Hommage de l'auteur

DEN SJETTE SKANDINAVISKE

MATEMATIKERKONGRES

I KØBENHAVN

DEN 31. AUG. — 4. SEPT. 1925

IMPOSSIBILITÉ DE RESSERRER L'INÉGALITÉ DE MARKOV DANS LE CAS GÉNÉRAL

PAR

RAGNAR FRISCH

SÆRTRYK AF KONGRESBERETNINGEN

DET HOFFENSBERGSKE ETABLISSEMENT
KØBENHAVN 1926

DEN SJETTE SKANDINAVISKE

MATEMATIKERKONGRES

I KØBENHAVN

DEN 31. AUG. — 4. SEPT. 1925

IMPOSSIBILITÉ DE RESSERRER L'INÉGALITÉ DE MARKOV DANS LE CAS GÉNÉRAL

PAR

RAGNAR FRISCH

SÆRTRYK AF KONGRESBERETNINGEN

DET HOFFENSBERGSKE ETABLISSEMENT
KØBENHAVN 1926

IMPOSSIBILITÉ DE RESSERRER L'INÉGALITÉ
DE MARKOW DANS LE CAS GÉNÉRAL

PAR

RAGNAR FRISCH

Dans son intéressante conférence d'hier, M. Guldberg ayant fait mention des tentatives faites pour resserrer l'inégalité de Markow, a énoncé la supposition que ces tentatives devraient rester vaines tant que l'on ne fait pas des hypothéses spéciales sur la nature de la distribution considérée. Je me permets de démontrer que la supposition de M. Guldberg est exacte.

Le lemme de Markow est en général énoncé de la façon suivante:

Considérons une variable fortuite x qui peut assumer une des valeurs positives $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$ avec les probabilités $p_1 p_2 \ldots p_n$ $\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$.

Soit $M = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu$ l'espérance mathématique de x; t un nombre positif quelconque supérieur à l'unité, P la probabilité pour que la variable fortuite assume une valeur $x \leqq tM$

Alors on a pour P la limite inférieure

$$P > 1 - \frac{1}{t}.$$

Il est visible que pour les valeurs de $t \geqq \frac{x_n}{M}$ il sera toujours possible de resserrer cette inégalité. Dans ce cas trivial on a $P = 1$ et l'on pourra évidemment désigner une infinité de limites inférieures pour P qui seront supérieures à $1 - \frac{1}{t}$.

Ecartons donc ce cas.

Pour traiter le cas général nous énonçons la proposition de Markow sous une forme qui diffère un peu de l'ènoncé ci-dessus, mais qui est en réalité équivalente à celle-là.

Soit t un nombre positif quelconque supérieur à l'unité.

Les x étant rangés suivant leurs valeurs absolues $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$ soit l l'indice défini par les relations

$$x_l \leqq t\,M < x_{l+1}$$

alors on a toujours

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu < 1.$$

S'il était possible de désigner pour P une limite inférieure qui était supérieure à $1 - \frac{1}{t}$ on en déduira pour $\sum\limits_{\nu=l+1}^{n} p_\nu$ une inégalité de la forme

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu < 1 - \delta(t) \tag{1}$$

ou δ sera une fonction de t qui pour $t > 1$ aura une valeur positive (non nulle) inférieure à l'unité.

Il est facile de reconnaître que si l'on se donne une valeur quelconque de t $\left(> 1 \textit{ et} < \frac{x_n}{M}\right)$ on pourra toujours quelle que soit la valeur correspodante de δ (> 0 et < 1), trouver des lois de distribution $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ qui ne satisfont pas à l'inégalité (1), mais pour lesquelles on a au contraire

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu > 1 - \delta. \tag{2}$$

On en trouve déjà une infinité parmi les lois de distribution de troisième ordre.

Considérons en effet une loi de distribution $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{gathered} \frac{1-\delta}{p_3} < t < \frac{x_3}{x_2} < \frac{1-p_2}{p_3} \\ x_1 = \frac{(1-p_2)\,x_2 - p_3\,x_3}{p_1}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

On peut toujours, et cela d'une infinité de manières, choisir des valeurs positives (non nulles) des x et des p qui satisfont aux relations (3) et telles en outre que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$0 < x_1 < x_2 < x_3 .$$

On pourra commencer par s'assurer que les inégalités

$$\frac{1-\delta}{p_3} < t < \frac{1-p_2}{p_3}$$

étaient satisfaites. Pour cela on pourra par exemple choisir

$$p_3 = \frac{1-\frac{\delta}{2}}{t}$$

$$p_2 = \frac{\delta}{3t}$$

$$p_1 = \frac{t-1+\frac{\delta}{6}}{t} .$$

Ces valeurs des p sont bien positives (non nulles) et leur somme est égale à l'unité.

Si l'on choisit ensuite

x_2 un nombre positif quelconque

$\frac{x_3}{x_2}$ un nombre positif entre t et $\frac{1-p_2}{p_3}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{1-p_2}{p_3} - \frac{x_3}{x_2}\right) = 1 - \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{x_3}{x_2} - 1\right)$$

on aura satisfait aux relations (3) et l'on aura en outre

$$0 < x_1 < x_2 < x_3$$

de façon que $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ définisse bien une distribution qui satisfait aux conditions exigées par la proposition de Markow.

Dans cette distribution on a

$$x_2 < tM < x_3$$

d'où

$$l = 2$$

et

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu = tp_3 > 1 - \delta .$$

L'inégalité (2) est donc satisfaite.

Cela montre qu'il est impossible de resserrer l'inégalité de Markow tant que l'on ne fait pas des hypothèses spéciales sur la nature de la distribution.

Si $\delta = 0$ on retombe sur le lemme de Markow. Dans ce cas il sera donc impossible de satisfaire à l'inégalité (2). On voit aussi directement que dans ce cas il n'est pas possible de choisir les nombres x et p ci-dessus, de telle façon que les relations (3) soient satisfaites. Il n'existe par exemple aucun nombre positif p_2 tel que $1 < 1 - p_2$.