0}^{l}(l-\varepsilon)\,\varphi_{M_a-\varepsilon} \geqq \sum_{\varepsilon=0}^{l}(l-\varepsilon)\,\varphi_{M_b+\varepsilon}$$

$$\sum_{\varepsilon=l+1}^{M_a-a}(\varepsilon-l)\,\varphi_{M_a-\varepsilon} < \sum_{\varepsilon=l+1}^{b-M_b}(\varepsilon-l)\,\varphi_{M_b+\varepsilon}$$

d'où

$$\sum_{\varepsilon=0}^{M_a-a}(l-\varepsilon)\,\varphi_{M_a-\varepsilon} > \sum_{\varepsilon=0}^{b-M_b}(l-\varepsilon)\,\varphi_{M_b+\varepsilon}.$$

La transformation $t = M_a - \varepsilon$ au premier membre et $t = M_b + \varepsilon$ au second membre nous donne

$$\sum_{t=a}^{M_a}(l+(t-M_a))\,\varphi_t > \sum_{t=M_b}^{b}(l-(t-M_b))\,\varphi_t.$$

Remarquant que

$$\left(\sum_{t=a}^{M_a} + \sum_{t=M_b}^{b}\right)(t-M)\,\varphi_t = 0$$

aussi bien dans le cas $M \equiv a$ (mod. 1) que dans le cas contraire, et par conséquence

$$\sum_{t=a}^{M_a}(-(t-M_a)+\delta_a)\,\varphi_t = \sum_{t=M_b}^{b}((t-M_b)+\delta_b)\,\varphi_t$$

nous voyons que la dernière inégalité se réduit à l'inégalité de l'énoncé.

$$(l+\delta_a)\sum_{t=a}^{M_a}\varphi_t > (l+\delta_b)\sum_{t=M_b}^{b}\varphi_t.$$

La méthode de M. Simmons nous permet de tirer très facilement du lemme II la proposition que la somme du côté-court de la série (1) est plus grand que la somme du côté-long.

Remarquons d'abord que notre problème tombe bien sous le cas $M \equiv a$ (mod. 1) du lemme II, puisque dans l'espèce $M = sp$ est un nombre entier et $a = 0$. Remarquons aussi que la série (1) satisfait à la condition (*3) du lemme II puisque nous avons

$$M = \sum_{\nu=0}^{s}\nu\,T_\nu = sp,\ M_a = sp-1,\ M_b = sp+1,\ b = s,\ a = 0$$

donc $b - M_b = sq - 1$, $M_a - a = sp - 1$ et par conséquence $b - M_b > M_a - a$, p étant $< \frac{1}{2}$.

Reste seulement à vérifier si la série (1) satisfait à la condition (*4) c'est-à-dire s'il existe un nombre entier et positif l tel que, $(sp-\lambda)$ appartenant à l'intervalle $(0, s)$

$$(14)\quad \begin{cases} T_{sp-\lambda} \gtreqless T_{sp+\lambda} & \text{pour } \lambda = 1, 2, \ldots (l-1) \\ \text{mais } T_{sp-\lambda} \lesseqgtr T_{sp+\lambda} & \text{pour } \lambda = l,\ l+1,\ l+2 \ldots \end{cases}$$

Soit

$$(15)\qquad K_\lambda = \frac{T_{m-\lambda}}{T_{m+\lambda}} = \frac{\binom{s}{m-\lambda}}{\binom{s}{m+\lambda}}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{2\lambda},\quad m = sp$$

d'où

$$(16)\ \frac{K_{\lambda+1}}{K_\lambda} = \left(\frac{q}{p}\right)^2\cdot\frac{m(m+1)-\lambda(\lambda+1)}{n(n+1)-\lambda(\lambda+1)} =$$

$$= 1 + \frac{(q-p)[spq-\lambda(\lambda+1)]}{p^2[sq(sq+1)-\lambda(\lambda+1)]},\quad n = sq$$

$(q-p)$ et $[sq(sq+1)-\lambda(\lambda+1)] = [n(n+1)-\lambda(\lambda+1)]$ étant des quantités essentiellement positives, si λ parcourt les valeurs $1, 2 \ldots m$ la fraction du dernier membre de (16) ne peut changer de signe qu'en passant du positif au négatif. Donc

K_λ ne peut passer par un minimum. Cela suffit pour vérifier les conditions (14) puisque $K_1 = \dfrac{s + \frac{1}{p}}{s + \frac{1}{q}} > 1$, p étant $< \frac{1}{2}$, et par conséquence K_λ ne peut être > 1 pour une valeur de λ supérieure à une valeur $\lambda = l$ pour laquelle $K_\lambda \lesseqgtr 1$.

On vérifie aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que K_λ passe par un maximum est $2 < spq$ et que $K_{\lambda+1} \gtreqless K_\lambda$ suivant que $\lambda \lesseqgtr + \sqrt{spq + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$.