CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les semi-invariants de Thiele.* Note [1] de M. **Ragnar Frisch.**

Depuis quelques années, les semi-invariants introduits dans le calcul des probabilités par Thiele [2] commencent à jouer un rôle des plus importants comme moyen de caractériser la distribution des probabilités.

Si l'on considère la distribution d'une variable fortuite pouvant assumer la valeur x_ν avec la probabilité P_{x_ν} ($\nu = 0, 1, \ldots, s$), les semi-invariants λ_n ($n = 0, 1, \ldots, \infty$) sont définis par l'identité en t

$$(1) \qquad e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n t^n}{n!}} = \sum_{\nu=0}^{s} P_{x_\nu} . e^{x_\nu t}.$$

Pour les déterminer, on cherche une expression de la fonction

$$(2) \qquad u = u(t) = \operatorname{Log} \sum_{\nu=0}^{s} P_{x_\nu} . e^{x_\nu t}$$

et de ses dérivées successives. On a alors

$$\lambda_n = u^{(n)}(0).$$

Dans le cas spécial de la distribution binominale discontinue, on a

$$x_\nu = \nu, \qquad P_{x_\nu} = P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}, \qquad u = s \operatorname{Log}(q + pe^t), \qquad q = 1 - p,$$

p étant la probabilité d'un certain événement, et P_ν étant la probabilité pour qu'il se produise ν fois en s épreuves. Je vais démontrer que l'on a dans ce cas

$$(3) \qquad \lambda_n = pq \frac{d}{dp} \lambda_{n-1} \qquad (1 < n),$$

$$(4) \qquad \lambda_{2g} = s \sum_{k=1}^{g} A_{gk} (pq)^k, \qquad \lambda_{2g+1} = s(q-p) \sum_{k=1}^{g} B_{gk} (pq)^k \qquad (0 < g),$$

---

[1] Séance du 15 juillet 1925.

[2] Thiele, *Almindelig Iagttagelseslaere*, Kbhvn, 1884; *Theory of Observations.* London, 1903. Voir aussi Hausdorff, *Berichte der kgl. sächsischen Ges. d. Wissensch.*, Leipzig, *Mathem.-Phys. Cl.*, 1901, 53, p. 171. Les *kanonische Parameter* de Hausdorff se confondent avec les semi-invariants de Thiele.

A_{gk} et B_{gk} étant des coefficients numériques donnés par les formules

(5)
$$kA_{gk} = B_{gk} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{2k}{k+j} j^{2g}.$$

Posons pour abréger

$$v = e^t \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}, \qquad v^{(n)} = \frac{\partial^n v}{\partial t^n}.$$

L'identité

(6)
$$q\, u^{(n)} = s p e^t - p\, v^{(n-1)}$$

est vérifiée pour $n = 1$ puisque

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{s p e^t}{q + p e^t}.$$

Étant dérivée par rapport à t elle ne subit d'autre modification que celle qui consiste à remplacer n par $(n+1)$. Donc elle est générale.

Remarquant que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v + pq \frac{\partial v}{\partial p}$$

nous pouvons transformer le second membre de (6) en $q\left[u^{(n-1)} - p^2 \frac{\partial}{\partial p} v^{(n-2)}\right]$. Cette expression est égale à $q(pq)\frac{\partial}{\partial p} u^{(n-1)}$, ce que l'on vérifie en dérivant (6) par rapport à p. Donc

$$u^{(n)} = pq \frac{\partial}{\partial p} u^{(n-1)}.$$

Nous n'avons qu'à faire $t = 0$ dans cette dernière relation pour avoir la formule (3).

A l'aide de (3), on démontre que des développements tels que (4) doivent exister, et l'on obtient les relations récurrentes

$$B_{gk} = kA_{gk}, \qquad A_{gk} = k^2 A_{g-1,k} - (2k-2)(2k-1) A_{g-1,k-1}$$

avec les conditions initiales

$$A_{g1} = 1, \qquad A_{gg} = (-1)^{g-1}(2g-1)!$$

ce qui montre que l'on a

$$A_{gk} = (-1)^{k-1}(2k-1)!\, \Gamma^{2}_{g-k,k},$$

où $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$ est la somme des produits à ν facteurs que l'on obtient par une combinaison d'ordre ν avec répétition, les éléments combinés étant les carrés des nombres naturels $1^2, 2^2, \ldots, k^2$. En effet on vérifie aisément que les nombres $(-1)^{k-1}(2k-1)\Gamma^{(2)}_{g-k,k}$ satisfont à la même relation récurrente et aux mêmes conditions initiales que les nombres A_{gk}.

Considérons la fonction

$$f_k(x) = [(1-1^2x)(1-2^2x)\ldots(1-k^2x)]^{-1}.$$

C'est une fonction génératrice pour les nombres Γ. En effet pour $|k^2x| < 1$ on peut développer $f_k(x)$ en série de puissances. Le coefficient de x^ν dans ce développement sera égal à $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$, ce que l'on vérifie en portant le développement de $f_k(x)$ dans l'équation

$$(1-k^2x)\,f_k(x) = f_{k-1}(x).$$

La décomposition de $f_k(x)$ en fractions simples donne

$$(7)\qquad f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k(2k-1)!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k+j}\frac{j^{2k}}{(1-j^2x)}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(2k-1)!}\,x^\nu\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{2k}{k+j}j^{2(k+\nu)},$$

d'où l'expression des nombres Γ et la formule (5).

Il est intéressant de noter l'analogie qui existe entre les nombres $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$, les nombres de Bernoulli généralisés d'ordre négatif $B^{(-k)}_\nu$ et les différences de zéro $\Delta^k O^g$. Si l'on pose

$$\Gamma^{(1)}_{\nu k} = \frac{\Delta^k O^{\nu+k}}{k!} = \binom{\nu+k}{k}B^{(-k)}_\nu,$$

$\Gamma^{(1)}_{\nu k}$ est la somme des produits à ν facteurs que l'on obtient par une combinaison d'ordre ν avec répétition, les éléments combinés étant les nombres naturels 1, 2, ..., k. La généralisation de ces nombres au cas où les éléments combinés sont les nombres naturels élevés à une puissance quelconque, est immédiate.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 181, p. 274, séance du 17 août 1925.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
76726-25 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.