Hommage de l'auteur

DEN SJETTE SKANDINAVISKE

MATEMATIKERKONGRES

I KØBENHAVN

DEN 31. AUG. — 4. SEPT. 1925

SEMI-INVARIANTS DE THIELE ET MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

RAGNAR FRISCH

SÆRTRYK AF KONGRESBERETNINGEN

DET HOFFENSBERGSKE ETABLISSEMENT
KØBENHAVN 1926

DEN SJETTE SKANDINAVISKE

MATEMATIKERKONGRES

I KØBENHAVN

DEN 31. AUG. — 4. SEPT. 1925

SEMI-INVARIANTS DE THIELE ET MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

RAGNAR FRISCH

SÆRTRYK AF KONGRESBERETNINGEN

DET HOFFENSBERGSKE ETABLISSEMENT

KØBENHAVN 1926

SEMI-INVARIANTS DE THIELE ET MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

RAGNAR FRISCH

Le sujet dont j'aurai l'honneur de dire quelques mots appartient à une partie des mathématiques appliquées: la théorie mathématique des observations, qui pour une grande part doit son développement à des investigateurs danois. Les pionniers de cette théorie furent Oppermann, Thiele et Gram. Et l'oeuvre commencée par eux fût continuée et développée par leurs disciples et successeurs.

Qu'il me soit permis de rappeler d'abord quelques notions fondamentales.

Soit x un phénomène d'observation qui peut assumer une des valeurs $x_0\, x_1 \ldots x$. Une suite d'observations étant faite, si l'on a trouvé pour $x_0\, x_1 \ldots x_s$ les fréquences relatives $R_0\, R_1 \ldots R_s$, on appelle *distribution empirique* de x la suite des couples de valeurs

$$\begin{array}{c} x_0\, R_0 \\ x_1\, R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s\, R_s. \end{array} \tag{1}$$

Si l'on peut assigner *a priori* aux valeurs $x_0\, x_1 \ldots x_s$ des probabilités données $P_0\, P_1 \ldots P_s$, on appelle *distribution théorique* de x la suite des couples de valeurs

$$\begin{array}{c} x_0\, P_0 \\ x_1\, P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x\;\; P_s. \end{array} \tag{2}$$

S'il s'agit d'un phénomène qui est capable d'une variation continue, on aura à considérer au lieu de la suite (1) ou (2) une fonction continue de distribution ou de probabilité. Le raisonnement sera sous beaucoup de rapports le même pour les distributions continues et les distributions discontinues. Pour fixer les idées, je vais considérer une distribution discontinue. D'une façon analogue on peut définir la distribution d'un phénomène qui est caractérisé, non plus par un seul caractère, mais par plusieurs; mais je n'y insiste pas.

Au lieu d'étudier les nombres R, respectivement P, on cherche souvent à caractériser la distribution en question par un système de paramètres. On peut évidemment construire une infinité de tels systèmes capables d'exprimer toutes les particularités de la distribution considérée. Les plus importants de ces systèmes sont les moments, les semi-invariants introduits par Thiele, et les moments factoriels introduits par M. Steffensen.

Le moment d'ordre h d'une distribution théorique est défini

$$m_h(x-a) = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - a)^h P_\nu$$

où a est une certaine constante qui désigne le point autour duquel le moment est pris.

D'une façon analogue le moment factoriel d'ordre h est défini

$$m_{(h)}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - a)^{(h)} P_\nu$$

où

$$(x_\nu - a)^{(h)} = (x_\nu - a)(x_\nu - a - 1) \ldots (x_\nu - a - h + 1).$$

En particulier on désigne les moments et les moments factoriels pris autours de l'origine

$$m_h = \sum_{\nu=0}^{s} x_\nu^{(h)} P_\nu$$

$$m_{(h)} = \sum_{\nu=0}^{s} x_\nu^{(h)} P_\nu .$$

Les moments moyens et les moments factoriels moyens, c'est-à-dire les moments et les moments factoriels pris autour de la moyenne m_1 sont désignés

$$\mu_h = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - m_1)^h P_\nu$$

$$\mu_{(h)} = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - m_1)^{(h)} P_\nu .$$

Enfin les semi-invariants λ_h sont définis par l'identité formelle en t

$$e^{\sum\limits_{h=0}^{\infty} \lambda_h \frac{t^h}{h!}} = \sum_{\nu=0}^{s} e^{x_\nu t} P_\nu .$$

Puisque $\sum\limits_{\nu=0}^{s} P_\nu = 1$ on a par définition

$$m_0 = m_{(0)} = \mu_0 = \mu_{(0)} = 1 \qquad \lambda_0 = 0$$
$$m_1 = m_{(1)} = \lambda_1 \qquad \mu_1 = \mu_{(1)} = 0.$$

S'il s'agit d'une distribution empirique on n'a qu'à remplacer P par R pour avoir la définition des moments, des moments factoriels et des semi-invariants. Et dans le cas d'une distribution par partis continue on aura à remplacer le signe Σ par le signe $\int$ pris dans le sens de M. Stieltjes.

Très souvent, on se borne à considérer quelques-uns des premiers paramètres λ, μ et m; par exemple les paramètres d'ordre 0 jusqu'à 4. La raison peut en être: ou que le problème considéré est assez simple pour qu'il suffise de considérer les premiers paramètres, ou bien que l'on rencontre de telles difficultés dans le maniment des paramètres d'ordre supérieur, que l'on renonce à donner une solution complète du problème considéré. Ces difficultés peuvent être de différentes espèces. Quand il s'agit d'une distribution théorique, la difficulté est d'ordre algébrique. Le plus souvent c'est la difficulté d'obtenir une expression maniable pour les paramètres de la distribution en fonction des paramètres qui caractérise le schéma de réalisation dont la distribution considérée est le résultat.

Dans la suite je me permettra de présenter quelques résultats relatives aux problèmes que l'on rencontre dans l'ordre d'études ou interviennent des moments, des moments factoriels et des semi-invariants d'ordre supérieur. Pour plus de détails, je renvoie à un travail qui va être publié.

Quand on cherche à obtenir des formules de transformation entre les moments, les moments fatoriels et les semi-invariants d'un ordre quelconque, on est amené à considérer une classe de coëfficients numériques et de polynomes qui interviennent aussi dans l'étude de beaucoup d'autres problèmes de nature très variée.

Les fonctions symétriques élémentaires des nombres naturels $S_k(1, 2, \ldots n)$, les différences de zéro $\Delta^n 0^k$, les dérivées de zéro et d'autres coëfficients et polynomes analogues, appartiennent par exemple à cette classe.

La notation de ces nombres et polynomes ainsi que les méthodes par lesquelles ils sont traités, sont très différentes chez les différents auteurs.

En voici quelques exemples

Auteurs	Notation	Signification
M. Ocagne	K_k^n ou $\left[1_n\right]^{k-n}$	$\dfrac{\Delta^n 0^k}{n!}$
»	S_n^k	$S_k(1,2,\ldots n)$
MM. Selivanov & Andoyer	D_n^k	$\dfrac{\Delta^n 0^k}{k!}$
» »	E_n^k	$(-)^{n+k}\dfrac{n!}{k!}S_{k-n}(1,2,\ldots(k-1))$
M. Steffensen	$\nabla^n 0^k$	$(-)^{n+k}\Delta^n 0^k$
»	$D^n 0^{(k)}$	$(-)^{n+k} n!\, S_{k-n}(1,2,\ldots(k-1))$
M. Tschuprow	α_{kn}	$\dfrac{\Delta^n 0^k}{n!}$
»	β_{nk}	$S_k(1,2,\ldots(n-1))$
M. N. Nielsen	$\mathfrak{A}_n^k$	$\Delta^n 0^k$
»	$\mathfrak{S}_{n+1}^k$	$\dfrac{\Delta^n 0^{n+k}}{n!}$
»	C_n^k	$S_k(1,2,\ldots(n-1))$

Le manque d'uniformité dans la notation et dans la méthode est un fait très regrettable, qui dans bien des cas a été la cause de double emploi dans le travail des investigateurs. Il semble donc un véritable besoin de systématiser la notation. Cette systématisation est d'autant plus facile à réaliser, que tous les coëfficients cités ci-dessus, ainsi qu'un grand nombre de coëfficients et polynomes analogues peuvent être exprimés d'une façon simple à l'aide des nombres et des polynomes de Bernoulli généralisés, qui dans les travaux de M. Nörlund[1]) ont été traités d'une

[1]) Voir en particulier son »Mémoire sur les polynomes de Bernoulli« Acta Mathem. 43 (1920) et le traité »Differenzenrechnung«, Berlin 1924.

façon systématique et approfondie et dont la notation n'est qu'une extension de la notation universellement adoptée, des nombres de Bernoulli ordinaires.

A l'aide des nombres et polynomes B de M. Nörlund on peut démontrer les formules suivantes:

$$(3a) \qquad m_{(h)}(x-a) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(b-a+1)\, m_i(x-b)$$

$$(3b) \qquad m_h(x-a) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}(b-a)\, m_{(i)}(x-b).$$

La formule (3a) exprime le moment factoriel d'un ordre quelconque h pris autour d'un point quelconque a en fonction des moments d'ordre o jusqu'à h pris autour d'un autre point quelconque b.

La formule (3b) exprime d'une façon analogue le moment d'un ordre quelconque en fonction des moments factoriels.

Les formules montrent que si les moments et les moments factoriels sont pris autour d'un même point, il suffit de faire intervenir les nombres B, sinon, il faut avoir recours aux polynomes B.

Donnant à a et b des valeurs particulières on obtient des formules pour les moments et les moments factoriels pris autour de l'origine, ainsi que des formules pour les moments et les moments factoriels moyens.

Les formule (3a) et (3 b) sont comme on le voit, linéaires et homogènes. Les formules de transformation entre les moments et les semi-invariants ne sont plus aussi simples. On trouve par exemple

$$(4) \qquad \frac{m_h}{h!} = \sum_{(i)} \frac{1}{i_1!\, i_2! \ldots i_h!} \left(\frac{\lambda_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\lambda_2}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\lambda_h}{h!}\right)^{i_h}$$

ou la sommation (i) doit être étendue à tous les entiers non négatifs $i_1\, i_2 \ldots i_h$ satisfaisant à

$$1 \lesseqgtr i_1 + i_2 + \ldots + i_h \lesseqgtr h$$
$$1 i_1 + 2 i_2 + \ldots + h i_h = h$$

Une formule analogue fait connaître les semi-invariants en fonction des moments. On peut démontrer que l'on obtient l'expression des moments moyens simplement en faisant $\lambda_1 = 0$ dans (4). De plus on peut démontrer que l'on obtient l'expression des coëfficients C_h qui interviennent dans le développement d'un fonction de distribution arbitraire suivant les dérivées de $e^{-\frac{x^2}{2}}$, en faisant dans (4) non seulement $\lambda_1 = 0$ mais aussi $\lambda_2 = 0$, l'origine et l'unité de mesure des observations étant choisies de façon à rendre $m_1 = 0$, $m_2 = 1$.

L'avantage des formules (3) et (4) et des formules analogues, consiste principalement en ce que dans chaque cas particulier on peut prendre comme point de départ le système de paramétres dont l'expression est la plus simple, et ensuite au besoin, passer aux autres systèmes par les formules (3) et (4) et les formules analogues.

Comme exemple d'une telle application considérons la distribution binomiale. C'est la distribution d'une variable fortuite qui peut assumer les valeurs $\nu = 0, 1, \ldots s$ avec les probabilités $P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$ ou p désigne une probabilité élémentaire et $q = 1 - p$ la probabilité contraire.

Ici l'expression des moments factoriels est très simple. Comme l'a démontré M. Steffensen[1]) on a

$$m_{(h)} = s^{(h)} p^h$$

où

$$s^{(h)} = s(s-1) \ldots (s-h+1)$$

Appliquant la formule (3b) on obtient après quelques transformations des polynomes B qui y figurent

$$\mu_h = \sum_{j=1}^{\mathrm{Ent.}\left(\frac{h}{2}\right)} \sum_{k=j}^{h} E_{hjk}\, s^j p^k. \tag{5}$$

Les coëfficients numériques E_{hjk} sont exprimés par les nombres B ainsi

$$E_{hjk} = (-)^k j \binom{k}{j} \binom{h}{k} \sum_{i=k-j+1}^{k} \frac{(-)^i}{i} \binom{j-1}{k-i} B_{h-k}^{(-i)} B_{k-j}^{(i)}.$$

La formule (5) peut encore être simplifiée. En effect on peut démontrer que μ_h considéré comme polynome en p satisfait à l'égalité

$$\mu_h(1-p) = (-)^h \mu_h(p).$$

1) *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 6 (1923) p. 77.

Comme fonction de $\delta = q - p$, μ_h est donc de la même parité que l'indice h. Par conséquence les moments moyens d'ordre pair peuvent être experimés comme un polynome en s et $r = pq$, tandis que les moments moyens d'ordre impair peuvent être exprimés comme le produit par $(q - p)$ d'un polynome en s et r.

Ces derniers développements contiennent un nombre de termes beaucoup plus restreint que la formule (5) et les nouveaux coëfficients peuvent encore être exprimés d'une façon indépendante à l'aide des nombres B.

Pour le calcul numérique de ces coëfficients on cherchera des formules récurrentes, ainsi que des formules de contrôle. Des formules récurrentes, pour les coëfficients peuvent être développées à l'aide des formules recurrentes de Pearson et de Bohlmann-Romanovsky[1]), pour les moments moyens eux-mêmes. A l'aide d'une généralisation de la formule de Pearson que j'ai donné dans un article de *Biometrika*[2]) on peut démontrer les formules de contrôle que voici:

Si on désigne par S_h la somme de tous les coëfficients qui figurent dans le développement de μ_h suivant les puissances de s et r, S_h est égal à un des six nombres suivants:

$$1,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2,\ -1$$

d'après le caractère résiduel de l'indice h(mod. 6).

Désignons encore par M_h la somme de tous les produits que l'on obtient en multipliant chaque coëfficient du développement de μ_h par la somme des indices de ce coëfficient. M_h sera donc une espèce de »moment« relativement à la suite des coëfficients qui figurent dans le développement de μ_h. M_h étant définie ainsi, on peut démontrer que M_h a une des six valeurs suivantes

$$h,\ \frac{h-1}{3},\ 1,\ \frac{h}{3},\ -(h+1),\ -\frac{2h-1}{3}$$

d'après le caractère résiduel de l'indice h(mod. 6).

Pour les semi-invariants d'un ordre quelconque de la distribution binomiale on peut aussi donner l'expression indépendante[3]). Mais je n'y insiste pas. J'indiquerai seulement une

---

1) *Biometrika* Vol. XV (1923) p. 410 et Vol. XVI (1924) p. 159. *Jahresbericht d. deutschen Mathem. Ver.* Bd. XXVII (1918) p. 73.

2) Vol. XVII (1925) p. 165.

3) *Comptes Rendus* (Paris). Séance du 17. août 1925.

formule récurrente assez simple, à laquelle satisfont ces semi-invariants. On a

$$\lambda_h = pq \frac{d}{dp} \lambda_{h-1}.$$

C'est à dire, le semi-invariant d'un ordre quelconque est égal au produit de pq par la dérivée par rapport à p du semi-invariant précédent.

Avant de terminer je me permettra de dire quelques mots sur les moments *incomplets* de la distribution binomiale.

Le moment moyen incomplet d'ordre h de cette distribution est défini

$$\mu_h = \sum_{\nu=t}^{s} (\nu - sp)^h P_\nu \qquad\qquad P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$$

où la limite inférieure de sommation t est un quelconque des nombres $0, 1, \ldots s$. Le problème de trouver une expression pour ces moments est naturellement beaucoup plus complexe que le problème analogue pour les moments complets. Si on se borne à considérer des expressions algébriques, on ne connaît actuellement que l'expression d'un seul moment incomplet, c'est l'expression du moment incomplet d'ordre un. Pour ce moment on a

$$\mu_1 = s \binom{s-1}{t-1} p^t q^{s-t+1}. \tag{6}$$

Pour la démonstration de cette formule je renvoie à un article dans le *Skandinavisk Aktuarietidskrift*[1]).

Si l'on envisage des expressions plus complexes, on connaît aussi une expression du moment incomplet d'ordre zéro. C'est une expression sous forme d'une intégrale. *M. Pearson* a obtenu la formule[2])

$$\mu_0 = s \binom{s-1}{t-1} \int_0^p x^{t-1} (1-x)^{s-t} \, dx \qquad\qquad (0 < t)$$

---

[1]) 7 (1924) p. 167. Voir aussi *Comptes Rendus* (Paris). Séance du 17. novembre 1924.

[2]) *Biometrika* Vol. XVI (1924) p. 202. Voir aussi la note de M. *Camp* l. c. p. 171 ainsi que *Laplace:* Œuvres, Tome 7ième p. 153.

μ_0 peut donc être exprimé à l'aide de la fonction B incomplète. La formule de M. Pearson est un moyen d'evaluer numériquement μ_0 quand s et p sont des quantités données, mais la formule net peut servir à obtenir une expression explicite de μ_0.

Le problème d'obtenir une expression simple de μ_0 contient en réalité la clef des moments incomplets d'ordre supérieur. En effet on connaît[1]) des formules récurrentes qui ne supposent connus que deux moments incomplets, et μ_1 est donné par (6).

On se rend compte en même temps de l'importance et de la difficulté du problème en faisant remarquer que le problème d'obtenir une expression pour μ_0 est équivalent au problème classique de trouver la probabilité pour qu'un évènement dont la probabilité est p, en s épreuves se produise un nombre de fois compris entre t_1 et t_2, problème dont *Laplace* a donné la solution asymptotique à l'aide de la fonction

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

On peut développer plusieurs relations assez intéressantes auxquelles satisfait μ_0, et qui pourront peut-être servir à attaquer le problème. Si l'on désigne la quantité cherchée par R_{st} pour mettre en évidence le fait qu'elle dépende à la fois de s et t, on peut par exemple mettre la fonction génératrice de μ_0 sous les formes

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{px}{1-qx}\right)^t = \sum_{s=0}^{\infty} R_{st}\, x^s \qquad |x| < 1$$

$$\frac{y}{1-y}(1-(q+py)^s) = \sum_{t=1}^{s} R_{st}\, y^t \qquad |y| < 1$$

$$\frac{(1-qx)}{(1-x)(1-pxy-qx)} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{s} R_{st}\, x^s y^t \qquad R_{00} = 1$$

On peut aussi démontrer que R_{st} qui par définition est la somme de $P_{st} = \binom{s}{t} p^t q^{s-t}$ la sommation étant étendue au deuxième indice t, est égal au produit de p par la somme de la même expression, la sommation étant étendue au premier indice s, et t étant remplacé par (t-1).

On peut aussi à priori se faire une certaine idée du caractère

[1]) *Biometrika* Vol. XVII (1925) p. 165 et suiv.

de μ_0 comme fonction de p. En effet μ_0 et μ_1 sont des polynomes en p de degré s et $(s+1)$ respectivement. Les zéros de μ_1 sont très simples, à savoir $p = o$ de multiplicité t et $p = 1$ de multiplicite $s - t + 1$, ce que l'on voit par (6). Les zéros de μ_0 sont loin d'être aussi simples. En effet on a

$$\mu_0 = R_{st} = p^t \, M_{s-t,\, t-1}\,(q)$$

ou $M_{nh}(x)$ est le polynome suivant en x

$$M_{nh}(x) = 1 + \binom{h+1}{1} x + \binom{h+2}{2} x^2 + \ldots + \binom{h+n}{n} x^n .$$

On peut démontrer que ce polynome a autant que possible de ces zéros complexes, c'est-à-dire n si n est pair et $(n - 1)$ si n est impair.

Par conséquence, il n'est pas possible de trouver une expression pour μ_0 tout-à-fait analogue à l'expression de μ_1. Mais il sera peut-être possible d'exprimer μ_0 comme la somme d'un petit nombre de termes dont chacun était une puissance ou une factorielle en p ou q. Une telle expression sera d'un très grand intérêt, non seulement au point de vue de la théorie, mais aussi au point de vue des applications. Une fois en possession d'une telle expression on ne serait plus dans la nécessité de remplacer dans les applications la distribution binomiale par une distribution continue, et d'appliquer le théorême de Laplace. Dans beaucoup de cas ce procédé ne donne pas de résultats satisfaisants, surtout si le nombre des observations n'est pas considérable.