CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur un problème du calcul des probabilités (problème de Simmons).* Note de M. **Ragnard Frisch**, présentée par M. Hadamard.

Laplace, dans sa classique Théorie analytique des Probabilités, a étudié la dissymétrie du développement

$$(1)\qquad (q+q)^s = T_0 + T_1 + \ldots + T_s,\qquad T_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu},\qquad (q+p)=1$$

(s un nombre entier et positif, p et q des quantités positives), la dyssymétrie étant prise dans le sens que deux termes se trouvant à distances égales du terme maximal sont inégaux.

M. Simmons [1] a étudié la dyssymétrie du développement (1) prise dans le sens que la somme des termes dont l'indice est inférieur à sp n'est pas égale à la somme des termes dont l'indice est supérieur à sp; sp représente comme on le sait l'espérance mathématique du nombre d'arrivées d'un certain événement dans s épreuves répétées, p étant la probabilité de réalisation de l'événement dans chaque épreuve. En particulier, si sp est un nombre entier, sp vient coïncider avec l'indice du terme maximal.

Le calcul direct du développement (1) pour des valeurs particulières de s et p suggère le théorème que voici :

Soit p la probabilité pour l'arrivée d'un certain événement. On fait une série de s épreuves uniformes. Si $p < \frac{1}{2}$ et sp est un nombre entier, alors il est plus probable que l'événement arrive moins de sp fois, que plus de sp fois.

L'excès de la probabilité pour une série ayant montré moins de sp arrivées de l'événement sur la probabilité pour une série ayant montré plus de sp arrivées de l'événement est d'autant plus grand que p est plus petit (s supposé constant).

---

[1] *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 26, 1895, p. 290-323. M. Fisher, critiquant (*Mathematical Theory of Probabilities*, p. 277 et suiv.) la manière dont M. Keynes (*A Treatise on Probability*) a exposé le théorème de M. Simmons, ne paraît pas s'être rendu compte du fait que M. Simmons s'est placé à un point de vue différent de celui adopté par Laplace.

M. Simmons n'a pas réussi à démontrer ce théorème dans sa généralité [1].

Je me permets d'en donner la démonstration complète par une méthode entièrement différente de celle employée par M. Simmons.

Supposons que sp est un nombre entier et considérons la fonction

$$V(p) = 2\sum_{\nu=m}^{s} T_\nu - T_m \qquad (m = sp).$$

La différence $\sum_{\nu=0}^{m-1} T_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{s} T_\nu$ est évidemment égale à $1 - V(p)$. Remarquant que $V\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ dans le cas où s est un nombre pair, nous voyons que le problème revient à démontrer les inégalités

$$V\left(\frac{1}{s}\right) < V\left(\frac{2}{s}\right) < \ldots < \begin{cases} V\left(\frac{s}{2s}\right)[=1] & (s \text{ pair}), \\ V\left(\frac{s-1}{2s}\right) < 1 & (s \text{ impair}). \end{cases}$$

Considérons la fonction

$$W_k(p) = 2\sum_{\nu=k}^{s} T_\nu - T_k,$$

k étant un paramètre *ne dépendant pas de p*.

Posant $T_\nu(p) = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$, $p_0 = \frac{k}{s}$, $p_1 = \frac{k-1}{s}$, nous avons, k étant un quelconque des nombres entiers,

$$2,\ 3,\ \ldots \begin{cases} \frac{s}{2} & (s \text{ pair}), \\ \frac{s-1}{2} & (s \text{ impair}); \end{cases}$$

$$V\left(\frac{k}{s}\right) - V\left(\frac{k-1}{s}\right) = W_k(p_0) - W_k(p_1) - [J_k(p_1) + J_{k-1}(p_1)$$
$$= \int_{p_1}^{p_0} W'_k(p)\,dp - [J_k(p_1) + J_{k-1}(p_1)].$$

---

[1] Voir par exemple l'article de M. Guildberg : *Un théorème du Calcul des Probabilités* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1923, t. 1, p. 251). L'énoncé de M. Simmons (que l'on trouve reproduit dans l'article de M. Guildberg) n'est pas tout à fait conforme à celui donné ici. En particulier M. Simmons n'a pas envisagé la dernière partie du théorème, à savoir l'effet d'une variation de p.

Par une transformation de l'expression sous le signe Σ en tenant compte de la relation $q+p=1$, on démontrera la formule

$$\sum_{\nu=g}^{s}(\nu-sp)\,T_\nu = gqT_g,$$

g étant *un quelconque* des nombres entiers $1, 2, \ldots, s$.

A l'aide de cette formule, nous trouvons après quelques réductions

$$(2)\qquad V\left(\frac{k}{s}\right)-V\left(\frac{k-1}{s}\right)=2\binom{s-1}{k-1}\left[\frac{\int_{p_1}^{p_0}R(p)\,dp}{p_0-p_1}-\frac{R(p_0)+R(p_1)}{2}\right],$$

où

$$R(p)=p^{k-1}q^{s-k},$$

$R(p)$ est un polynome entier en p dont la dérivée seconde

$$\begin{aligned}R''(p)&=p^{k-3}q^{s-k-2}[(k-1)(k-2)-2(k-1)(s-2)p+(s-1)(s-2)p^2]\\&=p^{k-3}q^{s-k-2}r(p)\end{aligned}$$

est négative dans l'intervalle (p_1, p_0) puisque la conique $r=r(p)$ reste dans le demi-plan des r négatifs quand p varie de $p=p_1$ à $p=p_0$, ce que l'on reconnaît en remarquant que $r''(p)=2(s-1)(s-2)$ est positive dans l'intervalle considéré en même temps que $r(p_1)=-p_1[(s-k-1)=2q_1]$ et $r(p_0=-q_0[(k-2)+2p_0]$ sont négatifs. Le second membre de (2) est donc positif.

D'autre part, on vérifie la relation $V\left(\frac{s-1}{2s}\right)<1$ (s impair) par une méthode analogue en considérant la fonction

$$U(p)=2\sum_{\nu=\frac{s+1}{2}}^{s}T_\nu.$$

Le théorème est donc établi dans sa généralité.