SUR LES SEMI-INVARIANTS ET MOMENTS EMPLOYÉS DANS L'ÉTUDE DES DISTRIBUTIONS STATISTIQUES

PAR

RAGNAR FRISCH

SKRIFTER UTGITT AV DET NORSKE VIDENSKAPS-AKADEMI I OSLO
II. HIST.-FILOS. KLASSE 1926, No. 3

UTGITT FOR OSLO KOMMUNES FOND

OSLO
I KOMMISJON HOS JACOB DYBWAD
1926

Table des Matières.

Introduction.

Dans la statistique mathématique on peut discerner deux parties de la théorie, qui se distinguent l'une de l'autre assez nettement par le caractère des problèmes traités. L'une peut être appelée la partie rationnelle de la statistique mathématique, l'autre la partie empirique.

Dans la partie rationnelle on considère comme donnés certains schémas de réalisation plus ou moins compliqués. Le problème essentiel de cette partie de la théorie est de trouver la loi de distribution qui en résulte. En particulier on cherche a déterminer la limite vers laquelle tend la loi de distribution quand certains paramètres qui caractérisent le schéma tendent vers ∞. Si cette limite est telle que la variable fortuite considérée (éventuellement les variables fortuites) ne peut assumer qu'une seule valeur avec la probabilité 1, on dit que le schéma considéré est soumis à la loi des grands nombres. Si le schéma n'est pas soumis à la loi des grands nombres, on cherche à déterminer l'ordre de variabilité de la variable à la limite. On dit que la variable est une variable fortuite d'ordre k, si elle peut assumer les valeurs $x_1\, x_2 \cdots x_k$ avec les probabilités $P_1\, P_2 \cdots P_k \left(\sum_{i=1}^{k} P_i = 1\right)$.

Supposons par exemple que l'on tire s boules d'une urne contenant des boules blanches et noires, la boule étant remise dans l'urne après chaque tirage. On note la fréquence relative $p' = \frac{m}{s}$, m étant le nombre de boules blanches réalisées dans la série. Soit p la probabilité d'une boule blanche. Si $s \to \infty$, la distribution *a priori* de la variable fortuite p' tend vers une distribution limite dont l'écart quadratique est 0; p' peut assumer une seule valeur p avec la probalité 1. Le schéma est donc soumis à la loi des grands nombres. Supposons maintenant que le schéma de réalisation est le suivant: on dispose de k urnes renfermant des boules blanches et noires, la probabilité pour tirer une boule blanche de l'urne i-ème étant p_i. On choisit au hasard une des k urnes, le choix étant décidé par un tirage effectué d'une urne contenant des billets numérotés $1, 2 \cdots k$. Soit P_i la probabilité pour un billet portant le numéro i. Une des k urnes étant ainsi choisie, on tire de cette urne une série de s boules avec remplacement. Si m est le nombre de boules blanches réalisées, la fréquence relative $p' = \frac{m}{s}$ devient à la limite $s \to \infty$ une variable fortuite d'ordre k, pouvant assumer les valeurs $p_1 p_2 \cdots p_k$ avec les probabilités $P_1 P_2 \cdots P_k$. Le schéma considéré n'est donc pas soumis à la loi des grand nombres.

Dans la partie empirique de la statistique mathématique, que l'on peut aussi appeller la théorie du problème inverse, on considère non pas un schéma donné mais un résultat donné. S'appuyant sur une observation ou une suite d'observations empiriques on cherche à déterminer premièrement le genre de schéma le plus vraisemblable d'après lequel la réalisation a eu lieu. C'est le problème qualitatif. Ensuite on cherche à déterminer la valeur «présomptive» des paramètres qui caractérisent le schéma. C'est le problème quantitatif.

Dans l'un et l'autre des deux domaines de la statistique mathématique le trait essentiel de la méthode employée est l'application de certains systèmes de paramètres qui caractérisent la distribution en question.

Dans la partie rationnelle on emploie des systèmes de paramètres caractérisant la distribution *a priori* qui résulte du schéma considéré. Un problème important de cette partie de la théorie est d'exprimer les paramètres qui caractérisent la distribution en fonction des paramètres qui caractérisent le schéma dont la distribution considérée est le résultat.

Dans la partie empirique on emploie en outre des systèmes de paramètres caractérisant la distribution observée.

Les systèmes de paramètres les plus importants employés pour caractériser une distribution (*a priori* ou empirique) sont les semi-invariants λ_h, les moments m_h, les moments moyens μ_h (c'est-a-dire les moments pris autour de la moyenne m_1), les moments factoriels $m_{[h]}$ et les moments factoriels moyens $\mu_{[h]}$.[1]

Très souvent, on se borne à considérer quelques-uns des premiers paramètres λ, μ et m; par exemple les paramètres d'ordre 0 jusqu'à 4. La raison peut en être: ou que le problème considéré est assez simple pour qu'il suffise de considérer les premiers paramètres, ou bien que l'on rencontre de telles difficultés dans le maniement des paramètres d'ordre supérieur, que l'on renonce à donner une solution complète du problème considéré. Ces difficultés peuvent être de deux sortes. En ce qui concerne les paramètres λ, μ et m des distributions *empiriques* on se heurte à la difficulté que la précision de ces paramètres décroit très vite à mesure que l'ordre augmente, si le nombre d'observations dont on dispose n'est pas considérable. En ce qui concerne les paramètres λ, μ et m des distributions

[1] Il faut aussi mentionner les fonctions symétriques élémentaires ainsi que le système de paramètres introduit par M. MORDUCH. Voir la note de TSCHUPROW dans Nordisk Statistisk Tidskrift 1 (1922) p. 389.

Les moments factoriels sont introduits par M. STEFFENSEN, Skandinavisk Aktuarietidskrift 6 (1923) p. 73 et 7 (1924) p. 151. Les semi-invariants sont comme il est bien connu, introduits par THIELE et l'emploi des moments et des moments moyens a été systematisé par M. PEARSON.

a priori la difficulté que l'on rencontre est d'ordre algébrique. Le plus souvent c'est la difficulté d'obtenir une expression maniable pour les paramètres de la distribution en fonction des paramètres du schéma.

Pendant les dernières années les efforts des investigateurs se sont pour une grande partie concentrés sur de tels problèmes généraux, qui ne peuvent se traiter sans avoir recours aux moments ou semi-invariants d'ordre supérieur. Citons dans le domaine des distributions *a priori* les travaux de M. WATANABE sur l'ordre de variabilité d'une variable fortuite. M. WATANABE a entr'autres obtenu le criterium suivant:[1]

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable fortuite bornée soit une variable fortuite d'ordre k, est que le determinant

$$\varDelta_{k+1} = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots\cdots & m_k \\ m_1 & m_2 & \cdots\cdots & m_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ m_k & m_{k+1} & \cdots\cdots & m_{2k} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro, tandis que

$$\varDelta_k \neq 0 .$$

---

[1] Tôkoku Mathem. Journal. Vol. 15 (1919). M. WATANABE énonce son théorème au sujet de la limite d'une distribution positive ($m_0\, m_1 \cdots$ désignant les moments de la distribution-limite) mais le théorème s'applique à une distribution bornée quelconque ($m_0\, m_1 \cdots$ désignant les moments de cette distribution).

Le déterminant $\varDelta_{k+1}$ étant un déterminant HANCKELIEN, il est possible de le transformer de différentes façons, et ainsi de formuler le théorème de M. WATANABE sous d'autres formes qui pourront mieux convenir aux différents cas particuliers. On peut par exemple remplacer le déterminant $\varDelta_{k+1}$ par d'autres déterminants analogues dont les éléments sont, soit les moments moyens μ_h, soit les moments pris autour d'un point quelconque, soit les moments «normalisés»

$$n_h = \frac{m_h}{m_1^h}, \quad \nu_h = \frac{\mu_h}{m_1^h} \text{ etc.}$$

On en déduit par exemple la proposition suivante:

Si les moments (ou les moments moyens) d'une distribution bornée peuvent être mis sous la forme $m_h = c^h\, Q(h)$, c désignant une constante et Q un polynome de degré k (k un nombre fixe), alors la distribution ne peut être une distribution continue. — J'espère revenir sur ce sujet dans un autre article.

Il faut remarquer que les propriétés du déterminant $\varDelta_{k+1}$ ont déjà été considerées par STIELTJES dans ses travaux sur le problème des moments pour l'intervalle $(0, \infty)$. Pour l'extension à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ voir HAMBURGER, Mathem. Ann. 81 (1920). Il parait que la méthode la plus simple pour obtenir le criterium de M. WATANABE est de considérer la fraction continue $1 + \frac{\alpha_1 t\,|}{|\,1+\beta_1 t} + \frac{\alpha_2 t^2\,|}{|\,1+\beta_2 t} + \frac{\alpha_3 t^2\,|}{|\,1+\beta_3 t} + \cdots$ (PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Berlin 1913, p. 322) associée à la série de puissances $1 + \sum_{i=1}^{\infty} m_{i-1}\, t^i$ obtenue en développant la fonction génératrice $1 + t\Sigma \frac{P_\nu}{1 - t x_\nu}$ (notation de la page 18 ci-après). La condition nécessaire et suffisante pour que la distribution soit d'ordre k est $\alpha_{k+1} = 0$, $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, 2 \cdots k)$. Cette condition se réduit au criterium de M. WATANABE en vertu de la relation $\varDelta_{n+1} = (-)^n \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}\, \varDelta_n$ (PERRON p. 325, formule 10, qui est encore exacte si la fraction continue est finie).

Dans le domaine des distributions empiriques citons les très importants travaux de Tschuprow[1] sur un grand nombre de questions «qualitatives» et «quantitatives» qui se rattachent au problème général des schémas.

Dans le travail actuel je me propose de rechercher la solution de quelques-uns des problèmes que l'on rencontre dans l'ordre d'études ou interviennent des semi-invariants et des moments d'ordre supérieur.

Le § 1 du chapitre I est consacré à quelques considérations sur certains systèmes de coëfficients numériques qu'il faut faire intervenir pour mettre les expressions rencontrées sous une forme maniable. Je m'occupe en particulier d'un système qui me paraît pouvoir être le plus utile dans l'ordre de travaux qui nous intéressent, à savoir les nombres et les polynomes de Bernoulli généralisés. Les résultats de ce premier paragraphe ne sont pas tous nouveaux. Afin de dispenser le lecteur d'avoir recours aux ouvrages spéciaux sur les nombres et les polynomes B j'ai réuni quelques formules fondamentales qui sont intéressantes au point de vue des applications que l'on peut en faire à l'étude des distributions statistiques.

Dans le paragraphe suivant je donne des exemples d'une telle application, entr'autres des formules permettant de passer des moments (*a priori* ou empiriques) pris autour d'un point quelconque aux moments factoriels pris autour d'un autre point quelconque, et inversement. On trouvera aussi dans ce paragraphe des formules générales explicites par lesquelles en peut passer des semi-invariants d'une distribution quelconque aux moments, et inversement, les semi-variants et les moments considérés étant d'un ordre quelconque.

Au § 3 je démontre une formule sommatoire assez générale qui me servira dans la suite. Cette formule contient entr'autres comme cas spéciaux la somme des termes d'une progression arithmétique, géométrique ou factorielle.

Au § 4 je considère deux formules générales de sommation par parties, qui peuvent entr'autres servir à établir certaines inégalités entre les sommes de fonctions monotones. Ces inégalités sont utiles dans l'étude des moments incomplets.

Le Chap. II est consacré aux paramètrès d'une distribution *a priori* particulière à savoir la distribution binomiale, et le Chap. III est consacré aux paramètres de la distribution hypergéométrique. Il est vrai que se sont là deux distributions assez spéciales et assez simples. Mais justément à cause de leur simplicité elles tiennent une place fondamentale dans la statistique mathématique. C'est pourquoi je n'ai pas pensé inutile d'approfondir l'étude des semi-invariants et moments d'ordre supérieur de ces distributions.

---

[1] Une partie des travaux de Tschuprow a paru dans le Skandinavisk Aktuarietidskrift. D'autres se trouvent dans Biometrika (Vol. XII – XIII), Metron (Vol. II), Nordisk Statistisk Tidskrift (Vol. I) et dans des périodiques russes.

Chap. I. Généralités.

§ 1. L'emploi des nombres et des polynomes de Bernoulli dans l'étude des distributions statistiques.

En statistique mathématique on a souvent à faire usage de deux suites de coëfficients numériques qui sont d'une importance fondamentale. Ce sont les différences de zéro $\Delta^n 0^k$ et les fonctions symétriques élémentaires des nombres naturels $C_k[1, 2, \cdots n]$. La différence de zéro $\Delta^n 0^k$ est définie comme la différence n-ième de x^k pour $x=0$ $\Delta^n 0^k = (\Delta^n x^k)_{x=0}$. Ces coëfficients permettent comme on le sait, d'exprimer la somme d'une puissance. D'après une formule bien connue[1]

on a $$\sum_{x=0}^{n} x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta^i 0^k}{(i+1)!} n^{[i+1]} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i+1} \Delta^i 0^k .$$

Nous employons pour abréger la notation factorielle[2] $(f(x))^{[m]}$, (m entier). Ce symbole désignera $f(x) f(x-1) \cdots f(x-m+1)$ si m est positif, 1 si $m=0$ et $\dfrac{1}{f(x+1) f(x+2) \cdots f(x+(-m))}$ si m est negatif, de sorte que toujours $(f(x))^{[m]} (f(x-m))^{[n]} = (f(x))^{[m+n]}$. La puissance rentre comme cas particulier dans la factorielle. En effet, faisant $f(x)=c=$ constante, nous avons $(f(x))^{[m]}=c^m$.

Pour le calcul effectif des quantités $\Delta^n 0^k$ on utilisera la formule récurrente[3] (1) $\Delta^n 0^k = n\,[\Delta^n 0^{k-1} + \Delta^{n-1} 0^{k-1}]$ ou bien l'expression indépendante

(2) $$\Delta^n 0^k = \sum_{j=0}^{n} (-)^{n+j} \binom{n}{j} j^k .$$

$C_k[1, 2, \cdots n]$ est définie comme la somme des produits k à k des nombres $1, 2, \cdots n$. $C_k[1, 2, \cdots n]$ est donc égal au coëfficient b_{kn} de $(-)^k x^{n-k}$ dans le polynome (3) $f(x)=(x-1)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} (-)^k b_{kn} x^{n-k}$. Les coëfficients b_{kn} satisfont à la relation récurrente (4) $b_{kn} = b_{k,n-1} + n\, b_{k-1,n-1}$ $(0 \lesseqgtr k \lesseqgtr n)$. Cetté équation, jointe à la condition iniale $b_{kk}=k!$, $b_{0n}=1$; permet de les calculer de proche en proche par un schéma que j'ai indiqué dans un article précédent.[4] De la relation (4) nous déduisons aussi cette autre formule récurrente (5) $b_{k+1,n+1} = \sum_{j=k}^{n} (j+1)\, b_{kj}$. Faisant $x=-1$ dans (3) nous obtenous la relation de contrôle pour le calcul numérique

$$\sum_{k=0}^{n} b_{kn} = (n+1)!\,.$$

[1] Voir par exemple Enc. d. Sc. Mathém. (I) 4. Fasc. 1., p. 61.
[2] Enc. d. Sc. M., p. 59.
[3] Voir par exemple Whittaker et Robinson: Calculus of observations p. 7.
[4] «Norsk Matematisk Forenings Skrifter». Serie 1, Nr. 14 (1923).

Les nombres b_{kn} et $\Delta^n 0^k$ ainsi que certains co qui ne se distinguent d'eux que par un factor simple; par exe s coëfficients $\alpha_{kn} = \frac{\Delta^n 0^k}{n!}$, $\beta_{nk} = b_{k,\,n-1}$ et d'autres coëfficients encore so signés par des symboles différents chez les différents auteurs.[1]

C'est là un fait très regrettable. Tschuprow dont les travaux sur notre sujet sont si remarquables, exprime dans une lettre ce regret en termes suivants: «Das dumme an der Sache ist, daß die betreffenden Zahlen unter sehr verschiedenen Bezeichnungen bei verschiedenen Forschern auftreten, so daß man nicht leicht auf die Idee kommt, daß die betreffende Arbeit gerade mit diesen Zahlen zu tun hat».

Il semble donc un véritable besoin de systématiser la notation. Il est d'autant plus facile de réaliser cette systématisation que les nombres b_{kn}, $\Delta^n 0^k$, α_{kn}, β_{nk} et les nombres analogues *ne sont en réalité que les nombres de Bernoulli généralisés $B_k^{(n)}$ multipliés par des facteurs simples.*

L'avantage que comporte l'emploi des nombres tels que les nombres B, qui sont déjà étudiés d'une façon approfondie et systématique, est trop évident pour qu'il soit nécessaire d'y insister. L'introduction de ces nombres ne signifie nullement que l'on abandonne le domaine de l'algèbre élémentaire. La plupart des relations qui caractérisent les nombres B peut-être déduite d'une façon plus simple par des considérations élémentaires que par des considérations sur les fonctions transcendentes.

En ce qui concerne les nombres B généralisés, je me permets de citer quelques formules fondamentales qui sont intéressantes au point de vue des applications qu'on peut en faire à l'étude des distributions statistiques.[2]

---

[1] Les nombres α et β sont étudiés par Tschuprow. Voir par exemple Biometrika Vol. XII (1918) p. 142 et suiv. M. d'Ocagne a étudié les mêmes nombres mais sous une nota tion différente. Il désigne par K_k^n ou encore par $[1_n]^{k-n}$ le nombre α_{kn} et par S_n^k le nombre $\beta_{n+1,\,k}$. Voir Nouvelles Annales des Mathématiques (3) 2 (1883) p. 220 et suiv. Am. Journ. of Mathem. 9 (1887) p. 353 et suiv. 13 (1891) p. 145 et suiv. Dans le dernier mémoire on trouve p. 152 un tableau des nombres K_k^n $(=\alpha_{kn})$ qui s'étend jusqu'à $k = 12$, $n = 12$. M. Nielsen désigne par $\mathfrak{A}_n^k$ la différence de zéro $\Delta^n 0^k$, par $\mathfrak{S}_{n+1}^k$ le nombre $\alpha_{k+n,\,n}$ et par C_n^k la fonction symétrique élémentaire $C_k[1, 2, \cdots (n-1)]$. Voir son «Traité élémentaire des nombres de Bernoulli», Paris 1923, pp. 16, 20 et 292. M. Steffensen désigne par $\Delta^n 0^k$ le nombre $(-)^{n+k} \Delta^n 0^k$ et par $D^n 0^{(k)}$ le nombre $(-)^{n+k} n!\, C_{k-n}[1, 2 \cdots (k-1)]$. Voir «Interpolationslære», København 1925, p. 60 et p. 63. M. M. Selivanov et Andoyer désignent par D_n^k le nombre $\frac{\Delta^n 0^k}{k!} = \frac{n!}{k!}\alpha_{kn}$ et par E_n^k le nombre $(-)^{k+k}\frac{n!}{k!} C_{k-n}[1, 2, \cdots (k-1)]$. Voir Enc. d. Sc. Mathém. (1) 4. Fasc. 1, pp. 101—103.

[2] On trouvera des développements plus complets dans les «Vorlesungen über Differenzenrechnung» de M. Nörlund (Berlin 1924). Voir aussi «Mémoire sur les polynomes de Bernoulli». Acta Matem. 43 (1920).

Les nombres B généralisés sont définis par la relation récurrente

(6) $$n\,B_k^{(n+1)}=(n-k)\,B_k^{(n)}-n\,k\,B_{k-1}^{(n)}, \quad B_0^{(n)}=1,\ B_k^{(0)}=0 \quad (k \neq 0)$$

ou bien par l'identité en t

(7) $$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)}\frac{t^k}{k!}=1-\frac{n}{2}\cdot\frac{t}{1!}+\frac{n(3n-1)}{12}\cdot\frac{t^2}{2!}-\cdots$$

t étant un paramètre formel donc le module est inférieur à 2π (rayon du cercle de convergence de la série).

Le calcul direct des premiers termes du développement (7) donne l'expression de $B_0^{(n)}\ B_1^{(n)}\ B_2^{(n)}$ etc. comme des polynomes en n.

L'expression indépendante des nombres B d'un ordre quelconque est donnée par les formules suivantes.

(8 a) $$B_k^{(n)}=\sum_{(k)}\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}B_{k_1}\,B_{k_2}\cdots B_{k_n} \quad (n \text{ entier et positif}).$$

Où la sommation doit être étendue à tous les entiers non négatifs $k_1\ k_2\cdots k_n$ satisfaisant à $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$, B_{k_i} étant les nombres de Bernoulli ordinaires.

(8 b) $$B_k^{(-n)}=\sum_{(k)}\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!} \quad (n \text{ entier et positif}).$$

Où la sommation doit être étendue à tous les entiers positifs (non nuls) $k_1\ k_2\cdots k_n$ satisfaisant à $k_1+k_2+\cdots+k_n=k+n$.

Pour le calcul numérique on utilisera la formule récurrente (6). Cette relation est vérifiée si n est un entier quelconque (positif, négatif ou nul). Dans le cas ou $0 \leqq k < n$ il sera pourtant plus commode de calculer les nombres b_{kn} par le schéma cité plus haut et de revenir ensuite aux nombres B.

On trouvera ci-après un tableau des premiers nombres B

L'importance fondamentale des nombres B dans la théorie des distributions statistiques s'explique par le fait que les nombres B d'ordre positif permettent de développer la factorielle suivant les puissances, et les nombres B d'ordre négatif permettent de développer la puissance suivant les factorielles.

On a en effet les formules

(9 a) $$x^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}^{(n)}\,x^k \qquad \text{(9 b)}\ \ x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}^{(-k)}\,x^{[k]}.$$

La comparaison entre (3) et (9 a) montre que l'on a

$$b_{kn}=C_k[1,2,\cdots n]=(-)^k\binom{n}{k}B_k^{(n+1)}.$$

Faisant $f(x)=x^n$, $a=0$ dans l'identité $f(x+a)=\sum_{i=0}^{n}\binom{x}{i}\Delta^i f(a)$, ou f

Tableau 1.

$B_k^{(n)}$	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$n=-6$	1	3	$\frac{19}{2}$	$\frac{63}{2}$	$\frac{1\,087}{10}$	$\frac{777}{2}$	$\frac{30\,083}{21}$
-5	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{75}{4}$	$\frac{331}{6}$	$\frac{6\,075}{36}$	$\frac{11\,215}{21}$
-4	1	2	$\frac{13}{3}$	10	$\frac{243}{10}$	$\frac{185}{3}$	$\frac{6\,821}{42}$
-3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{43}{5}$	$\frac{69}{4}$	$\frac{3\,025}{84}$
-2	1	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{31}{15}$	3	$\frac{127}{28}$
-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$
2	1	-1	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{42}$
3	1	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{9}{4}$	$\frac{19}{10}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{16}{21}$
4	1	-2	$\frac{11}{3}$	-6	$\frac{251}{30}$	-9	$\frac{221}{42}$
5	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{35}{6}$	$-\frac{25}{2}$	24	$-\frac{475}{12}$	$\frac{4\,315}{84}$
6	1	-3	$\frac{51}{6}$	$-\frac{45}{2}$	$\frac{274}{5}$	-120	$\frac{19\,087}{84}$

désigne un polynome de degré n, il vient $x^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i 0^n}{i!} x^{[i]}$, ce qui montre que l'on a

$$\Delta^n 0^k = k^{[n]} B_{k-n}^{(-n)},$$

d'òu

$$\alpha_{kn} = \binom{k}{n} B_{k-n}^{(-n)} \qquad \beta_{nk} = (-)^k \binom{n-1}{k} B_k^{(n)}.$$

Les nombres b et β peuvent donc être exprimés à l'aide des nombres B d'ordre positif, les nombres $\Delta 0$ et α à l'aide des nombres B d'ordre négatif.

De la formule (2) on tire l'expression explicite suivante pour les nombres B d'ordre négatif $B_k^{(-n)} = k^{[-n]} \sum_{j=0}^{n} (-)^{n+j} \binom{n}{j} j^{k+n}$.

On peut aussi rattacher la définition des nombres B à des considérations élémentaires de l'analyse combinatoire. Un tel rapprochement fournira des renseignements intéressants sur la nature de ces nombres.

Désignons[1] par $C_k[x_1 x_2 \cdots x_n]$ la somme des produits à k facteurs que l'on obtient en formant les combinaisons sans répétition d'ordre k des éléments $x_1 x_2 \cdots x_n$. Désignons par $\Gamma_k[x_1 x_2 \cdots x_n]$ la somme correspondante que l'on obtient en formant les combinaisons avec répétition. Dans le cas où les éléments sont les nombres naturels $1, 2, \cdots n$ nous posons pour abréger

$$C_{kn} = C_k[1, 2, \cdots n] \quad \Gamma_{kn} = \Gamma_k[1, 2, \cdots n].$$

Les nombres C_{kn} et Γ_{kn} satisfont évidemment aux formules récurrentes

(10 a) $\quad C_{kn} = C_{k,n-1} + n\, C_{k-1,n-1} \qquad$ (10 b) $\quad \Gamma_{kn} = \Gamma_{k,n-1} + n\, \Gamma_{k-1,n}$

avec les conditions initiales

$$C_{0n} = 1, \quad C_{k0} = 0 \quad (0 < k), \qquad \Gamma_{0n} = 1, \quad \Gamma_{k0} = 0 \qquad (0 < k)$$

d'où (11 a) $C_{kn} = \sum_{j=k}^{n} j\, C_{k-1,j-1}$ (11 b) $\Gamma_{kn} = \sum_{j=1}^{n} j\, \Gamma_{k-1,j}$.

Parmi les expressions indépendantes nous citons[2]

(12 a)
$$C_{kn} = \sum_{(j)} \frac{(n+1)!}{j_1!\, j_2! \cdots j_{n+1}!} \cdot \frac{1}{1^{j_1}\, 2^{j_2} \cdots (n+1)^{j_{n+1}}}.$$

La sommation devant être étendue à tous les entiers non négatifs $j_1 j_2 \cdots j_{n+1}$ satisfaisant à

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_{n+1} = n - k + 1, \quad 1 j_1 + 2 j_2 + \cdots + (n+1) j_{n+1} = n+1.$$

(12 b)
$$\Gamma_{kn} = \sum_{(j)} \frac{(k+n)!}{j_1!\, j_2! \cdots j_{k+n}!} \cdot \frac{1}{(1!)^{j_1}\, (2!)^{j_2} \cdots ((k+n)!)^{j_{k+n}}}.$$

La sommation devant être étendue à tous les entiers non négatifs $j_1 j_2 \cdots j_{k+n}$ satisfaisant à

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_{k+n} = n, \quad 1 j_1 + 2 j_2 + \cdots + (k+n) j_{k+n} = k+n.$$

Pour Γ_{kn} on a aussi cette autre expression indépendante[3]

(13) $\quad \Gamma_{kn} = \frac{(-)^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-)^j \binom{n}{j} j^{k+n}$, ce qui montre que l'on a

$$\Gamma_{kn} = \frac{\Delta^n\, 0^{k+n}}{n!} = \alpha_{k+n,\, n} = \binom{n+k}{k} B_k^{(-n)}.$$

D'autre part on a évidemment $C_{kn} = b_{kn} = \beta_{n+1,k} = (-)^k \binom{n}{k} B_k^{(n+1)}$, d'où

(14 a) $B_k^{(n)} = \frac{(-)^k}{\binom{n-1}{k}} C_{k,n-1} \quad (0 \leqq k < n)$, (14 b) $B_k^{(-n)} = \frac{\Gamma_{kn}}{\binom{n+k}{n}} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq k \\ 0 < n \end{pmatrix}$.

---

[1] On place souvent l'indice k en exposant $C^{(k)}$. Voir par exemple NETTO: Lehrbuch der Combinatorik. Leipzig 1901, p. 13.

[2] NETTO l. c. p. 183 et p. 186.

[3] NETTO l. c. p. 170.

Ces dernières formules montrent, qu'à un facteur simple près, on obtient les nombres B d'ordre positif par une combinaison sans répétition[1] et les nombres B d'ordre négatif par une combinaison avec répétiton, les éléments combinés étant les nombres naturels $1, 2, 3, \cdots$ Cela suggère l'idée de généraliser les nombres B en considérant non plus les combinaisons (sans ou avec répétition) des nombres naturels, mais les combinaisons des éléments plus complexe, par exemple une puissance des nombres naturels.

Nous allons considérer particulièrement l'expression de la combinaison avec répétition des carrés des nombres naturels. Dans la suite nous aurons à faire usage de cette expression.

Posons pour abréger[2] $\Gamma_{kn}^{(2)} = \Gamma_k\,[1^2, 2^2, \cdots n^2]$.

On reconnaît facilement que les nombres $\Gamma_{kn}^{(2)}$ satisfont à la formule récurrente (15) $\Gamma_{kn}^{(2)} = \Gamma_{k,n-1}^{(2)} + n^2\,\Gamma_{k-1,n}^{(2)}$ avec les conditions initiales

$$\Gamma_{0n}^{(2)} = 1\,, \quad \Gamma_{k1}^{(2)} = 1\,.$$

Considérons la fonction $f_n(x) = [(1-1^2 x)(1-2^2 x)\cdots(1-n^2 x)]^{-1}$.

Pour $(n^2 x) < 1$ on peut développer $f_n(x)$ en série convergente

$f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} H_{kn}\,x^k$. Portant ce développement dans l'identité

$(1-n^2 x) f_n(x) = f_{n-1}(x)$, et ordonnant suivant les puissances de x nous aurons

$$H_{kn} = H_{k,n-1} + n^2 H_{-k1,n}.$$

Les valeurs initiales sont $H_{0n} = f_n(0) = 1$ et $H_{k1} = 1$, puisque le coëtficient de x^k dans le développement $f_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ est égal à l'unité. Puisque les nombres $\Gamma_{kn}^{(2)}$ et H_{kn} satisfont à la même formule récurrente et aux mêmes conditions initiales ils sont identiques. Par conséquence $f_n(x)$ est une fonction génératrice[3] pour les nombres $\Gamma_{kn}^{(2)}$.

Décomposant $f_n(x)$ en fractions simples nous aurons après quelques

réductions $$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n\,(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-)^j \binom{2n}{n+j}\frac{j^{2n}}{(1-j^2 x)}.$$

Introduisant $$\frac{1}{1-j^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty}(j^2 x)^k, \quad |j^2 x| \lesseqgtr |n^2 x| < 1\,,$$

il vient $$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n\,(2n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=1}^{n}(-)^j\binom{2n}{n+j} j^{2(n+k)}\,,$$

---

[1] Il faut remarquer que les nombres B d'ordre positif pour lesquels $n \lesseqgtr k$ ne sont pas reproduits par le procédé considéré.

[2] Ici il faut attribuer à $\Gamma_k\,[1^2, 2^2, \cdots n^2]$ la signification $\Gamma_k\,[1, 4, 9 \cdots (n^2)]$ non la signification $\Gamma_k\,[1, 1, 2, 2, \cdots n, n]$.

[3] On vérifie sans peine que d'une façon plus générale $[(1-1^\alpha x)(1-2^\alpha x)\cdots(1-n^\alpha x)]^{-1}$ est une fonction génératrice pour les nombres $\Gamma_{kn}^{(\alpha)} = \Gamma_k\,[1^\alpha, 2^\alpha, \cdots n^\alpha]$.

donc (16) $$I_{kn}^{(2)} = \frac{(-)^n}{n(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-)^j \binom{2n}{n+j} j^{2(n+k)}.$$

Dans l'étude des distributions statistiques on peut aussi souvent avec avantage se servir des polynomes de BERNOULLI généralisés. Ces polynomes d'ordre positif sont définis comme les polynomes en x qui satisfont à l'équation

(17) $\Delta B_\nu^{(n)}(x) = B_\nu^{(n)}(x+1) - B_\nu^{(n)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}(x)$ (n entier et positif)

avec les conditions initiales $B_\nu^{(0)}(x) = x^\nu \quad B_\nu^{(n)}(0) = B_\nu^{(n)}$.

Pour $n=1$ on retombe sur les polynomes B ordinaires.

Par une application répétée de l'équation (17) on trouve

$\Delta^k B_\nu^{(n)}(x) = \nu^{[k]} B_{\nu-k}^{(n-k)}(x)$, et en particulier (18) $\Delta^n B_\nu^{(n)}(x) = \nu^{[n]} x^{\nu-n}$.

Cette dernière formule peut être prise comme définition même des polynomes B, pourvu que l'on définisse d'une façon convenable les n constantes arbitraires qui se trouvent dans l'intégrale de (18). Si l'on envisage la définition des polynomes B sous la forme (18), l'extension au cas de n négatif est immédiate. On a $B_\nu^{(-n)}(x) = \nu^{[-n]} \Delta^n x^{\nu+n} = \dfrac{\Delta^n x^{\nu+n}}{(\nu+n)^{[n]}}$.

Les polynomes B satisfont à la relation fondamentale

(19) $$B_\nu^{(m+n)}(x+y) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_i^{(m)}(x)\, B_{\nu-i}^{(n)}(y).$$

On n'a qu'à faire $m=0$ dans cette formule pour avoir le développement Taylorien des polynomes B.

(20 a) $$B_\nu^{(n)}(x+y) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_{\nu-i}^{(n)}(y)\, x^i.$$

D'autre part on a le développement suivant les factorielles de x

(20 b) $$B_\nu^{(n)}(x+y) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_{\nu-i}^{(n-i)}(y)\, x^{[i]}.$$

ce que l'on reconnait en faisant $f(x) = B_\nu^{(n)}(x)$ dans l'identité

$f(x+y) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{x}{i} \Delta^i f(y)$, où f désigne un polynome de dégré ν.

Faisant $y=0$ dans (20 a) et (20 b) on a en particulier

(21 a) $B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_{\nu-i}^{(n)} x^i$, (21 b) $B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} B_{\nu-i}^{(n-i)} x^{[i]}$.

On a aussi la formule récurrente (22) $nB_\nu^{(n+1)}(x) = (n-\nu)\, B_\nu^{(n)}(x) + \nu(x-n)\, B_{\nu-1}^{(n)}(x)$, et la formule «complémentaire» (23) $B_\nu^{(n)}(n-x) = (-)^\nu B_\nu^{(n)}(x)$, ainsi que la formule différentielle (24) $\dfrac{d^k}{dx^k} B_\nu^{(n)}(x) = \nu^{[k]} B_{\nu-k}^{(n)}(x) = \Delta^k B_\nu^{(n+k)}(x)$.

Comme cas particuliers on a encore

(25) $B_\nu^{(0)}(x) = x^\nu$, $B_\nu^{(\nu+1)}(x+1) = x^{[\nu]}$, $B_0^{(n)}(x) = 1$, $B_\nu^{(n+1)}(1) = \dfrac{n-\nu}{n} B_\nu^{(n)}$.

§ 2. Relations entre les semi-invariants, les moments et les moments factoriels d'une distribution quelconque.

Considérons la distribution d'une variable fortuite qui peut assumer la valeur x_ν avec la probabilité P_ν ($\nu = 0, 1, \cdots s$), les quantités P_ν étant des quantités positives quelconques satisfaisant à la relation $\sum_{\nu=0}^{s} P_\nu = 1$.

Les moments de cette distribution pris autour d'un point quelconque a sont définis comme l'éspérance mathématique du polynome $f(x) = (x-a)^h$

(26 a) $$m_h(x-a) = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - a)^h P_\nu .$$

En particulier on a les moments pris autour de l'origine

(26b) $$m_h = \sum_{\nu=0}^{s} x_\nu^h P_\nu$$

et les moments moyens, c'est-à-dire les moments pris autour de la moyenne m_1

(26 c) $$\mu_h = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - m_1)^h P_\nu .$$

D'une façon analogue les moments factoriels pris autour d'un point quelconque a sont définis

(27 a) $$m_{[h]}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - a)^{[h]} P_\nu .$$

En particulier on a les moments factoriels pris autour de l'origine

(27 b) $$m_{[h]} = \sum_{\nu=0}^{s} x_\nu^{[h]} P_\nu$$

et les moments factoriels moyens, c'est-à-dire les moments factoriels pris autour de la moyenne m_1

(27 c) $$\mu_{[h]} = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - m_1)^{[h]} P_\nu .$$

Enfin les semi-invariants[1] λ_h sont définis par l'identité formelle en t

(28) $$e^{\sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h \frac{t^h}{h!}} = \sum_{\nu=0}^{s} e^{x_\nu t} P_\nu .$$

Dans le cas où la distribution considérée est par parties continue on n'a qu'à remplacer le signe Σ par le signe $\int$ pris dans le sens de Stieltjes. Pour fixer les idées nous allons considérer le cas d'une distribution discontinue, mais la plus grande partie du raisonnement s'applique aussi au cas d'une distribution par parties continue.

Il est à remarquer que dans le cas très fréquent $x_\nu = \nu$ le moment factoriel $m_{[h]}$ est à un facteur simple près égal à la somme[2] $(h+1)$ -ième de la suite $P_s P_{s-1} \cdots P_h$.

---

[1] Le terme semi-invariant est employé aussi dans un autre sens. Voir par exemple Sylvester, Am. Journ. of Mathem. 5 (1883) p. 79. Mais nous ne croyons pas qu'une confusion soit à craindre.

[2] Steffensen, Interpolationslære. København 1925, p. 104.

En effet posant $Q_\nu = P_{s-\nu}$ on a $\sum\limits_{\nu_h=0}^{s-h} \sum\limits_{\nu_{h-1}=0}^{\nu_h} \cdots \sum\limits_{\nu_0=0}^{\nu_1} Q_{\nu_0} = \sum\limits_{\nu=0}^{s} \binom{\nu}{h} P_\nu = \frac{m_{[h]}}{h!}$.

Puisque $\sum\limits_{\nu=0}^{s} P_\nu = 1$ on voit que l'on a toujours

$$m_0 = m_{[0]} = \mu_0 = \mu_{[0]} = 1 \qquad \lambda_0 = 0$$
$$m_1 = m_{[1]} = \lambda_1 \qquad \mu_1 = \mu_{[1]} = 0$$

Une simple application de la formule binomiale permet d'exprimer les quantités $m_h(x-a)$ en fonction des quantités $m_h(x-b)$ c'est-à-dire d'exprimer les moments pris autour d'un point quelconque a en fonction des moments pris autour d'un autre point quelconque b. La même remarque s'applique encore aux moments factoriels puisque les factorielles satisfont comme on le sait aussi à la formule binomiale[1]. Je n'insiste pas sur ces relations facilement obtenues.

Pour exprimer les moments pris autour d'un point quelconque a, en fonction des moments factoriels pris autour d'un autre point quelconque b, et inversement nous employons les polynomes B.

Introduisant $(x_\nu - a)^h = B_h^{(0)}(x_\nu - a) = B_h^{(0)}(x_\nu - b + (b-a)) =$
$= \sum\limits_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}(b-a)\,(x_\nu - b)^{[i]}$ dans la définition (26 a) nous aurons de suite

$$(29) \qquad m_h(x-a) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}(b-a)\, m_{[i]}(x-b) = \sum_{i=0}^{h} \frac{\varDelta^i\,(b-a)^h}{i!}\, m_{[i]}(x-b).$$

D'autre part en introduisant $(x_\nu - a)^{[h]} = B_h^{(h+1)}(x_\nu - a + 1) =$

$$= B_h^{(h+1)}(x_\nu - b + (b-a+1)) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(b-a+1)\,(x_\nu - b)^i$$

dans la définition (27 a) nous aurons

$$(30) \qquad m_{[h]}(x-a) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(b-a+1)\, m_i(x-b).$$

Donnant à a et b des valeurs convenables nous aurons en particulier

$$(31\text{ a}) \qquad m_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}\, m_{[i]} = \sum_{i=0}^{h} \frac{\varDelta^i\, O^h}{i!}\, m_{[i]}.$$

$$(31\text{ b}) \qquad m_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}(m_1)\, \mu_{[i]} = \sum_{i=0}^{h} \frac{\varDelta^i\, m_1{}^h}{i!}\, \mu_{[i]}.$$

$$(31\text{ c}) \qquad \mu_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}(-m_1)\, m_{[i]} = \sum_{i=0}^{h} \frac{\varDelta^i\,(-m_1)^h}{i!}\, m_{[i]}.$$

$$(31\text{ d}) \qquad \mu_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}\, \mu_{[i]} = \sum_{i=0}^{h} \frac{\varDelta^i\, O^h}{i!}\, \mu_{[i]}.$$

$$(32\text{ a}) \qquad m_{[h]} = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(1)\, m_i = \sum_{i=0}^{h} \binom{h-1}{i-1} B_{h-i}^{(h)}\, m_i$$

[1] Voir par exemple NÖRLUND l. c. p. 151.

(32 b) $$m_{[h]} = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(m_1+1)\,\mu_i$$

(32 c) $$\mu_{[h]} = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{h+1}(1-m_1)\,m_i$$

(32 d) $$\mu_{[h]} = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(1)\,\mu_i = \sum_{i=0}^{h} \binom{h-1}{i-1} B_{h-i}^{(h)}\,\mu_i.$$

On voit que si les moments considérés sont pris autour d'un même point, il suffit de faire intervenir les nombres B dans les formules. Dans le cas contraire il faut avoir recours aux polynomes B. Il est intéressant de noter que m_h est exprimé en fonction des $m_{[i]}$ de la même façon que μ_h est exprimé en fonction des $\mu_{[i]}$, et inversement.

Dans toutes ces formules les moments entrent linéairement: m_h est une forme linéaire et homogène en des quantités $m_{[0]}\, m_{[1]} \cdots m_{[h]}$, μ_h est une forme linéaire et homogène en des quantités $\mu_{[0]}\, \mu_{[1]} \cdots \mu_{[h]}$ etc. Les formules qui font connaître les semi-invariants en fonction des moments et inversement ne sont plus aussi simples.

Pour obtenir ces formules nous employons la méthode des fonctions génératrices. Cette méthode consiste comme on le sait à étudier la fonction $\varphi(t)$ définie comme l'espérance mathématique de la fonction $f(x, t)$,

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{s} f(x_\nu, t)\, P_\nu,$$

t étant un paramètre variable et $f(x, t)$ une fonction qu'il convient de définir différemment suivant le problème particulier que l'on a en vue.

La méthode des fonctions génératrices a déjà été employée par LAPLACE. STIELTJES[1] l'emploie dans ses recherches sur le problème des moments. Bien que la terminologie n'est pas celle que l'on emploie aujourd'hui, sa méthode est en réalité une application de la fonction génératrice $\varphi(t)$ définie comme l'espérance mathématique de la fonction $f(x, t) = \dfrac{1}{x+t}$.

Récemment la méthode des fonctions génératrices a été employée systématiquement par MM. MISES[2], HAMBURGER[3], LÉVY[4] et d'autres encore. Il faut aussi mentionner la méthode symbolique de M. SOPER[5].

La fonction génératrice la plus importante est celle que l'on obtient en faisant $f(x, t) = e^{itx}$, i désignant l'unité imaginaire, d'où $\varphi(t) = \Sigma\, e^{itx_\nu} P_\nu$. L'introduction de la quantité imaginaire i assure la convergence de la série qui figure au second membre dans le cas où la sommation contient une

---

1 Annales de la Faculté de Toulouse. Tome VIII—IX (1894). Voir en particulier p. 71.
2 Matematische Zeitschrift. Bd. 4—5 (1919).
3 Matematische Annalen. Bd. 81 (1920) et Bd. 82 (1921).
4 Calcul des Probabilités. Paris 1925. M. LÉVY appelle les fonctions en question des fonctions «caractéristiques». Voir aussi POINCARÉ: Calcul des Probabilités, p. 206.
5 Frequency Arrays. Cambridge 1922.

infinité de termes. Dans le cas où la sommation n'en contient qu'un nombre fini, l'introduction du facteur i est superflue. Même dans le cas d'un nombre infini de termes on peut supprimer le facteur si on se borne à utiliser le développement de $\varphi(t)$ comme un développement formel. C'est ce que nous allons faire dans la suite. Nous considérons la fonction génératrice $u(t)$ définie par $e^{u(t)} = \sum\limits_{\nu=0}^{s} e^{x_\nu t} P_\nu$. Alors on trouve pour $u(t)$ les développements que voici

$$u(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h \frac{t^h}{h!} = \operatorname{Log} \sum_{\nu=0}^{s} e^{x_\nu t} P_\nu = \operatorname{Log} \sum_{h=0}^{\infty} m_h \frac{t^h}{h!} = \tag{33}$$

$$= \lambda_1 t + \operatorname{Log} \sum_{h=0}^{\infty} \mu_h \frac{t^h}{h!} = \operatorname{Log} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{m_{[h]}}{h!} (e^t - 1)^h = \lambda_1 t + \operatorname{Log} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\mu_{[h]}}{h!} (e^t - 1)^h.$$

Cela montre que l'on peut exprimer les paramètres λ, μ et m ainsi.

(34 a) $\lambda_h = (D^h u)_{t=0}$, (34 b) $m_h = (D^h e^u)_{t=0}$,

(34 c) $\mu_h = (D^h e^{u-\lambda_1 t})_{t=0}$, (34 d) $m_{[h]} = (D^h_{e^t} e^u)_{t=0}$.

D désignant une dérivation par rapport à t, et D_{e^t} une dérivation par rapport à e^t.

En considérant tantôt l'une tantôt l'autre des expressions (33) de $u(t)$ on arrive par des dérivations appropriées à exprimer par exemple λ en fonction des m, μ en fonction des λ etc. Nous allons considérer ce problème sous le point de vue général quand λ soit m ou μ est d'un ordre quelconque.

$$\text{Posons } y = \sum_{h=1}^{\infty} m_h \frac{t^h}{h!} \quad \text{d'où } u = \operatorname{Log}(1+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{k-1}}{k} y^k,$$

$$\lambda_h = (D^h u)_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{k-1}}{k} (D^h y^k)_{t=0}. \tag{35}$$

Pour calculer la dérivée h-ième de $\varphi(y) = y^k$ par rapport à t nous appliquons la formule de Faà de Bruno[1] relative à la dérivation d'une fonction de fonction. Cette formule peut s'écrire

$$D^h \varphi = \sum_{g=1}^{h} \varphi^{(g)} \sum_{(i)} \frac{h!}{i_1!\, i_2! \cdots i_h!} \left(\frac{y'}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{y''}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{y^{(h)}}{h!}\right)^{i_h} \quad (0 < h) \tag{36}$$

où D désigne une dérivation par rapport à t et

$$\varphi^{(g)} = \frac{d^g \varphi}{d y^g}, \quad y^{(i)} = \frac{d^i y}{d t^i},$$

la sommation (i) devant être étendue à tous les entiers non négatifs $i_1\, i_2 \cdots i_h$ satisfaisant à $i_1 + i_2 + \cdots + i_h = g$, $1\, i_1 + 2\, i_2 \cdots + h\, i_h = h$.

Dans l'espèce nous avons

$$\varphi^{(g)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < g \\ k^{[g]} y^{k-g} & \text{si } g \leqq k \end{cases}, \quad y^{(i)} = \sum_{h=0}^{\infty} m_{i+h} \frac{t^h}{h!} \quad (0 < i),$$

---

[1] Faà de Bruno a publié sa formule pour la première fois en 1855 dans les Annales de Tortolini. Voir aussi sa »Théorie des formes binaires« ainsi que ses mémoires Am. Journ. of Mathem. Vol. 5, p. 239. Quart. Journ. of Mathem. Vol. 1, p. 359.

c'est-à-dire

$$(\varphi^{(g)})_{(t=0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq k \\ k! & \text{si } g = k \end{cases}, \quad (y^{(i)})_{t=0} = m_i \quad (0 < i).$$

Introduisant dans (36) nous aurons

$$(D^h y^k)_{t=0} = k! \sum_{(i)} \frac{h!}{i_1!\, i_2! \cdots i_h!} \left(\frac{m_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{m_2}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{m_h}{h!}\right)^{i_h}$$

Dans (35) il suffit d'étendre la sommation jusqu'à $k=h$ puisque pour $h<k$ on a aussi $g<k$ donc $(\varphi^{(g)})_{t=0}=0$ et par conséquence $(D^h y^k)_{t=0}=0$.

Nous avons donc en définitif

$$\lambda_h = h! \sum_{k=1}^{h} (-)^{k-1} \sum_{(i)} \frac{(k-1)!}{i_1!\, i_2! \cdots i_h!} \left(\frac{m_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{m_2}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{m_h}{h!}\right)^{i_h} \quad (0<h) \tag{37}$$

où la sommation (i) doit etre étendue à tous les entiers non négatifs $i_1\ i_2 \cdots i_h$ satisfaisant à $i_1+i_2+\cdots+i_h=k,\ 1\,i_1+2\,i_2+\cdots+h\,i_h=h.$

En particulier on a

$(\lambda_0=0)$

$\lambda_1=m_1$

$\lambda_2=m_2-m_1^2$

$\lambda_3=m_3-3\,m_1 m_2+2\,m_1^3$

$\lambda_4=m_4-(4\,m_1 m_3+3\,m_2^2)+12\,m_1^2 m_2-6\,m_1^4$

$\lambda_5=m_5-(5\,m_1 m_4+10\,m_2 m_3)+(30\,m_1 m_2^2+20\,m_1^2 m_3)-60\,m_1^3 m_2+24\,m_1^5$

etc.

Pour avoir l'expression de λ_h en fonction des quantités μ il suffit de faire remarquer qu'en vertu de (33) nous avons pour $1<h$

$D^h u = D^h \operatorname{Log} \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{t^k}{k!} = D^h \operatorname{Log} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \frac{t^k}{k!}$. L'expression de $D^h u$ en fonction des quantités m est donc identique à l'expression de $D^h u$ en fonction des quantités μ. Par conséquent pour avoir l'expression de λ_h en fonction des quantités μ nous n'avons qu'à remplacer m par μ dans la formule (37). Puisque $\mu_1=0$ tous les termes ou $i_1 \neq 0$ disparaîssent, et la formule peut s'écrire

$$\lambda_h = h! \sum_{k=1}^{h} (-1)^{k-1} \sum_{(i)} \frac{(k-1)!}{i_2!\, i_3! \cdots i_h!} \left(\frac{\mu_2}{2!}\right)^{i_2} \left(\frac{\mu_3}{3!}\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{\mu_h}{h!}\right)^{i_h} \quad (1<h) \tag{38}$$

la sommation (i) devant être étendue à tous les entiers non négatifs $i_2\ i_3 \cdots i_h$ satisfaisant à $i_2+i_3+\cdots+i_h=k,\ 2\,i_2+3\,i_3+\cdots+h i_h=h.$

En particulier on a

$(\lambda_0=0)$

$(\lambda_1=m_1)$

$\lambda_2=\mu_2$

$\lambda_3=\mu_3$

$\lambda_4=\mu_4-3\,\mu_2^2$

$\lambda_5=\mu_5-10\,\mu_2\,\mu_3$

etc.

L'expression de m_h en fonction des λ s'obtient en appliquant la formule de FAÀ DE BRUNO directement à (34 b). On trouve

$$m_h = \sum_{k=1}^{h} \sum_{(i)} \frac{h!}{i_1!\, i_2! \cdots i_h!} \left(\frac{\lambda_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\lambda_2}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\lambda_h}{h!}\right)^{i_h} \qquad (0 < h) \tag{39}$$

la sommation (i) étant la même que dans la formule (37).

En particulier

$$\begin{aligned}
&(m_0 = 1)\\
&m_1 = \lambda_1\\
&m_2 = \lambda_2 + \lambda_1^2\\
&m_3 = \lambda_3 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^3\\
&m_4 = \lambda_4 + (4\lambda_1\lambda_3 + 3\lambda_2^2) + 6\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^4\\
&m_5 = \lambda_5 + (5\lambda_1\lambda_4 + 10\lambda_2\lambda_3) + 15(\lambda_1\lambda_2^2 + 10\lambda_1^2\lambda_3) + 10\lambda_1^3\lambda_2 + \lambda_1^5\\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

L'expression de μ_h en fonction des quantités λ s'obtient en faisant remarquer que la fonction $u - \lambda_1 t$ tient dans (34 c) la place de u dans (34 b). Puisque en vertu de (33) on obtient la fonction $u - \lambda_1 t$ en faisant $\lambda_1 = 0$ dans u, on n'a qu'à faire $\lambda_1 = 0$ dans l'expression de m_h pour avoir l'expression de μ_h ce qui donne

$$\mu_h = \sum_{k=1}^{h} \sum_{(i)} \frac{h!}{i_2!\, i_3! \cdots i_h!} \left(\frac{\lambda_2}{2!}\right)^{i_2} \left(\frac{\lambda_3}{3!}\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{\lambda_h}{h!}\right)^{i_h} \qquad (0 < h) \tag{40}$$

la sommation (i) étant la même que dans la formule (38).

En particulier

$$\begin{aligned}
&(\mu_0 = 1)\\
&(\mu_1 = 0)\\
&\mu_2 = \lambda_2\\
&\mu_3 = \lambda_3\\
&\mu_4 = \lambda_4 + 3\lambda_2^2\\
&\mu_5 = \lambda_5 + 10\lambda_2\lambda_3\\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Les formules (37) à (40) peuvent aussi être mises sous forme d'un déterminant. On peut par exemple ou bien partir de la relation[1]

$$m_h = \sum_{i=1}^{h} \binom{h-1}{i-1} m_{h-i}\lambda_i, \quad \text{ou bien développer } Du = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_{k+1}\frac{t^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k \frac{t^k}{k!}} \text{ suivant les}$$

puissances de t à l'aide des formules de HAGEN.[2] De cette façon on obtient en vertu de la remarque ci-dessus relative à la manière dont on peut passer de l'expression de m à l'expression des μ

[1] STEFFENSEN: Matematisk Iagttagelseslære p. 21.

[2] Am. Journ. of Mathem. 5 (1883) p. 236.

$$\lambda_h = (-)^{h-1} \begin{vmatrix} m_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_2 & \binom{1}{0} m_1 & 1 & \cdots & 0 \\ m_3 & \binom{2}{0} m_2 & \binom{2}{1} m_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{h-1} & \binom{h-2}{0} m_{h-2} & \binom{h-2}{1} m_{h-3} & \cdots & 1 \\ m_h & \binom{h-1}{0} m_{h-1} & \binom{h-1}{1} m_{h-2} & \cdots & \binom{h-1}{h-2} m_1 \end{vmatrix} \quad (0 < h)$$

$$\lambda_h = (-)^{h-1} \begin{vmatrix} \mu_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \mu_4 & \binom{3}{1} \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{h-2} & \binom{h-3}{1} \mu_{h-4} & \binom{h-3}{2} \mu_{h-5} & \cdots & 1 \\ \mu_h & \binom{h-1}{1} \mu_{h-2} & \binom{h-1}{2} \mu_{h-3} & \cdots & \binom{h-1}{h-3} \mu_2 \end{vmatrix} \quad (3 < h)$$

$$m_h = \begin{vmatrix} \lambda_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \binom{1}{1} \lambda_1 & -1 & \cdots & 0 \\ \lambda_3 & \binom{2}{1} \lambda_2 & \binom{2}{2} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{h-1} & \binom{h-2}{1} \lambda_{h-2} & \binom{h-2}{2} \lambda_{h-3} & \cdots & -1 \\ \lambda_h & \binom{h-1}{1} \lambda_{h-1} & \binom{h-1}{2} \lambda_{h-2} & \cdots & \binom{h-1}{h-1} \lambda_1 \end{vmatrix} \quad (0 < h)$$

$$\mu_h = \begin{vmatrix} \lambda_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_3 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \lambda_4 & \binom{3}{2} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{h-2} & \binom{h-3}{2} \lambda_{h-4} & \binom{h-3}{3} \lambda_{h-5} & \cdots & -1 \\ \lambda_h & \binom{h-1}{2} \lambda_{h-2} & \binom{h-1}{3} \lambda_{h-3} & \cdots & \binom{h-1}{h-2} \lambda_2 \end{vmatrix} \quad (3 < h)$$

Les méthodes précédentes permettent aussi d'exprimer les coëfficients du développement d'une fonction de distribution arbitraire $f(x)$ suivant les dérivées de $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Posant $f(x)=\sum_{h=0}^{\infty}(-)^h \frac{c_h}{h!}\varphi_h(x)$, où $\varphi_h(x)=D^h e^{-\frac{x^2}{2}}=H_h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$; H_h étant le polynome d'Hermite d'orde h, on a l'identité[1]

$$u(t)-\frac{t^2}{2}=\operatorname{Log}\sum_{h=0}^{\infty} c_h \frac{t_h}{h!},$$

ce qui montre que pour $0 \overline{\overline{<}} h$ nous aurons l'expression de c_h en remplaçant λ_2 par λ_2-1 dans l'expression de m_h.

En particulier dans le cas où l'on a choisi l'origine et l'unité des observations de façon à ce que $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, on n'a qu'à faire $\lambda_1=\lambda_2=0$ dans l'expression de m_h, ou — ce qui revient au même — à faire $\lambda_2=0$ dans l'expression de μ_h pour avoir l'expression de c_h. On obtient ainsi

$$c_h=\sum_{k=1}^{h}\sum_{(i)}\frac{h!}{i_3!\ i_4!\cdots i_h!}\left(\frac{\lambda_3}{3!}\right)^{i_3}\left(\frac{\lambda_4}{4!}\right)^{i_4}\cdots\left(\frac{\lambda_h}{h!}\right)^{i_h} \qquad (0<h)$$

la sommation (i) devant être étendue à tous les entiers non négatifs $i_3\, i_4 \cdots i_h$ satisfaisant à

$$i_3+i_4+\cdots+i_h=k,\quad 3i_3+4i_4+\cdots+hi_h=h.$$

$$c_h=\begin{vmatrix} \lambda_3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_4 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_6 & \binom{5}{3}\lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_{h-3} & \binom{h-4}{3}\lambda_{h-6} & \binom{h-4}{4}\lambda_{h-7} & \cdots & -1 \\ \lambda_h & \binom{h-1}{3}\lambda_{h-3} & \binom{h-1}{4}\lambda_{h-4} & \cdots & \binom{h-1}{h-3}\lambda_3 \end{vmatrix} \qquad (5<h)$$

En particulier on a

$$\begin{aligned} c_0&=1\\ c_1&=0\\ c_2&=0\\ c_3&=\lambda_3\\ c_4&=\lambda_4\\ c_5&=\lambda_5\\ c_6&=\lambda_6+10\lambda_3^2\\ c_7&=\lambda_7+35\lambda_3\lambda_4\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

[1] Voir par exemple FISHER: Mathematical theory of probabilities p. 210.

§ 3. Sommation d'une fonction particulière.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer une formule sommatoire qui nous sera utile dans la suite. C'est une formule assez générale qui comprend entr'autres comme trois cas spéciaux la somme des termes d'une progression arithmétique, géométrique ou factorielle.

Si nous employons la notation factorielle définie au § 1, la formule peut s'écrire

$$\text{(41 a)} \quad \sum_{i=0}^{h-1}(x+a-i)^{[m]}\binom{x+a}{x+b}^{[i]} = \sum_{i=0}^{h-1}\frac{(x+a)^{[m+i]}}{(x+b)^{[i]}} =$$

$$= \frac{x+b+1}{a-(m+b+1)}\left\{\binom{x+a-m}{x+b+1}^{[h]}-1\right\}(x+a)^{[m]}$$

les factorielles étant pris par rapport à x; a, b et x étant des quantités quelconques, m un entier positif, négatif ou nul, h un entier positif.

Nous avons originellement démontré cette formule par une conclusion de h à $(h+1)$ utilisant certaines sommations par parties. M. STEFFENSEN qui a eu l'obligeance de lire les deux premiers chapitres du présent travail en manuscript — ce dont nous l'en remercions vivement — a fait remarquer que cette démonstration peut être sensiblement simplifiée.

En effet on reconnaît que le terme général du premier membre est la différence par rapport à i de l'expression

$$\frac{x+b+1}{a-(m+b+1)}\,\frac{(x+a)^{[m+i]}}{(x+b+1)^{[i]}}.$$ On a donc immédiatement

$$\sum_{i=0}^{h-1}\frac{(x+a)^{[m+i]}}{(x+b)^{[i]}} = \frac{x+b+1}{a-(m+b+1)}\sum_{i=0}^{h-1}\Delta\frac{(x+a)^{[m+i]}}{(x+b+1)^{[i]}} =$$

$$\frac{x+b+1}{a-(m+b+1)}\left\{\frac{(x+a)^{[m+h]}}{(x+b+1)^{[h]}}-(x+a)^{[m]}\right\} = \frac{x+b+1}{a-(m+b+1)}\left\{\binom{x+a-m}{x+b+1}^{[h]}-1\right\}(x+a)^{[m]}.$$

Dans le cas particulier $0 \gtreqless x+a < m+h$ la formule ce réduit à

$$\text{(41 b)} \quad \sum_{i=0}^{h-1}(x+a-i)^{[m]}\binom{x+a}{x+b}^{[i]} = \frac{x+b+1}{m+b+1-a}(x+a)^{[m]}.$$

Si $a=m+b+1$ la formule (41 a) devient indéterminée. Dans ce cas la série à sommer sera $(x+a)^{[m+1]}\sum\limits_{i=x+a-m-h+1}^{x+a-m}\frac{1}{i}$. Le problème revient donc en ce cas à sommer les nombres naturels inverses, ce qui explique que la formule se trouve en défaut.

Faisant $a=b$, $m=1$ dans (41 a) nous aurons la formule sommatoire pour la progression arithmétique

$$\sum_{i=0}^{h-1}(x+a-i) = \frac{x+a+1}{-2}\left\{\binom{x+a-1}{x+a+1}^{[h]}-1\right\}(x+a) = \binom{x+a+1}{2}-\binom{x+a-h+1}{2}$$

Faisant $a=b$ avec m un entier quelconque nous aurons la formule sommatoire pour la progression factorielle:

$$\sum_{i=0}^{h-1}(x+a-i)^{[m]}=\frac{(x+a+1)^{[m+1]}}{m+1}\left\{1-\left(\frac{x+a-m}{x+a+1}\right)^{[h]}\right\}=\frac{(x+a+1)^{[m+1]}-(x+a-h+1)^{[m+1]}}{m+1}.$$

Faisant $m=0$, $a=cb$ et laissant b tendre vers ∞ nous obtenons la formule sommatoire pour la progression géométrique

$$\sum_{i=0}^{h-1}c^i=\lim_{b\to\infty}\frac{x+b+1}{(c-1)b-1}\left\{\left(\frac{x+cb}{x+b+1}\right)^{[h]}-1\right\}=\frac{c^h-1}{c-1}.$$

§ 4. Deux formules générales de sommation par parties.

Dans l'analyse directe des problèmes relatifs aux moments *incomplets* de certains distributions importantes par exemple la distribution binomiale et la distribution hypergéométrique on rencontre de très grands difficultés, qui dans bien des cas empêche d'obtenir des expressions exactes. D'autre part le plus souvent on ne connait pas le reste dans les expressions asymptotiques auxquelles on parvient, souvent on ne sait même pas si l'expression fournit une évaluation par excès ou par défaut. Dans ces conditions il s'attache un intérêt special à la recherche des limites inférieures et supérieures. Le premier qui paraît avoir attaqué le problème de cette façon est M. Meidell qui depuis longtemps possède certains résultats relatifs au moments incomplets de la distribution binomiale. Récemment j'ai eu l'occasion de voir ses résultats, qui me paraissent très intéressants. Il faut espérer que M. Meidell ne tardera pas à les publier.

Les limites que j'ai obtenues (et que l'on trouvera au § 6 du chap. II sont assez dissemblables de celles de M. Meidell. La principale raison en est que je me suis appuyé sur la connaissance de l'expression exacte de μ_1 (formule (79)).

On connait un grand nombre de théorèmes généraux concernant l'inégalité entre des sommes et des intégrales et qui peuvent trouver une application intéressante à l'étude des moments incomplets. Citons les inégalités de Tchebycheff, Hölder, Jensen, Schwarz et de M. M. Steffensen et Meidell[1]. Pour démontrer ces inégalités on s'appuie le plus souvent sur la monotonie ou la convexité des fonctions considérées.

Dans le paragraphe présent nous allons considérer ces inégalités sous un autre point de vue. Nous allons démontrer d'une façon tout à fait élémentaire deux formules de sommation par parties qui conduisent entre autres immédiatement à quelques-unes des inégalités citées et qui four-

[1] Voir par exemple Steffensen, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1918, p. 82 et 1925, p. 139, Meidell, ibid, 1918; p. 180 et 1921, p. 235, où l'on trouve des notices bibliographiques.

nissent en outre l'expression explicite des restes. Dans la suite nous aurons à faire usage de ces formules.

Soit $a_1\, a_2 \cdots a_n$, $b_1\, b_1 \cdots b_n$ deux suites de nombres quelconques, alors on a

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j). \tag{42 a}$$

On reconnaît l'analogie entre cette formule et la formule habituelle de sommation par parties

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = a_n \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} (a_i - a_{i+1})\, b_j\,. \tag{42 b}$$

Supposant que (42 a) soit exacte pour n, nous avons pour $(n+1)$

$$(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} a_i\, b_i = n \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i + (n+1)\, a_{n+1}\, b_{n+1}\,.$$

Le premier terme du second membre de cette dernière équation est par hypothèse égal au second membre de (42 a), qui peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n+1} b_i - a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} b_i - b_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1}\, b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i - n\, a_{n+1}\, b_{n+1}\,.$$

Rassemblant les termes nous retrouvons (42 a) pour $(n+1)$.

Puisque on a pour $n=2$ $\quad 2\,(a_1\, b_1 + a_2\, b_2) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + {} + (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$, la formule (42 a) est générale.

On peut donner au dernier terme du second membre de (42 a) une interprétation qui nous paraît assez intéressante.

Pour mesurer la variabilité dans une suite de nombres $a_1\, a_2 \cdots a_n$ on peut construire différentes mésures. Désignant la moyenne $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$ par a_0 on peut par exemple considérer la déviation moyenne $\frac{1}{n} \Sigma\, | a_i - a_0 |$, la déviation-type $\sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (a_i - a_0)^2}$, ou bien le coëfficient de variabilité (avec répétition) de M. GINI[1] $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_i - a_j |$ etc. Si l'on introduit le carré au lieu de la valeur absolue de la différance — ce qui parait assez naturelle — le coëfficient de variabilité sera $v = \frac{1}{n} \sqrt{\Sigma (a_i - a_j)^2}$, Σ désignant la somme $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}$. Ce coëfficient est l'analogue de la déviation-type. De même le coëfficient

$$c = \frac{\Sigma (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\sqrt{\Sigma (a_i - a_j)^2 \cdot \Sigma (b_i - b_j)^2}}$$

[1] Voir par exemple JULIN: Principes de Statistique. Bruxelles 1921, p. 467.

sera l'analogue du coëfficient de corrélation pour deux suites. On pourra appeler c le *coëfficient de covariabilité*. Il est évidemment positif ou négatif suivant que a et b varient «en moyenne» dans le même sens ou dans le sens inverse. Le coëfficient c est invariant envers une transformation linéaire des variables pourvue que cette transformation ne change pas le sens de la variation de l'une des variables sans changer le sens de la variation de l'autre. S'il existe entre a et b une relation linéaire $b_i = \alpha a_i + A$, le coëfficient de covariabilité est égal à $+1$ ou -1 suivant que α est positif ou négatif. Il découle de l'inégalité de SCHWARZ[1] que dans tout autre cas on a $|c| < 1$. Le coëfficient de corrélation jouit comme on le sait des mêmes propriétés. Ces considérations justifient d'appeler a et b *covariables* ou *contravariables* suivant que le coëfficient de covariabilité c est positif ou négatif. Mais alors le contenu de l'équation (42 a) peut être exprimé ainsi:

La moyenne $\frac{\Sigma a_i b_i}{n}$ *est plus grande ou plus petite que le produit des moyennes* $\frac{\Sigma a_i}{n}$ *et* $\frac{\Sigma b_i}{n}$ *suivant que a et b sont covariables ou contravariables.*

D'une façon plus précise on a $\frac{\Sigma a_i b_i}{n} = \frac{\Sigma a_i}{n} \cdot \frac{\Sigma b_i}{n} + \frac{1}{2} c v_a v_b$, v_a et v_b désignant respectivement le coëfficient de variabilité de la suite a_i et b_i.

Un cas très particulier de covariabilité est évidemment celui ou les deux suites sont monotones. Dans ce cas on a $n \Sigma a_i b_i \gtrless \Sigma a_i \cdot \Sigma b_i$ suivant que a_i et b_i vont dans le même sens ou dans le sens inverse. C'est là l'inégalité de TCHEBYCHEFF.

Il est intéressant de noter que la formule habituelle de sommation par parties (42 b) donne aussi lieu à une évaluation de la somme $\Sigma a_i b_i$ pourvue que a soit monotone et b garde un signe constant. Mais cette évaluation étant basée sur la valeur extrême a_n, est évidemment moins précise que l'évaluation à l'aide de (42 a) qui est basée sur la moyenne des a_i.

La seconde formule dont nous aurons besoin dans la suite, est la suivante.

$$\text{(42 c)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{b_i b_j} (b_i - b_j)^2.$$

La vérification est immédiate. On a, Σ désignant la somme $\sum_{i=1}^{n}$

$$\Sigma a_i b_i \cdot \Sigma \frac{a_i}{b_i} - (\Sigma a_i)^2 = \Sigma a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_i a_j}{b_i b_j} (b_i^2 + b_j^2) - \Sigma a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_i a_j}{b_i b_j} (b_i - b_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{b_i b_j} (b_i - b_j)^2.$$

---

[1] Voir par exemple COURANT et HILBERT: Methoden der mathematischen Physik I, Berlin 1924, p. 2.

Si le produit $a_i b_i$ garde un signe constant, on en tire de suite

(42 d) $$\Sigma a_i b_i \cdot \Sigma \frac{a_i}{b_i} > (\Sigma a_i)^2.$$

Si l'on suppose plus particulièrement que a_i et b_i soient positifs, l'inégalité (42 d) peut être déduite en faisant $c_i = a_i$, $\alpha_i = b_i$, $\psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ dans l'inégalité de JENSEN: $\Sigma c_i \psi(\alpha_i) > \psi(A) \Sigma c_i$, $A = \frac{\Sigma c_i \alpha_i}{\Sigma c_i}$, où c_i désigne une fonction positive et $\psi(\alpha_i)$ une fonction convexe dans le domaine de sommation. Pour a_i et b_i positives (42 d) exprime la relation bien connue entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique.

Faisant $a_i = \alpha_i \beta_i$, $b_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ dans (42 c) on en déduit l'inégalité de SCHWARZ

$$\Sigma \alpha_i^2 \cdot \Sigma \beta_i^2 - (\Sigma \alpha_i \beta_i)^2 > 0$$

et l'on obtient pour le reste l'expression $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}^2$.

L'inégalité (42 d) peut être sensiblement généralisée. Supposons que les a_i et b_i soient positifs. Soit x et y deux nombres quelconques, entiers ou non, $x > y$, alors (42 e): $\left(\frac{\Sigma a_i b_i^x}{\Sigma a_i}\right)^y$ *est plus grand ou plus petit que* $\left(\frac{\Sigma a_i b_i^y}{\Sigma a_i}\right)^x$ *suivant que x et y sont de même signe ou de signe opposé.* Pour x et y positif l'énoncé est une conséquence immédiate d'une proposition connue[1]. Le cas où x et y sont négatifs se ramène à celui de x et y positifs en faisant $x = -\eta$, $y = -\xi$, $b_i = \beta_i^{-1}$ ($\xi < 0$, $\eta < 0$) dans (42 e), supposée exacte pour x et y positifs. De même pour démontrer que la différence $\left(\frac{\Sigma a_i b_i^{-y}}{\Sigma a_i}\right)^x - \left(\frac{\Sigma a_i b_i^x}{\Sigma a_i}\right)^{-y}$ est positive pour x et y positifs quelconques, on n'a qu'à faire $a_i = \alpha_i b_i^y$, $x + y = z$ et de mettre $(\Sigma a_i)^{-x} (\Sigma a_i b_i^x)^{-y} (\Sigma a_i b_i^{-y})^{x+y}$ en facteur. Il reste alors $\left(\frac{\Sigma \alpha_i b_i^z}{\Sigma \alpha_i}\right)^y - \left(\frac{\Sigma \alpha_i b_i^y}{\Sigma \alpha_i}\right)^z$, où z et y sont positifs, $z > y$.

[1] WAHLUND, Arkiv f. Matem. Astron. & Fysik 18 No. 2 (1924).

Chap. II. Les paramètres de la distribution binomiale.

§ 1. Les semi-invariants de la distribution binomiale.

Dans les paragraphes suivants nous allons étudier plus particulièrement la distribution binomiale. C'est comme on le sait la distribution *a priori* de la fréquence d'un évènement dont on fait une série d'épreuves indépendantes à probabilité constante. Si nous désignons pas s le nombre d'épreuves dans la série et par p la probabilité de l'arrivée de l'évènement considéré, nous aurons en employant la notation du § 2

$$x_\nu = \nu \qquad P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu} \qquad q = 1-p. \qquad (\nu = 0, 1, \ldots s) \tag{43}$$

Dans le paragraphe présent je me propose d'obtenir des relations récurrentes pour les semi-invariants de cette distribution, ainsi que l'expression indépendante du semi-invariant d'un ordre quelconque en fonction de s et p.

Puisque $\sum_{\nu=0}^{s} e^{\nu t} \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu} = (q+p\,e^t)^s$

on a immédiatement $u(t) = s \operatorname{Log}(q+p\,e^t)$, $Du = \dfrac{s\,p\,e^t}{q+p\,e^t}$ d'où (44) $\lambda_1 = sp$.

Pour calculer $\lambda_2 \lambda_3 \cdots$ etc., on pourrait suivre la méthode générale qui consiste à calculer directement les dérivées successives de u par rapport à t, et de faire ensuite $t=0$. Pourtant nous obtiendrons les expressions cherchées d'une façon plus élégante en nous servant d'une formule différentielle récurrente très simple que nous allons établir. Nous allons démontrer que l'on a[1]

$$\lambda_n = pq \frac{d}{dp} \lambda_{n-1} \qquad (1 < n) \tag{45}$$

Considérons u comme une fonction des deux variables t et p et posons pour abréger $\quad v = e^t \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad u^{(n)} = \dfrac{\partial^n u}{\partial t^n}, \quad v^{(n)} = \dfrac{\partial^n v}{\partial t^n}.$

L'identité (46) $\qquad q\,u^{(n)} = s\,p\,e^t - p\,v^{(n-1)}$

est satisfaite pour $n=1$. Etant dérivée par rapport à t elle ne subit d'autre modification que celle qui consiste à remplacer n par $(n+1)$, donc elle est générale.

[1] Voir aussi Comptes Rendus, Paris. Séance du 17. août 1925.

Remarquant que $\frac{\partial v}{\partial t}=v+pq\frac{\partial v}{\partial p}$, nous pouvons transformer le second membre de (46) en $q\left[u^{(n-1)}-p^2\frac{\partial}{\partial p}v^{(n-2)}\right]$. Cette expression est égale à $q\cdot(pq)\frac{\partial}{\partial p}u^{(n-1)}$, ce que l'on vérifie en dérivant (46) par rapport à p. Donc $u^{(n)}=pq\frac{\partial}{\partial p}u^{(n-1)}$. Nous n'avons qu'à faire $t=0$ dans cette dernière relation pour avoir la formule (45). A l'aide de cette formule et la condition initiale (44) nous aurons successivement

$$\lambda_2=spq$$
$$\lambda_3=spq(q-p)$$
$$\lambda_4=spq(1-6pq)$$
etc.

La formule (45) est surtout avantageuse quand il s'agit d'exprimer les semi-invariants en fonction de s et p. Puisque la formule contient un signe de dérivation, elle ne se prête pas au calcul numérique récurrent dans le cas où s et p sont des quantités données. Pour obtenir des formules récurrentes qui se prêtent au calcul numérique, nous allons établir une relation «complémentaire» à laquelle satisfont les semi-invariants.

Ecrivons $u=u(t,p)$, $\lambda_n=\lambda_n(p)$ pour mettre en évidence le fait que u est une fonction de t et p et λ_n une fonction de p.

Nous avons $u(t,p)=s\operatorname{Log}(q+pe^t)=st+s\operatorname{Log}(p+qe^{-t})$, c'est-à-dire $u(t,p)=st+u(-t,q)$, donc pour $1<n$, $u^{(n)}(t,p)=(-)^n u^{(n)}(-t,q)$. Faisant $t=0$ nous aurons

(47) $$\lambda_n(p)=(-)^n\lambda_n(q) \qquad (1<n).$$

Cette relation nous montre que les équations linéaires entre les semi-invariants possède des propriétés analogues à celles que j'ai démontrées dans un article précédent[1] au sujet des équations linéaires entre les moments.

Portant maintenant le développement $v^{(n-1)}=e^t\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}u^{(i)}$ dans l'identité (46) nous avons $q\,u^{(n)}=spe^t-pe^t\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}u^{(i)}$, d'où pour $t=0$

(48 a) $$\lambda_n=spq-p\sum_{i=2}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\lambda_i.$$

De cette relation nous tirerons en vertu de (47)

(48 b) $$(-)^n\lambda_n=spq-q\sum_{i=2}^{n-1}(-)^i\binom{n-1}{i-1}\lambda_i \qquad (1<n)$$

[1] Biometrika Vol. XVII (1925) p. 165.

d'où nous déduisons encore[1]

$$\frac{\lambda_n (q+(-)^n p)}{pq} = s - 2 \sum_{i=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{n-1}{2}\right)} \binom{n-1}{2i-1} \lambda_{2i} \qquad (1<n) \tag{49 a}$$

$$\frac{\lambda_n (q+(-)^{n-1} p)}{pq} = s(q-p) - 2 \sum_{i=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-1}{2i} \lambda_{2i+1} \qquad (1<n) \tag{49 b}$$

La formule (49 a) exprime le semi-invariant d'un ordre quelconque (pair ou impair) à l'aide des semi-invariants inférieurs d'ordre pair, tandis que (49 b) exprime le semi-invariant d'un ordre quelconque (pair ou impair) à l'aide des semi-invariants inférieurs d'ordre impair.

Des formules (49) nous déduisons comme cas spéciaux

$$\lambda_{2g} = spq - 2pq \sum_{i=1}^{g-1} \binom{2g-1}{2i-1} \lambda_{2i} \qquad (1<g) \tag{50 a}$$

$$\lambda_{2g+1} = spq(q-p) - 2pq \sum_{i=1}^{g-1} \binom{2g}{2i} \lambda_{2i+1} \qquad (1<g) \tag{50 b}$$

Pour obtenir l'expression indépendante du semi-invariant d'un ordre quelconque nous posons

$$\text{(51 a)} \quad \frac{\lambda_{2g}}{s} = \sum_{k=1}^{g} A_{gk} r^k \quad (0<g) \qquad \text{(51 b)} \quad \frac{\lambda_{2g+1}}{s(q-p)} = \sum_{k=1}^{g} B_{gk} r^k \quad (0<g)$$

$$r = pq$$

A l'aide de (45) on vérifie sans peine par une conclusion de g à $(g+1)$ que les quantités A et B sont des coëfficients numériques indépendants de s et p. Portant les développements (51) dans la formule (45) et identifiant les deux membres nous aurons $B_{gk} = k\,A_{gk}$ et $A_{gk} = k\,B_{g-1,k} - 2(2k-1)\,B_{g-1,k-1}$, d'où en éliminant les quantités B

$$A_{gk} = k^2 A_{g-1,k} - (2k-2)(2k-1) A_{g-1,k-1}.$$

Posant $A'_{\nu k} = \frac{(-)^{k-1}}{(2k-1)!} A_{\nu+k,k}$, d'où $A_{gk} = (-)^{k-1}(2k-1)!\,A'_{g-k,k}$

nous obtenons pour A' l'équation aux différences $A'_{\nu k} = A'_{\nu,k-1} + k^2 A'_{\nu-1,k}$, avec les conditions initiales $A'_{0k} = A'_{\nu 1} = 1$.

Ce sont là précisément les relations auxquelles satisfait la fonction symétrique $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$. Nous avons donc $B_{gk} = kA_{gk} = (-)^{k-1} k(2k-1)!\,\Gamma^{(2)}_{g-k,k}$. Introduisant l'expression de $\Gamma^{(2)}_{\nu k}$ donnée par (16) nous obtenons en définitif pour A et B les expressions indépendantes

[1] Je désigne le plus grand entier (positif, négatif ou nul) compris dans la quantité x par Ent (x). Le symbole habituellement adopté $[x]$ peut donner lieu à une confusion puisque j'emploie les crochets pour désigner les exposants factoriels.

$$B_{gk} = k\, A_{gk} = \sum_{j=0}^{k} (-)^{j-1} \binom{2\,k}{k+j} j^{2g} = \frac{(-)^{k-1}}{2} \sum_{j=0}^{2k} (-)^{j} \binom{2\,k}{j} (j-k)^{2g}. \tag{52}$$

Il est intéressant de noter l'analogie qui existe entre l'expression (52) et l'expression (2) de la différence de zéro; (52) représente le «moment moyen» d'une progression dont le «moment», à un facteur près est représenté par la différence de zéro $\Delta^{2k}\, O^{2g}$.

§ 2. Les moments de la distribution binomiale. Considérations générales.

Si l'on range les paramètres de la distribution binomiale d'après la simplicité de leurs expressions, les moments factoriels tiennent la première place puisqu'on a simplement[1]

$$m_{[h]} = \sum_{\nu=0}^{s} \nu^{[h]} \binom{s}{\nu} p^{\nu} q^{s-\nu} = s^{[h]} p^h \sum_{\nu=0}^{s} \binom{s-h}{\nu-h} p^{\nu-h} q^{s-\nu} = s^{[h]} p^h. \tag{53 a}$$

Viennent ensuite les moments pris autour de l'origine. Une application de (31 a) donne immédiatement

$$m_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)} s^{[i]} p^i = \sum_{i=0}^{h} \binom{s}{i} p^i\, \Delta^i\, O^h. \tag{53 b}$$

Pour $0 < h$ on peut du reste remplacer la limite inférieure $i=0$ par $i=1$.

Les moments m_h satisfont aussi à certaines relations récurrentes dont les plus intéressantes sont les suivantes

$$\text{(54 a)}\quad m_h = \left(sp + pq\frac{d}{dp}\right) m_{h-1} \qquad \text{(54 b)}\quad m_h = p \sum_{i=0}^{h-1} \left(s\binom{h-1}{i} - \binom{h-1}{i-1}\right) m_i.$$

Posant $m_h = q^s M_{hs}$ on a encore la formule récurrente en deux indices

$$M_{hs} = s\,(M_{h-1,s} - M_{h-1,\,s-1}). \tag{54 c}$$

Pour démontrer (54 a) on n'a qu'à dériver l'expression qui définit m_h. Les formules (54 b) et (54 c) s'obtiennent aussi aisément par des transformations de l'expression de définition.

Je n'insiste pas davantage sur ces relations facilement obtenues. Je vais de suite aborder le problème correspondant relatif aux moments moyens μ_h.

Dans la suite nous aurons fréquemment à faire usage des formules récurrentes

---

[1] STEFFENSEN Matem. Iagttagelseslære p. 43. On peut du reste aussi facilement obtenir l'expression du moment factoriel à l'aide de la fonction génératrice (34 d).

$$(55)\quad \mu_h = pq\left[(h-1)s\mu_{h-2} + \frac{d}{dp}\mu_{h-1}\right] \qquad (h \text{ quelconque})$$

$$(56\,\mathrm{a})\quad 0 = \sum_{j=0}\left\{\left(\binom{x}{j} + \binom{h-x-1}{j}\right)((-)^{j-1}q-p) + ((-)^j+1)\left(\binom{x}{j-1} + \binom{h-x-1}{j-1}\right)spq\right\}\mu_{h-j} \quad (x+1<h)$$

$$(56\,\mathrm{b})\quad 0 = \sum_{j=0}\left\{\left(\binom{y}{j+1} - \binom{h-y}{j+1}\right)((-)^{j-1}q-p) + ((-)^j+1)\left(\binom{y}{j} - \binom{h-y}{j}\right)spq\right\}\mu_{h-j} \quad (y<h)$$

$$(56\,\mathrm{c})\quad \mu_h = \frac{q-p}{2}\sum_{j=1}\left(\binom{x}{2j-1} + \binom{h-x-1}{2j-1}\right)\mu_{h-2j+1} + $$
$$+ \sum_{j=1}\left\{\left(\binom{x}{2j-1} + \binom{h-x-1}{2j-1}\right)spq - \frac{1}{2}\left(\binom{x}{2j} + \binom{h-x-1}{2j}\right)\right\}\mu_{h-2j}.$$

Ici x et y désignent deux entiers quelconques non négatifs; $\sum\limits_{j=n}$ signifie une sommation étendue depuis $j=n$ jusqu'au dernier terme qui ne s'évanouit pas. Choisissant x et y convenablement on peut faire en sorte qu'une grande partie des termes disparaisse. La formule (55) est la formule bien connue de BOHLMANN-ROMANOVSKY.[1] Les formules (56 a) et (56 b) sont des généralisations de la formule de PEARSON.[2] Pour ce qui concerne la démonstration des formules (56 a) et (56 b) je renvoie à mon article déjà cité.[3] (56 c) n'est qu'une autre manière d'écrire la formule (56 a).

Le calcul des premiers moments

$$\mu_0 = 1$$
$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = spq = s(p-p^2)$$
$$\mu_3 = spq(q-p) = s(p-3p^2+2p^3)$$
$$\mu_4 = spq(1-6pq+3spq) = s(p-7p^2+12p^3-6p^4)+s^2(3p^2-6p^3+3p^4)$$

etc.

indique la forme probable des moments d'ordre supérieur. A l'aide de (55) on vérifie d'une façon rigoureuse par une conclusion de h à $(h+1)$ que μ_h doit être de la forme

$$(57)\qquad \mu_h = \sum_{\varrho=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{h}{2}\right)}\sum_{k=\varrho}^{h} E_{h\varrho k}\, s^\varrho p^k \qquad (1<h)$$

---

[1] ROMANOVSKY. Biometrika. Vol. XV (1923). Voir aussi BORTKIEWICZ. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. 27 (1918), p. 73.

[2] PEARSON: On the moments of the hypergeometric Series. Biometrika. Vol. XVI (1924).

[3] Biometrika. Vol. XVII (1925), p. 165.

Où $E_{h\varrho k}$ désignent certains coëfficients numériques. Le nombre de termes en (57) $$(g+1)+(g+2)+\cdots+2g=\frac{g(3g+1)}{2} \qquad (\text{si } h=2g),$$

ou $$(g+2)+(g+3)+\cdots+(2g+1)=\frac{3g(g+1)}{2} \qquad (\text{si } h=2g+1).$$

croît assez vite avec l'ordre du moment considéré. On est donc amené à rechercher s'il n'existe pas d'autres développements avec un nombre de termes plus restreint. Désignant le moment d'ordre h par $\mu_h(p)$ pour mettre en évidence le fait que μ_h est un polynome en p, on vérifie à l'aide de l'expression qui définit μ_h que l'on a la formule «complémentaire» (58) $\mu_h(p)=(-)^h\mu_h(q)$. Les moments d'ordre pair sont donc des fonctions paires et les moments d'ordre impair des fonctions impaires de $\delta=q-p=1-2p$. On en conclut que μ_{2g} peut être ordonné suivant les puissances paires et μ_{2g+1} suivant les puissances impaires de δ. Posant $r=pq=\frac{1-\delta^2}{4}$ nous pouvons par conséquence écrire μ_{2g} comme un polynome en r et μ_{2g+1} comme le produit par $\delta=q-p$ d'un polynome en r. D'une façon plus précise μ_{2g} et μ_{2g+1} peuvent être mises sous les formes

$$\text{(59 a)} \qquad \mu_{2g}=\sum_{\varrho=1}^{g}\sum_{k=0}^{g-\varrho} V_{g\varrho k}\,\mu^\varrho r^k \qquad (0<g)$$

$$\text{(59 b)} \qquad \mu_{2g+1}=(q-p)\sum_{\varrho=1}^{g}\sum_{k=0}^{g-\varrho} W_{g\varrho k}\,\mu^\varrho r^k \qquad (0\leqq g)$$

où $\mu=sr=spq$, $V_{g\varrho k}$ et $W_{g\varrho k}$ étant des coëfficients numériques. L'existence des développements (59 a) et (59 b) peut être vérifiée à l'aide de (55) par une conclusion de g à $(g+1)$.

Le nombre de termes soit en (59 a) soit en (59 b) $1+2+\cdots+g=\frac{g(g+1)}{2}$ est à peu près un tiers du nombre de termes en (57).

Il serait intéressant de rechercher si on ne pouvait pas trouver d'autres développements contenant un nombre de termes encore plus restreint. L'analogie de la relation (58) avec la relation (23) pour $n=1$ suggère l'idée de tenter un développement suivant les polynomes $B_\nu^{(1)}$, éventuellement suivant les polynomes généralisés $B_\nu^{(n)}$.

Entre les autres développements possibles il se rattache un certain intérêt au développement homogène

$$\text{(60)} \qquad \mu_h=\sum_{k=1}^{h-1} C_{hk}\,p^k q^{h-k} \qquad (1<h)$$

où C_{hk} sont des polynomes en s.

Dans la suite j'étudierai plus spécialement les développements (57) et (59). En ce qui concerne le développement homogène (60) je me borne à signaler les relations suivantes. Par une sommation par parties de l'expression qui définit μ_h en tenant compte des propriétés générales des équations linéaires entre les μ que j'ai indiquées dans l'article de Biometrika, on trouve la formule récurrente $\mu_h = \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} (pq^j + q(-p)^j) \underline{\mu}_{h-j}$, où $\underline{\mu}_{h-j}$ désigne la valeur de μ_{h-j} quand s est remplacé par $(s-1)$.

Une application de la formule de BOHLMANN-ROMANOVSKY nous donne $C_{hk} = kC_{h-1,k} - (h-k) C_{h-1,k-1} + s(h-1) C_{h-2,k-1}$, $C_{21} = s$. On a aussi la relation de symétrie $C_{hk} = (-)^h C_{h,h-k}$.

C_{hk} peut être ordonné suivant les factorielles de s $C_{hk} = \sum_{t=1} C_{hkt} s^{t}$, la limite superieure de sommation étant le plus petit des nombres k et $(h-k)$. Pour les coëfficients C_{hkt} on a la formule récurrente

$$C_{hkt} = k C_{h-1,k,t} - (h-k) C_{h-1,k-1,t} + (h-1)\, t\, C_{h-2,k-1,t} + (h-1) C_{h-2,k-1,t-1}$$

$$C_{hk1} = (-)^{k+1}.$$

§ 3. L'expression de μ_h ordonnée suivant les puissances de s et p.

On obtient la formule récurrente la plus simple pour les coëfficients E en portant le développement (57) dans la formule (55) et en effectuant l'identification des deux membres. On trouve

$$E_{h\varrho k} = kE_{h-1,\varrho,k} - (k-1) E_{h-1,\varrho,k-1} + (h-1) [E_{h-2,\varrho-1,k-1} - E_{h-2,\varrho-1,k-2}]. \quad (1 < h) \tag{61}$$

Cette formule jointe à la condition initiale $E_{h11} = 1$ permet de calculer les coëfficients E de proche en proche. Voici les premières valeurs:

Tableau 2.

$E_{h\varrho k}$	$k=1$	$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	$\varrho=1$	$\varrho=1$	$\varrho=2$	$\varrho=1$	$\varrho=2$	$\varrho=1$	$\varrho=2$	$\varrho=1$	$\varrho=2$
$h=1$	0	.	.	.	.	.	.	.	.
$h=2$	1	-1	.	.	.	.	.	.	.
$h=3$	1	-3	.	2	.	.	.	.	.
$h=4$	1	-7	3	12	-6	-6	3	.	.
$h=5$	1	-15	10	50	-40	-60	50	24	-20

Pour le calcul numérique des coëfficients E nous avons la relation de contrôle $\sum_{\varrho=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{h}{2}\right)} \sum_{k=\varrho}^{h} E_{h\varrho k} = 0$ $(h = 1, 2, \cdots \infty)$, c'est-à-dire la somme des coëfficients E sur une ligne quelconque du tableau 2 est égale à zéro. Pour démontrer cette relation de contrôle nous n'avons qu'à étendre la sommation $\sum_{\varrho=1}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{h}{2}\right)} \sum_{k=\varrho}^{h}$ aux deux membres de (61) ce qui donne

$$\sum_{\varrho k} E_{h\varrho k} = \sum_{\varrho k} kE_{h-1,\varrho,k} - \sum_{\varrho k} (k-1) E_{h-1,\varrho,k-1} + (h-1) \sum_{\varrho k} (E_{h-2,\varrho-1,k-1} - E_{h-2,\varrho-1,k-2})$$

$$= \sum_{\varrho k} kE_{h-1,\varrho,k} - kE_{h-1,\varrho,k} + (h-1) \sum_{\varrho k} (E_{h-2,\varrho-1,k} - E_{h-2,\varrho-1,k}) = 0.$$

Je n'ai pas jugé utile de pousser le calcul des nombres E plus loin puisque dans les applications on fera mieux d'employer le développement suivant les puissances de r et μ. Dans le paragraphe suivant on trouvera un tableau des coëfficients de ce dernier développement, tableau qui s'étend jusqu'au moment d'ordre 13.

Pour obtenir l'expression indépendante des coëfficients E, nous prenons comme point de départ la définition même des moments μ_n

$$\mu_n = \sum_{\nu=0}^{s} (\nu - sp)^n P_\nu . \tag{62 a}$$

A l'aide de (31 c) nous trouvons immédiatement

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}^{(-i)}(-sp)\, s^{[i]} p^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} p^i \Delta^i (-sp)^n . \tag{62 b}$$

Développant $B_{n-i}^{(-i)}(-sp)$ et $s^{[i]}$ suivant les puissances de s, nous aurons

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{i} (-)^i \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \binom{i-1}{k-1} B_{n-i-j}^{(-i)} B_{i-k}^{(i)} s^{j+k} p^{i+j}.$$

Introduisant les nouveaux indices
$\varrho = j+k,\ h = i+j,$ d'où $j = h-i,\ k = \varrho - h + i,$ la somme triple se transforme ainsi

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{i} = \sum_{\varrho=0}^{n} \sum_{h=\varrho}^{n} \sum_{i=h-\varrho}^{h},$$

donc $$\mu_n = \sum_{\varrho=0}^{n} s^\varrho \sum_{h=\varrho}^{n} p^h \sum_{i=h-\varrho}^{h} (-)^{h+i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{h-i} \binom{i-1}{\varrho-h+i-1} B_{n-h}^{(-i)} B_{h-\varrho}^{(i)} .$$

Puisque $$\binom{n}{i} \binom{n-i}{h-i} \binom{i-1}{\varrho-h+i-1} = \varrho \binom{n}{\varrho} \binom{n-\varrho}{n-h} \frac{\binom{\varrho-1}{h-i}}{i},$$

la dernière somme se transforme en

$$\mu_n = \sum_{\varrho=0}^{n} \varrho \binom{n}{\varrho} s^\varrho \sum_{h=\varrho}^{n} (-)^h \binom{n-\varrho}{n-h} p^h \sum_{i=h-\varrho}^{h} \frac{(-)^i}{i} \binom{\varrho-1}{h-i} B_{n-h}^{(-i)} B_{h-\varrho}^{(i)} \tag{63 a}$$

d'où $$E_{h\varrho k} = (-)^k \varrho \binom{h}{k} \binom{k}{\varrho} \sum_{j=k-\varrho+1}^{k} \frac{(-)^j}{j} \binom{\varrho-1}{k-j} B_{h-k}^{(-j)} B_{k-\varrho}^{(j)} . \tag{63 b}$$

Remarquons que $E_{n\varrho k}$ doit disparaître pour $\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) < \varrho \overline{\overline{<}} n$ en vertu de (57). Nous pouvons donc changer dans (63 a) la limite supérieure $\varrho = n$ en $\varrho = \mathrm{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)$. Nous en tirerons encore comme corollaire l'identité

$$\sum_{j=m}^{\varrho+m} (-)^j \frac{j-m}{j} \binom{\varrho}{j-m} B_l^{(-j)} B_m^{(j)} = \sum_{j=m}^{\varrho+m} (-)^j \binom{\varrho}{j-m} B_l^{(-j)} B_m^{(j+1)}(1) = 0 \tag{64}$$

$$(l \text{ et } m \text{ non négatifs, } l+m < \varrho) .$$

à laquelle doivent satisfaire les nombres B.

TSCHUPROW dans son important mémoire «Expectation of Moments of Frequence Distributions» donne l'expression des coëfficients $E_{h\varrho k}$ sous forme d'une opération différentielle d'ordre h. En effet il démontre la formule[1]

$$\mu_h = \sum_{f=\mathrm{Ent}\left(\frac{h+1}{2}\right)}^{h-1} s^{h-f} \sum_{k=0}^{f} (-)^k p^{h+k-f} \Delta^h \alpha_{0,k-f}\, \beta_{k-f,k},$$

Δ opérant sur les deux indices de α et le premier indice de β, α et β étant les nombres définis au § 1. Il n'est pas difficile de montrer que l'on retrouvera la formule (63 a) si l'on effectue l'opération Δ^h dans la formule de TSCHUPROW, en introduisant les nombres B.

§ 4. L'expression de μ_{2g} et μ_{2g+1} ordonnée suivant les puissances de s et $r=pq$:

Si l'on porte les expressions (59 a) et (59 b) dans (55) et égalise les coëfficients de $\mu^\varrho r^k$ des deux membres on aura pour $h=2g$ $(1<g)$.

(65 a) $V_{g\varrho k}=(2g-1)\, V_{g-1,\varrho-1,k}+(k+\varrho)\, W_{g-1,\varrho,k}-2(2k+2\varrho-1)\, W_{g-1,\varrho,k-1}$

Pour $h=2g+1$ $(0<g)$ on aura

(65 b) $$W_{g\varrho k}=(k+\varrho)\, V_{g\varrho k}+2g\, W_{g-1,\varrho-1,k}$$

Ces formules jointes aux conditions initiales $V_{g10}=W_{g10}=1$ $(0<g)$ permettent de calculer les nombres V et W de proche en proche. Dans le tableau 3 (p. 38—39) on trouvera les premières valeurs.

Dans les en-têtes du tableau 3 j'ai indiqué non seulement la valeur des indices $g\varrho k$ mais aussi les moments et les puissances de s et r qui correspondent aux valeurs respectives de ces indices. Cette disposition permet d'utiliser le tableau pour trouver l'expression d'un moment donné μ_h sans être obligé de tenir compte de la signification des nombres V et W. Ainsi on peut par exemple immédiatement écrire l'expression de μ_7

$$\frac{\mu_7}{q-p}=\mu\,(1-60\,r+360\,r^2)+\mu^2\,(56-462\,r)+105\mu^3, \text{ où } \mu=spq=sr.$$

Nous allons maintenir établir certaines relations entre les coëfficients V et W qui sont intéressantes surtout comme relations de contrôle pour le calcul numérique. Nous aurons une relation de contrôle «verticale» en portant (59 a) et (59 b) dans (56 c). Egalisant les coëfficients de $\mu^\varrho r^k$ des deux membres, il vient pour $h=2g$

$$2V_{g\varrho k}=\sum_{j=1}\left[\binom{x}{2j-1}+\binom{2g-x-1}{2j-1}\right]\cdot\left[W_{g-j,\varrho,k}-4\,W_{g-j,\varrho,k-1}+2\,V_{g-j,\varrho-1,k}\right]$$

(66 a) $$-\left[\binom{x}{2j}+\binom{2g-x-1}{2j}\right]V_{g-j,\varrho,k}. \qquad (x+2 \gtreqless 2g)$$

[1] Biometrika Vol. XII (1919), p. 198. Formule (11).

Tableau 3.

$V_{g\varrho k}$ et $W_{g\varrho k}$			$\varrho=1$						$\varrho=2$				
			$k=0$	1	2	3	4	5	$k=0$	1	2	3	4
			μ	μr	μr^2	μr^3	μr^4	μr^5	μ^2	$\mu^2 r$	$\mu^2 r^2$	$\mu^2 r^3$	$\mu^2 r^4$
$g=1$	V_1	μ_2	1										
	W_1	$\frac{\mu_3}{q-p}$	1										
$g=2$	V_2	μ_4	1	—6					3				
	W_2	$\frac{\mu_5}{q-p}$	1	—12					10				
$g=3$	V_3	μ_6	1	—30	120				25	—130			(à cont.)
	W_3	$\frac{\mu_7}{q-p}$	1	—60	360				56	—462			„
$g=4$	V_4	μ_8	1	—126	1 680	— 5 040			119	—2 156	7 308		„
	W_4	$\frac{\mu_9}{q-p}$	1	—252	5 040	—20 160			246	—6 948	32 112		„
$g=5$	V_5	μ_{10}	1	—510	17 640	—151 200	362 880		501	—24 438	240 840	—623 376	„
	W_5	$\frac{\mu_{11}}{q-p}$	1	—1 020	52 920	—604 800	1 814 400		1 012	—75 834	1 013 760	—3 318 480	„
$g=6$	V_6	μ_{12}	1	—2 046	168 960	—3 160 080	19 958 400	—39 916 800	2 035	—243 232	5 310 756	—36 503 280	76 998 240
	W_6	$\frac{\mu_{13}}{q-p}$	1	—4 092	506 880	—12 640 320	99 792 000	—239 500 800	4 082	—741 936	21 878 064	—189 774 000	483 762 240

Tableau 3. (Cont.).

$V_{g\varrho k}$ et $W_{g\varrho k}$			$\varrho=3$				$\varrho=4$			$\varrho=5$		$\varrho=6$
			$k=0$	1	2	3	$k=0$	1	2	$k=0$	1	$k=0$
			μ^3	$\mu^2 r$	$\mu^3 r^2$	$\mu^3 r^3$	μ^4	$\mu^4 r$	$\mu^4 r^2$	μ^5	$\mu^5 r$	μ^6
$g=1$	V_1	μ_2										
	W_1	$\frac{\mu_3}{q-p}$										
$g=2$	V_2	μ_4										
	W_2	$\frac{\mu_5}{q-p}$										
$g=3$	V_3	μ_6	15									
	W_3	$\frac{\mu_7}{q-p}$	105									
$g=4$	V_4	μ_8	490	−2 380			105					
	W_4	$\frac{\mu_9}{q-p}$	1 918	−13 216			1 260					
$g=5$	V_5	μ_{10}	6 825	−99 120	303 660		9 450	−44 100		945		
	W_5	$\frac{\mu_{11}}{q-p}$	22 935	−465 960	1 839 420		56 980	−352 660		17 325		
$g=6$	V_6	μ_{12}	74 316	−2 453 748	20 233 620	−47 324 376	302 995	−3 879 260	11 098 780	190 575	−866 250	10 395
	W_6	$\frac{\mu_{13}}{q-p}$	235 092	−10 725 000	113 333 220	−323 768 016	1 487 200	−24 987 820	88 665 720	1 636 635	−9 429 420	270 270

Bien que (56 c) soit exacte pour $x=0, 1, \cdots$, (66 a) n'est exacte que pour $x=1, 2, \cdots$ puisque pour $x=0$ et $h=2g$ la sommation $\sum\limits_{j=1}$ de (56 c) comprend un terme où figure μ_0 pour lequel (59 a) n'est pas exacte.

Pour $h=2g+1$ nous trouvons

$$\text{(66 b)} \quad 2W_{g\varrho k}=\sum_{j=1}\left[\binom{x}{2j-1}+\binom{2g-x}{2j-1}\right]\cdot\left[V_{g-j+1,\varrho,k}+2W_{g-j,\varrho-1,k}\right]$$
$$-\left[\binom{x}{2j}+\binom{2g-x}{2j}\right]W_{g-j,\varrho,k}. \qquad (x+1 \gtreqless 2g)$$

Cette formule n'est pas sujet à la même restriction $0<x$ que (66 a) puisque pour $x=0$ et $h=2g+1$ le coëfficient de μ_0 dans (56 c) s'évanouit.

Pour obtenir des relations de contrôle «horizontales» nous n'avons qu'à étendre soit la sommation $\sum\limits_{\varrho}$ soit la sommation $\sum\limits_{k}$ soit encore la sommation $\sum\limits_{\varrho k}$ aux deux membres des équations (65 a) et (65 b). Nous n'insistons pas sur les relations facilement obtenues par les sommations $\sum\limits_{\varrho}$ et $\sum\limits_{k}$, occupons nous seulement des relations de contrôle «horizontales» obtenues par la sommation $\sum\limits_{\varrho k}$. Posons

$$S_{2g}=\sum_{\varrho=1}^{g}\sum_{k=0}^{g-\varrho}V_{g\varrho k} \qquad M_{2g}=\sum_{\varrho=1}^{g}\sum_{k=0}^{g-\varrho}(\varrho+k)\,V_{g\varrho k}$$

$$S_{2g+1}=\sum_{\varrho=1}^{g}\sum_{k=0}^{g-\varrho}W_{g\varrho k} \qquad M_{2g+1}=\sum_{\varrho=1}^{g}\sum_{k=0}^{g-\varrho}(\varrho+k)\,W_{g\varrho k}$$

de façon que S_h désigne la somme des coëfficients sur la ligne h-ième du tableau 3; les lignes étant numérotées 2, 3 ······ en correspondance avec les moments. M_h désigne le «moment» des coëfficients sur la ligne h-ième, c'est-à-dire la somme des produits que l'on obtient en multipliant chaque coëfficient $V_{g\varrho k}$ ou $W_{g\varrho k}$ par $(\varrho+k)$.

Nous allons démontrer que l'on a

$$\text{(67)} \quad \begin{aligned} S_h &= +1,\ 0,\ +1,\ +1,\ -2,\ -1, \\ M_h &= h,\ \frac{h-1}{3},\ 1,\ \frac{h}{3},\ -(h+1),\ -\frac{2h-1}{3} \end{aligned}$$

suivant que $h\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{6}$.

La sommation $\sum\limits_{\varrho k}$ étendue aux deux membres de (65 a) et (65 b) nous donne immédiatement

(68)

$$S_{2g}=(2g-1)\,S_{2g-2}-3M_{2g-1}-2S_{2g-1}\ (1<g), \quad S_{2g+1}=M_{2g}+2g\,S_{2g-1}\ (0<g).$$

A l'aide de ces relations nous vérifions par un calcul facile que les formules (67) sont exactes pour les quantités M pourvu qu'elles soient exactes pour les quantités S. Il suffit donc de démontrer que (67) est exacte pour les quantités S. Puisque $S_1=0$, $S_2=1$ la formule est exacte pour $h=1, 2$.

Faisant $x=1$ dans (66 a), $x=0$ dans (66 b) et étendant la sommation $\sum_{ik}$ aux deux membres, il vient

(69 a) $(1 < g)$

$$2S_{2g} = 2S_{2g-2} - 3S_{2g-1} + \sum_{j=1} \binom{2g-2}{2j-1} \left(2S_{2g-2j} - 3S_{2g-2j+1}\right) - \binom{2g-2}{2j} S_{2g-2j}$$

(69 b) $$2S_{2g+1} = \sum_{j=1} \binom{2g}{2j-1} \left(2S_{2g-2j+1} + S_{2g-2j+2}\right) - \binom{2g}{2j} S_{2g-2j+1}. \quad (0 < g)$$

Par ces formules on verifie (67) pour $S_3 \cdots S_6$.

Mettant S sous la forme $S_{6h+\delta} \begin{pmatrix} h = 0, 1, \cdots \infty \\ \delta = 0, 1, \cdots 5 \end{pmatrix}$ nous allons utiliser les relations (69) pour une conclusion de h à $(h+1)$. Pour cela nous aurons à calculer certaines sommes de la forme $R_{\alpha\beta} = \sum_{j=0} \binom{6h+2\alpha}{6j+\beta}$, où h désigne un entier positif, α un entier quelconque (positif, negatif ou nul) satisfaisant à $6h+2\alpha > 0$, β un entier quelconque < 6. Nous voyons que $R_{\alpha\beta}$ ne change pas si β est réduit mod. 6 pourvu que l'on ait toujours $\beta < 6$. D'autre part nous voyons que $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha, 2\alpha-\beta}$ pourvu que l'on ait en même temps $\beta < 6$, $2\alpha - \beta < 6$. Nous avons par exemple

$$R_{0,-2} = R_{0,+2}, \; R_{1,-3} = R_{1,-1}, \; R_{2,-3} = R_{2,+1}$$
$$R_{0,-1} = R_{0,+1}, \; R_{1,0} = R_{1,2}, \; R_{2,-2} = R_{2,0}.$$

Il suffit donc de considérer les cas $\alpha - \beta = 0, 1, 2, 3$ avec $\alpha = 0, 1, 2$.

À l'aide des formules de RAMUS[1] nous aurons

$$6R_{\alpha,\alpha} = \sum_{k=0}^{5} (-)^{hk} \left(2\cos\frac{k\pi}{6}\right)^{6h+2\alpha} = 2^{6h+2\alpha} + (-)^h 2 \cdot 3^{3h+\alpha} + 2,$$

et d'une façon analogue

$$6R_{\alpha,\alpha-1} = 2^{6h+2\alpha} + (-)^h 3^{3h+\alpha} - 1, \qquad 6R_{\alpha,\alpha-2} = 2^{6h+2\alpha} + (-)^{h+1} 3^{3h+\alpha} - 1$$
$$6R_{\alpha,\alpha-3} = 2^{6h+2\alpha} + (-)^{h+1} 2 \cdot 3^{3h+\alpha} + 2.$$

Supposant maintenant que $S_{6h+\delta}$ satisfasse à (67) pour[2] $h=0, 1 \cdots h$ nous aurons en appliquant les formules que nous venons de démontrer

$$2S_{6(h+1)} = 2R_{2,-1} - R_{2,0} - R_{2,1} + 2R_{2,2} - R_{2,3} - R_{2,4} = 2, \text{ donc } S_{6(h+1)} = 1.$$

Utilisant ce résultat on peut vérifier que l'on a $S_{6(h+1)+1} = 0$.

De proche en proche on trouvera ensuite

$$S_{6(h+1)+2} = 1, \; S_{6(h+1)+3} = 1, \; S_{6(h+1)+4} = -2, \; S_{6(h+1)+5} = -1.$$

Les formules (67) sont donc exactes dans le cas général.

Le calcul des quantités S et M constitue un double contrôle sur le calcul numérique des coëefficients V et W. C'est un contrôle des plus efficaces. En effet, le calcul de S et M par (67) est extrêmement simple et se fait indépendamment des calculs particuliers effectués pour trouver les

[1] Voir par exemple NETTO: Lehrbuch der Combinatorik p. 19.

[2] Pour $h=0$ on suppose $\delta > 0$.

coëfficients V et W. Au § 3 du chap. II nous donnons une autre démonstration de la formule (67), utilisant des valeurs complexes de la probabilité.

Pour obtenir des expressions indépendantes pour les coëfficients V et W nous prenons comme point de départ les identités

(70 a) $\sum_{k=\varrho}^{g} V_{g,\varrho,k-\varrho}\, r^k = \sum_{t=\varrho}^{2g} E_{2g\varrho,t}\, p^t$ (70 b) $(q-p)\sum_{k=\varrho}^{g} W_{g,\varrho,k-\varrho}\, r^k = \sum_{t=\varrho}^{2g+1} E_{2g+1,\varrho,t}\, p^t$.

que l'on tire sans peine des formules (57) et (59).

La méthode la plus directe pour obtenir des expressions indépendantes de V et W serait de développer p suivant les puissances de r $p=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-4r}\right]=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(-)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}(4r)^j$. Cette série est convergente dans le cas $|4r|<1$, seul cas qui nous intéresse. Portant cette série dans le second membre des identités (70) et égalisant les coëfficients d'une même puissance de r, nous aurions immédiatement V et W exprimés en fonction des coëfficients E, dont l'expression indépendante est donnée par (63 b). Pourtant l'expression obtenue serait assez compliquée. Il faudrait par exemple faire intervenir les coëfficients polynomials. Nous obtenons un résultat plus simple en suivant la marche inverse. Nous allons développer r^k suivant les puissances de p. Portant ce développement dans le premier membre de (70 a) nous obtenons un système d'équations linéaires en les coëfficients V. La solution de ce système peut être mise sous une forme assez simple. Une fois les coëfficients V trouvés il ne serait pas difficile d'obtenir une expression pour les coëfficients W.

Nous aurons d'abord

$$\sum_{k=\varrho}^{g}\sum_{j=0}^{k}(-)^j\binom{k}{j}V_{g,\varrho,k-\varrho}\,p^{k+j}=\sum_{t=\varrho}^{2g}E_{2g,\varrho,t}\,p^t. \tag{71}$$

Considérons en premier lieu le cas $g \gtreqless 2\varrho$. Posant $k+j=t$ nous pouvons transformer l'identité (71) ainsi

$$\left\{\sum_{t=\varrho}^{g}\sum_{j=0}^{t-\varrho}+\sum_{t=g+1}^{2\varrho}\sum_{j=t-g}^{t-\varrho}+\sum_{t=2\varrho+1}^{2g}\sum_{j=t-g}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)}\right\}(-)^j\binom{t-j}{j}V_{g,\varrho,t-j-\varrho}\,p^t=\sum_{t=\varrho}^{2g}E_{2g,\varrho\,t}\,p^t.$$

Il nous suffit de considérer les équations en V obtenues pour $t=\varrho,\varrho+1,\cdots g$ c'est-à-dire les équations

$$\sum_{j=0}^{t-\varrho}(-)^j\binom{t-j}{j}V_{g,\varrho,t-j-\varrho}=E_{2g,\varrho,t}\quad(t=\varrho,\varrho+1,\cdots g).$$

Posant $t-\varrho=h$ nous pouvons écrire ces équations sous la forme

$$\sum_{j=0}^{h}(-)^j\binom{\varrho+j}{h-j}V_{g\varrho j}=(-)^h E_{2g,\varrho,\varrho+h}\quad(h=0,1,\cdots(g-\varrho)).$$

C'est un système d'équations linéaires en des quantités $V_{g\varrho 0}\, V_{g\varrho 1} \cdots V_{g,\varrho,g-\varrho}$. Posons pour abréger $(-)^j V_{g\varrho j} = U_j$, $(-)^h E_{2g,\varrho,\varrho+h} = C_h$. Le système prend la forme

(72 a) $\sum_{j=0}^{h} \binom{\varrho+j}{h-j} U_j = C_h \quad (h=0, 1, \cdots (g-\varrho))$. Ce système a certainement une solution puisque le déterminant est égal à $\binom{\varrho}{0}\binom{\varrho+1}{0}\cdots\binom{g}{0} = 1$.

Je dis que la solution est donnée par la formule

(72 b) $U_h = \sum_{i=0}^{h} (-)^i \frac{\varrho+h-i}{\varrho+h+i}\binom{\varrho+h+i}{i} C_{h-i} \quad (h=0, 1, \cdots (g-\varrho))$. Pour vérifier cette formule nous portons les valeurs de U_j tirées de (72 b) dans le premier membre de (72 a) ce qui donne $\sum_{j=0}^{h}\sum_{i=0}^{j}(-)^i \frac{\varrho+j-i}{\varrho+j+i}\binom{\varrho+j}{h-j}\binom{\varrho+j+i}{i} C_{j-i} =$

$$= \sum_{l=0}^{h} C_l \sum_{j=0}^{h-l}(-)^j \frac{\varrho+l}{\varrho+l+2j}\binom{\varrho+l+j}{h-l-j}\binom{\varrho+l+2j}{\varrho+l+j}.$$

Dans cette expression le coëfficient de C_h est égal à l'unité comme on le voit en faisant $l=h$ dans la somme

(72 c) $\sum_{j=0}^{h-l}(-)^j \frac{\varrho+l}{\varrho+l+2j}\binom{\varrho+l+j}{h-l-j}\binom{\varrho+l+2j}{\varrho+l+i}$. Il suffit donc de montrer que la somme (72 c) est nulle identiquement en ϱ, h et l, pourvu que l'on ait $0<\varrho$, $0 \leqq l < h$.[1] Posons $\varrho+l=m$ $h-l=n$; m et n sont donc, par définition des quantités essentiellement positives. La somme (72 c) se transforme en $(-)^n \frac{m}{n}\sum_{j=0}^{n}(-)^j\binom{n}{j}\binom{m+2n-2j-1}{n-1}$. Cette expression se réduit à[2] $(-)^n \frac{m}{n}\binom{n}{n+m}$. Puisque m et n sont des quantités positives, l'expression considérée est égale à zéro. La formule (72 b) est donc exacte. Nous avons par conséquence dans le cas $g \geqq 2\varrho$

$$V_{g\varrho k} = \frac{1}{\varrho+k}\sum_{j=\varrho}^{\varrho+k} j \binom{2\varrho+2k-j-1}{\varrho+k-1} E_{2g,\varrho,j}. \tag{73}$$

Dans le cas $2\varrho < g$ la transformation du premier membre de (71) sera $\sum_{t=\varrho}^{2\varrho}\sum_{j=0}^{t-\varrho} + \sum_{t=2\varrho+1}^{g}\sum_{j=0}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)} + \sum_{t=g+1}^{2g}\sum_{j=t-g}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)}$. Dans la seconde de ces sommes doubles nous avons toujours $2\varrho+1 \leqq t$ c'est-à-dire $\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right) < t-\varrho$. Par conséquence si nous remplaçons la limite supérieure $\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)$ par $(t-\varrho)$, la sommation sera

[1] Le cas $h=0$ est compris dans le cas $h=l$.

[2] Voir par exemple NETTO l. c. p. 255. Formule (28 a).

étendue au delà de $j = \mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)$. Cependant les nouveaux termes introduits pour $\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right) < j$ sont tous nuls à cause du coëfficient binomial $\binom{t-j}{j}$ qui s'évanouit. Nous pouvons donc remplacer la limite supérieure $\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)$ par $(t-\varrho)$ sans changer la valeur de la somme considérée, ce qui donne $\sum_{t=\varrho}^{g} \sum_{j=0}^{t-\varrho} + \sum_{t=g+1}^{2g} \sum_{j=t-g}^{\mathrm{Ent}\left(\frac{t}{2}\right)}$. Nous sommes ainsi ramenés au même système linéaire que dans le cas $g \gtreqless 2\varrho$. Par conséquence la formule (73) est exacte dans tous les cas.

L'expression indépendante des coëfficients W peut être obtenue à l'aide de l'équation (65 b). C'est une équation aux différences, linéaire et de premier ordre par rapport à W, V étant une quantité connue par la formule (73). L'équation (65 b) est sans peine intégrée sous la forme explicite

$$W_{g\varrho k} = \sum_{i=0}^{g-1} (\varrho + k - i)(2g)^{[i]} V_{g-i, \varrho-i, k}. \tag{74}$$

§ 5. Expressions asymptotiques.

Le tableau 3 fait connaître la valeur numérique des coëfficients V et W pour les moments jusqu'à l'ordre 13. A l'aide des formules récurrentes et des formules de contrôle du § 4 on peut théoriquement poursuivre le calcul jusqu'à un ordre quelconque. De même les formules indépendantes du même paragraphe permettent théoriquement de calculer le terme général du moment d'un ordre quelconque. La quantité de travail que comporte le calcul augmente pourtant sensiblement au fur et à mésure que l'ordre du moment considére devient plus elevé. On est donc amené à considérer des expressions asymptotiques. Puisque s est par définition un «très grand nombre» les approximations successives les plus intéressantes sont celles que l'on obtient en ne conservant que les puissances les plus elevées de s, c'est-à-dire le termes contenant μ^g, μ^{g-1}, $\cdots$ etc. ($\mu = sr = spq$).

Deux problèmes se posent au sujet de ces approximations. Le premier est de trouver une expression des coëfficients de $\mu^{g-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \cdots$). Le second est d'évaluer l'erreur commise en interrompant le développement avec le terme ν-ième. La solution de ce dernier problème sera d'une très grande importance pour les applications. Avant de l'attaquer il sera évidemment nécessaire d'étudier les coëfficients du développement.

En principe on peut dire que les coëfficients sont déjà connus par les formules (63 b), (73) et (74). Pourtant ces formules impliquent une opération dont l'ordre augmente avec g. Notre problème revient donc à rechercher s'il n'est pas possible d'exprimes les coëfficients $V_{g, g-\nu, k}$ et $W_{g, g-\nu, k}$ ($\nu = 0, 1, 2 \cdots$)

en fonction plus simple de g. Dans le mémoire déjà cité[1] TSCHUPROW a donné l'expression des coefficients des trois premiers termes, c'est-à-dire les coëfficients de μ^g, μ^{g-1} et μ^{g-2}. La forme des coëfficients est le produit d'une factorielle par un polynome en g. Dans le parapraphe présent je vais considérer ce problème sous un point de vue plus général.

Les coëfficients de $\mu^{g-\nu}$ dans les devéloppements

$$\mu_{2g} = \sum_{\nu=0}^{g-1} V_{g,g-\nu}\,\mu^{g-\nu},\ \frac{\mu_{2g+1}}{q-p} = \sum_{\nu=0}^{g-1} W_{g,g-\nu}\,\mu^{g-\nu} \text{ sont des polynomes en } r=pq$$

$$V_{g,g-\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} V_{g,g-\nu,k}\,r^k \qquad W_{g,g-\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} W_{g,g-\nu,k}\,r^k.$$

Posons $V_{g,g-\nu} = 1.3.\cdots(2g-1)\,\overline{V}_{g\nu}$ $\qquad W_{g,g-\nu} = 1.3.\cdots(2g+1)\,\overline{W}_{g\nu}$.

Nous allons démontrer que l'on peut former les polynomes $\overline{V}_{g\nu}$ et $\overline{W}_{g\nu}$ de proche en proche par l'algorithme suivant:

(I). $\overline{V}_{g0} = 1$.

(II). Dans le polynome en g: $\varphi_{g\nu} = (g-\nu)\,\overline{V}_{g\nu} + r\,\frac{d}{dr}\,\overline{V}_{g\nu}$ ordonné suivant les factorielles de g on divise le coëfficient de $g^{[m]}$ par $(2m+1)$. Le polynome qui en resulte est $\overline{W}_{g\nu}$.

(III). Dans le polynome en g

$\psi_{g\nu} = \{g(1-4r) - (\nu-(4\nu-2)r)\}\,\overline{W}_{g\nu} + r(1-4r)\,\frac{d}{dr}\,\overline{W}_{g\nu}$ ordonné suivant les factorielles de g, on augmente tous les exposants factoriels de l'unité, c'est-à-dire on remplacé $g^{[m]}$ par $g^{[m+1]}$. On divise ensuite le coëfficient de $g^{[m+1]}$ par $(m+1)$. Le polynome qui en résulte est $\overline{V}_{g,\nu+1}$.

Ainsi on a par exemple $\varphi_{g0} = g$, donc $\overline{W}_{g0} = \frac{g}{3}$;

$$\psi_{g0} = \{g(1-4r) - 2r\}\,\frac{g}{3} = \frac{1-4r}{3}\,g^{[2]} + \frac{1-6r}{3}\,g^{[1]},$$

donc
$$\overline{V}_{g1} = \frac{1-4r}{3^2}\,g^{[3]} + \frac{1-6r}{2.3}\,g^{[2]};$$

$$\varphi_{g1} = \frac{1-4r}{3^2}\,g^{[4]} + \frac{7(1-6r)}{2.3^2}\,g^{[3]} + \frac{1-12r}{2.3}\,g^{[2]},$$

donc
$$\overline{W}_{g1} = \frac{1-4r}{3^4}\,g^{[4]} + \frac{1-6r}{2.3^2}\,g^{[3]} + \frac{1-12r}{2.3.5}\,g^{[2]}, \text{ etc.}$$

Pour démontrer l'algorithme ci-dessus nous partons des égalités

$$\overline{V}_{g\nu} - \overline{V}_{g-1,\nu} = \psi_{g-1,\nu-1}, \tag{75 a}$$

$$(2g+1)\,\overline{W}_{g\nu} - 2g\,\overline{W}_{g-1,\nu} = \varphi_{g\nu}, \qquad \overline{V}_{\nu\nu} = \overline{W}_{\nu\nu} = 0. \tag{75 b}$$

[1] Biometrika Vol. XII p. 198. Formules (12) et (13).

On obtient ces formules en portant les développements de μ_{2g} respectivement de μ_{2g+1} suivant les polynomes V et W dans la formule de Bohlmann-Romanovsky, et en égalisant les coëfficients d'une même puissance de μ.

L'intégrale de l'équation aux différences (75 a) est $\overline{V}_{g,\nu+1} = \sum_{i=\nu+1}^{g-1} \psi_{i\nu}$, $\overline{V}_{g,\nu+1}$ n'est donc autre chose que la somme de $\psi_{i\nu}$. On en conclut que $\overline{V}_{g,\nu+1}$ est de la forme prévue dans l'énoncé. L'intégrale de l'équation (75 b) est $W_{g\nu} = \dfrac{1}{2g+1} \sum_{i=0}^{g-\nu-1} \left(\dfrac{g}{g-\frac{1}{2}}\right)^{[i]} \varphi_{g-i,\nu}$. Si l'on suppose $\varphi_{g\nu}$ ordonnée suivant les factorielles de g, on peut appliquer la formule sommatoire du § 3. Nous sommes dans le cas particulier de la formule (41 b) puisque $\varphi_{g-i,\nu}$ (comme $\psi_{i\nu}$) ne contient jamais de factorielle à exposant inférieur à $\nu+1$, ce que l'on vérifie par exemple par une conclusion de ν à $(\nu+1)$. Appliquant la formule (41 b) nous voyons que le seul effet de l'opération $\sum_{i=0}^{g-\nu-1} \left(\dfrac{g}{g-\frac{1}{2}}\right)^{[i]}$ sur le terme $(g-i)^{[m]}$ du développement de $\varphi_{g-i,\nu}$ est que le terme est multiplié par $\dfrac{2g+1}{2m+1}$. L'algorithme est donc établi.

Pour le calcul effectif des termes d'ordre supérieur il sera avantageux de mettre $\overline{V}_{g\nu}$ et $\overline{W}_{g\nu}$ sous les formes

(76 a) $$\overline{V}_{g\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{2\nu-1} (-)^k \overline{A}_{\nu ki} r^k g^{[\nu+i+1]} \quad (\nu = 1, 2, \cdots (g-1)).$$

(76 b) $$\overline{W}_{g\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{2\nu} (-)^k \overline{B}_{\nu ki} r^k g^{[\nu+i+1]} \quad (\nu = 0, 1, \cdots (g-1)).$$

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignant des coëfficients numériques ne dépendant pas de g et r. L'existence des développements tels que (76 a) et (76 b) est facilement démontrée par une conclusion de ν à $(\nu+1)$ en tenant compte de l'algorithme que nous venons d'établir. Portant les développements (76 a) et (76 b) soit dans l'algorithme ci-dessus soit dans la formule de Bohlmann-Romanovsky, en obtient pour les coëfficients $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les formules récurrentes

(77 a) $$(2\nu+2i+3)\overline{B}_{\nu ki} = (k+i+1)\overline{A}_{\nu ki} + \overline{A}_{\nu,k,i-1}$$
$$\begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \cdots (g-1) \\ k = 0, 1, \cdots \nu \\ i = 0, 1, \cdots 2\nu \end{pmatrix} \quad \overline{A}_{00,-1} = 1$$

(77 b) $$(\nu+i+1)\overline{A}_{\nu ki} = (k+i+1)\overline{B}_{\nu-1,k,i} + \overline{B}_{\nu-1,k,i-1} + $$
$$+ (4i+4k+2)\overline{B}_{\nu-1,k-1,i} + 4\overline{B}_{\nu-1,k-1,i-1}$$
$$\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \cdots (g-1) \\ k = 0, 1, \cdots \nu \\ i = 0, 1, \cdots (2\nu-1) \end{pmatrix}$$

Pour éviter les fractions dans le calcul numérique il est commode de poser

$$A_{\nu ki}=(i+\nu+1)!\ 1.3.\cdots(2i+2\nu+1)\overline{A}_{\nu ki}$$

$$B_{\nu ki}=(i+\nu+1)!\ 1.3.\cdots(2i+2\nu+3)\overline{B}_{\nu ki}$$

et de calculer A et B par les formules

$$B_{\nu ki}=(k+i+1)A_{\nu ki}+(i+\nu+1)(2i+2\nu+1)A_{\nu,k,i-1}$$

$$A_{\nu ki}=(k+i+1)B_{\nu-1,k,i}+(4i+4k+2)B_{\nu-1,k-1,i}+$$
$$+(i+\nu)(2i+2\nu+1)(B_{\nu-1,k,i-1}+4B_{\nu-1,k-1,i-1})$$

pour revenir ensuite aux coëfficients $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Dans le tableau 4 on trouvera la valeur des coëfficients $\overline{A}$ et $\overline{B}$ qui interviennent dans le développement du moment μ_{2g} et μ_{2g+1} d'un ordre quelconque, le développément étant poussé jusqu'à la troisième approximation.

Comme dans le tableau 3 j'ai indiqué dans les en-têtes non seulement la valeur des indices $\nu k i$ de $\overline{A}$ et $\overline{B}$ mais aussi les quantités $\mu^{g-\nu}$, r^k et $g^{[\nu+i+1]}(\mu=sr=spq)$, auxquelles les nombres $\overline{A}$ et $\overline{B}$ appartiennent comme coëfficients. Cette disposition permet d'utiliser le tableau sans tenir compte de la signification des indices. Ainsi par exemple le tableau donne immédiatement pour μ_{2g} le développement jusqu'à la deuxième approximation

$$\frac{\mu_{2g}}{1.3\cdots(2g-1)}=\mu^g+\mu^{g-1}\left\{\frac{g^{[2]}}{6}+\frac{g^{[3]}}{9}-r\left(g^{[2]}+\frac{4}{9}g^{[3]}\right)\right\}+\cdots$$

§ 6. Les moments incomplets de la distribution binomiale.

Les moments (moyens) incomplets de la distribution binomiale sont définis

$$\mu_h=\sum_{\nu=t}^{s}(\nu-sp)^h P_\nu=\sum_{\nu=t}^{s}(\nu-sp)^h\binom{s}{\nu}p^\nu q^{s-\nu} \tag{78}$$

où la limite inférieure de sommation est un quelconque des nombres $1, 2\cdots s$. Au besoin on peut employer la notation ${}_t\mu_h$ pour mettre en évidence la valeur t de la limite inférieure.

Le problème d'obtenir une expression exacte pour ces moments est évidemment beaucoup plus complexe que le problème dont nous nous sommes occupés dans les paragraphes précédents. Aussi les résultats obtenus relativement à ces moments sont-ils loin d'être complets. Si l'on se borne à considérer des expressions algébriques on ne connaît actuellement que l'expression d'un seul moment incomplet, c'est l'expression du moment d'ordre un, que j'ai donnée dans un article précédent[1]

$$\mu_1=\sum_{\nu=t}^{s}(\nu-sp)P_\nu=tqP_t=tq\binom{s}{t}p^t q^{s-t}. \tag{79}$$

[1] Skandinavisk Aktuarietidskrift 7 (1924), p. 161. Lemme 1.

Tableau 4.

$\bar{A}_{\nu ki}$ et $\bar{B}_{\nu ki}$				Première approx.	Deuxième approx.		Troisième approx.		
				$\nu=0$	$\nu=1$		$\nu=2$		
				$k=0$	$k=0$	1	$k=0$	1	2
				μ^g	μ^{g-1}	$-\mu^{g-1}r$	μ^{g-2}	$-\mu^{g-2}r$	$\mu^{g-2}r^2$
$\bar{A}_{\nu ki}$	$\frac{\mu_{2g}}{1.3\cdots(2g-1)}$	$i=-1$	$g^{[\nu]}$	1	.	.	.	.	.
		0	$g^{[\nu+1]}$	.	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
		1	$g^{[\nu+2]}$	.	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{13}{360}$	$\frac{47}{90}$	$\frac{47}{30}$
		2	$g^{[\nu+3]}$	.	.	.	$\frac{1}{54}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{9}$
		3	$g^{[\nu+4]}$	.	.	.	$\frac{1}{486}$	$\frac{4}{243}$	$\frac{8}{243}$
		4	$g^{[\nu+5]}$	.	.	.	.	.	.
		5	$g^{[\nu+6]}$	.	.	.	.	.	.
$\bar{B}_{\nu ki}$	$\frac{\mu_{2g+1}}{(q-p)\,1.3\cdots(2g+1)}$	$i=0$	$g^{[\nu+1]}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{630}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{7}$
		1	$g^{[\nu+2]}$	.	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{19}{90}$	$\frac{38}{45}$
		2	$g^{[\nu+3]}$	.	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{31}{270}$	$\frac{31}{90}$
		3	$g^{[\nu+4]}$	.	.	.	$\frac{1}{486}$	$\frac{5}{243}$	$\frac{4}{81}$
		4	$g^{[\nu+5]}$	.	.	.	$\frac{1}{7\,290}$	$\frac{4}{3\,645}$	$\frac{8}{3\,645}$
		5	$g^{[\nu+6]}$	.	.	.	.	.	.
		6	$g^{[\nu+7]}$	.	.	.	.	.	.

Si l'on envisage des expressions plus complexes, on connait aussi une expression du moment incomplet d'ordre zéro, C'est une expression sous forme d'une intégrale.

M. PEARSON a obtenu la formule[1]

$$\mu_0 = \sum_{\nu=t}^{s} P_\nu = t\binom{s}{t}\int_0^p x^{t-1}(1-x)^{s-t}\,dx \qquad (0<t). \tag{80}$$

C'est là un résultat des plus importants. Cette formule permet d'exprimer μ_0 par la fonction B-incomplète

$$B_p(s,t) = \int_0^p x^{t-1}(1-x)^{s-1}\,dx.$$

En effet on a d'après la définition même de B_p

$$\mu_0 = t\binom{s}{t}B_p(s-t+1,\,t).$$

Pour démontrer la formule de M. PEARSON on peut procéder de différentes manières. M. CAMP[2] obtient la formule par une intégration partielle de $B_p(s,t)$. La méthode la plus simple paraît être d'intégrer la formule (86) ci-après, formule que l'on obtient en utilisant l'expression (79) du moment incomplet d'ordre un.

La valeur numérique de ${}_t\mu_0$ étant calculée par exemple par une évaluation numérique de l'intégrale (80)[3], la valeur numérique des moments incomplets d'ordre supérieur s'en déduit à l'aide de la formule récurrente

$$\mu_h = tq\,(t-sp)^{h-1}\binom{s}{t}p^t q^{s-t} + spq\sum_{i=0}^{h-2}\binom{h-1}{i}\mu_i - p\sum_{i=0}^{h-1}\binom{h-1}{i-1}\mu_i \tag{81}$$

formule que j'ai donnée dans l'article de Biometrika déjà cité.

Ainsi on a par exemple

$$\mu_1 = tq\binom{s}{t}p^t q^{s-t}$$

$$\mu_2 = tq\binom{s}{t}p^t q^{s-t}\,(t-(s+1)\,p) + spq\,\mu_0$$

$$\mu_3 = tq\binom{s}{t}p^t q^{s-t}\left\{(t-(s+1)\,p)^2 + pq\,(2\,s-1)\right\} + spq\,(q-p)\,\mu_0$$

etc.

---

[1] La formule était déjà connue par LAPLACE. On la trouve (avec une notation un peu différente) dans ces Œuvres, Tome 7ième, p. 153.

[2] Biometrika, Vol. XV (1924), M. CAMP envisage le moment incomplet défini comme $\sum_{\nu=0}^{t} P_\nu$ c'est-à-dire avec la limite supérieure comme variable. Puisque $\sum_{\nu=0}^{s} P_\nu = 1$ la différence entre les deux définitions n'a qu'une signification formelle.

[3] CAMP, l. c. Voir aussi SOPER: The Numerical Evaluation of the Incomplete B-Function. Tracts for Computers. No. VII (London 1921). Edited by KARL PEARSON.

Si l'on arrive à exprimer μ_0 comme fonction simple de s et p, la formule (81) permettra évidemment de déduire les expressions indépendantes des moments d'ordre supérieur. Ces expressions peuvent du reste aussi être déduites de la formule de BOHLMANN-ROMANOVSKY

$$\mu_h = pq\left((h-1)\, s\, \mu_{h-2} + \frac{d}{dp}\mu_{h-1}\right).$$

Il n'est pas difficile de montrer que cette formule est exacte aussi dans le cas des moments incomplets.[1]

Tout le problème d'obtenir des expressions pour les moments incomplets revient donc à obtenir une expression simple de μ_0. C'est là un problème d'un très grand intérêt non seulement relativement à la question particulière qui nous occupe ici, en un certain sens il peut être caractérisé comme le problème fondamental du calcul des probabilités. En effet, considérons le problème classique suivant: on fait une série de s épreuves indépendantes et à probabilité constante p. Quelle est la probabilité pour que l'évènement, dont la probabilité est p, se produise un nombre de fois compris entre t_1 et t_2? Si l'on connaissait l'expression de ${}_t\mu_0$, on saurait donner la solution exacte de ce problème. On ne serait plus dans la nécessité d'avoir recours à la valeur asymptotique de cette probabilité exprimée à l'aide de la fonction $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi$. Ces considérations montrent en même temps l'importance et la difficulté de notre problème.

On se rend facilement compte qu'il n'est pas possible de trouver une expression de μ_0 tout à fait analogue à l'expression (79) de μ_1. En effet, d'après la définition μ_1 est un polynome en p de degré $(s+1)$. Ce polynome admet pour seuls zéros les points $p=0$ (de multiplicité t) et $p=1$ (de multiplicité $(s-t+1)$). C'est ce qui explique que l'on peut donner à μ_1 l'expression simple (79). D'après la définition μ_0 est aussi un polynome en p (de degré s), mais les zéros de ce polynome sont loin d'être aussi simples que les zéros de μ_1.

En effet considérons le polynome $M_{nh}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{h+j}{j} x^j$ (h un entier non négatif). Le polynome M_{nh} est le polynome que l'on obtient en interrompant le développement $\frac{1}{(1-x)^{h+1}} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \binom{h+j}{j} x^j$ au terme contenant x^n.

Le polynome $(1-x)^{h+1}$ n'ayant que des zéros réels, si n est un nombre pair $n=2g$, le polynome $M_{nh} = M_{2g,h}$ a tous ses zéros complexes d'après un théorème connu[2].

Pour nous rendre compte de la nature des zéros dans le cas où n est un nombre impair $n=2g+1$ nous faisons remarquer que l'on a toujours

---

[1] Biometrika, XVII (1925), p. 170.

[2] PÓLYA et SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Vol. II, p. 45. No. 50.

$$\frac{d}{dx} M_{nh}(x) = M'_{nh}(x) = (h+1) \sum_{j=1}^{n} \binom{h+j}{j-1} x^{j-1} = (h+1) M_{n-1,h+1},$$

d'où pour $n=2g+1$ $M'_{2g+1,h}(x) = (h+1) M_{2g,h+1}(x)$.

Puisque nous venons de démontrer que $M_{2g,h+1}$ a tous ses zéros (au nombre de $2g$) complexes, $M'_{2g+1,h}$ a également tous ses zéros (au nombre de $2g$) complexes. Mais alors le polynome $M_{2g+1,h}$ a au moins $2g$ zéros complexes[1]. Il ne peut en avoir davantage puisque tous ses coëfficients sont réels. C'est-à-dire le $(2g+1)$-ième zéro de $M_{2g+1,h}$ est nécessairement réel. Nous pouvons par conséquence formuler la proposition.

Le polynome $M_{nh} = \sum_{j=0}^{n} \binom{h+j}{j} x^j$ (h un entier non négatif quelconque) *a n ou $(n-1)$ zéros complexes suivant que n est pair ou impair.*

Posons $\mu_0 = R_{st} = R_{st}(p) = \sum_{\nu=t}^{s} \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$. Alors on a $R_{st} = p^t M_{s-t,t-1}(q)$.

Nous voyons donc que si $(s-t)$ est un nombre pair, R_{st} a t zéros réels (à savoir le point $p=0$ de multiplicité t) et $(s-t)$ zéros complexes. Si $(s-t)$ est un nombre impair, R_{st} a $(t+1)$ zéros réels (dont le point $p=0$ de multiplicité t) et $(s-t-1)$ zéros complexes.

Cela n'empêche évidemment que l'on ne puisse exprimer R_{st} comme un produit de facteurs réels, mais quelques-uns de ces facteurs seront alors quadratiques. Une telle expression sera du reste moins intéressante à cause des irrationnelles qu'il faudrait faire intervenir. Il sera plus intéressant de rechercher s'il n'était pas possible d'exprimer R_{st} par exemple comme la somme d'un petit nombre de termes dont chacun était le produit de facteurs linéaires ou quadratiques en p à coëfficients rationnels. Un tel résultat serait d'un haut intérêt, non seulement au point de vue théorique mais aussi au point de vue des applications. Je me permets de donner quelques formules et relations qui pourront peut-être servir à attaquer ce problème.

Posons $P_{st} = P_{st}(p) = \binom{s}{t} p^t q^{s-t}$, d'où (82) $R_{st} = \sum_{i=t}^{s} P_{si}$.

Par définition R_{st} est donc la somme de P_{st}, la sommation étant étendue au second indice t. Je vais démontrer que R_{st} peut-être exprimé comme la somme de P_{st}, la sommation étant étendue au premier indice s.

De la définition de P_{st} nous tirons immédiatement $P_{st} = q\,P_{s-1,t} + p\,P_{s-1,t-1}$, donc $P_{st} - P_{s-1,t-1} = q\,(P_{s-1,t} - P_{s-1,t-1})$. Etendant la sommation $\sum_{t=t}^{s}$ aux deux membres, il vient

(83 a) $$R_{st} - R_{s-1,t-1} = -q\,P_{s-1,t-1}, \text{ c'est-à-dire}$$
(83 b) $$R_{st} - R_{s-1,t} = p\,P_{s-1,t-1}.$$

[1] Pólya et Szegö l. c. p. 45. No. 53.

Introduisant dans cette formule $(t+1)$ au lieu de t et étendant la sommation $\sum\limits_{s=t+1}^{s+1}$ aux deux membres, il vient

$$R_{s+1,\,t+1} = p \sum_{i=t}^{s} P_{it}. \tag{84}$$

C'est la formule cherchée.

Multipliant (83 a) par p et (83 b) par q, et additionnant nous aurons encore (85) $R_{st} = q\, R_{s-1,t} + p\, R_{s-1,t-1}$.

Cette équation n'est qu'une autre forme de l'équation aux différences qui intervient dans le problème des partis[1]. La solution de ce problème est comme on le sait justement donnée par la somme $R_{st} = \sum\limits_{i=t}^{s} P_{si}$.

Dérivant l'expression qui définit R_{st} par rapport à p il vient

$$R'_{st} = \frac{1}{pq} \sum_{\nu=t}^{s} (\nu - sp)\, P_{s\nu}.$$

En vertu de (79) cette expression se réduit à

$$R'_{st} = t \binom{s}{t} p^{t-1} q^{s-t} = \frac{\mu_1}{pq}. \tag{86}$$

Intégrant cette formule entre les limites 0 et p nous aurons dans le cas $0 < t$ la formule de M. Pearson.

La fonction génératrice des quantités R_{st} peut être mise sous les formes

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{px}{1-qx}\right)^t = \sum_{s=0}^{\infty} R_{st}\, x^s \qquad |qx| < 1 \tag{87 a}$$

$$\frac{1 - y\,(q+py)^s}{1-y} = \sum_{t=0}^{s} R_{st}\, y^t \qquad (y \text{ quelconque}) \tag{87 b}$$

$$R_{00} = 1$$

$$\frac{1-qx}{(1-x)\,(1-pxy-qx)} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{s} R_{st}\, x^s y^t \qquad |x| < 1, \quad |x\,(q+py)| < 1 \tag{87 c}$$

On démontre (87 a) facilement par une conclusion de t à $(t+1)$. En effet la formule est exacte pour $t=0$ puisque $R_{s0} = 1$, et pour $(t+1)$ on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} R_{s,\,t+1}\, x^s = \sum_{s=0}^{\infty} R_{st}\, x^s - \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s}{t} p^t q^{s-t} x^s = \frac{1}{1-x}\left(\frac{px}{1-qx}\right)^t - \left(\frac{p}{q}\right)^t \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s}{t} (qx)^s.$$

Puisque $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \binom{s}{t} \xi^s = \frac{1}{1-\xi}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^t$, $(|\xi| < 1)$ cette expression se réduit à

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{px}{1-qx}\right)^{t+1}.$$

[1] Voir par exemple Bachelier: Calcul des probabilités p. 40. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung. I, p. 127.

La formule (87 b) peut être vérifiée en remarquant que l'on a d'une part
$$\sum_{i=0}^{s-1} (q+py)^i = \frac{1-(q+py)^s}{p\,(1-y)},$$
et d'autre part
$$py \sum_{i=0}^{s-1} (q+py)^i = py \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{t=0}^{i} \binom{i}{t} (py)^t q^{i-t} = \sum_{t=1}^{s} y^t p \sum_{i=t-1}^{s-1} P_{i,t-1} = \sum_{t=1}^{s} R_{st}\, y^t$$
en vertu de (84).

Enfin quand à la formule (87 c) on a
$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{s} R_{st}\, x^s y^t = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \sum_{t=0}^{s} R_{st} y^t = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \frac{1-y\,(q+py)^s}{1-y} =$$
$$= \frac{1}{1-y}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{y}{1-x\,(q+py)}\right] = \frac{1-qx}{(1-x)\,(1-pxy-qx)}.$$

La formule (87 b) peut s'écrire $(q+py)^s-1 = \sum_{t=1}^{s} R_{st}(y^t-y^{t-1})$. Si cette équation est dérivée k fois par rapport à y, nous aurons le système de formules récurrentes
$$\binom{s}{k} p^k (q+py)^{s-k} = \sum_{t=k}^{s} \left(y\binom{t}{k} - \binom{t-1}{k}\right) R_{st}\, y^{t-k-1}\,,$$
où y désigne une quantité quelconque et k un entier positif quelconque. Pour $y=1$ il vient par exemple
$$\binom{s}{k} p^k = \sum_{t=k}^{s} \binom{t-1}{k-1} R_{st} \quad (k \text{ un entier positif quelconque}).$$
Formule que l'on peut aussi obtenir en intégrant l'expression du moment factoriel complet, utilisant (86). D'une façon plus générale on a
$$\sum_{h=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{h} \binom{s}{k+h} p^{k+h} = \sum_{t=k}^{s} \binom{t+\alpha}{k+\alpha} R_{st} \quad (\alpha=-1,\, 0,\, 1 \cdots)$$
ce que l'on vérifie sans peine par une conclusion de α à $(\alpha+1)$.

Par une sommation par parties du second membre de l'équation qui définit μ_1 nous trouvons encore
$$qt\, P_{st} = (t-sp)\, R_{st} + \sum_{k=t+1}^{s} R_{sk}\,.$$

A l'aide des expressions de la fonction génératrice on peut exprimer de différentes façon R_{st} comme le résultat d'une dérivation.

La formule (87 b) donne par exemple
$$R_{st} = \frac{1}{t!}\left(\frac{d^t U}{dy^t}\right)_{y=0} \qquad \text{où } U = \frac{1-y\,(q+py)^s}{1-y}.$$

Posant $z=q+py$, nous avons $U=(z-q)\,\dfrac{z^s-1}{z-1}+1$,

donc
$$\left(\frac{d^t U}{dy^t}\right)_{y=0} = p^t \left(\frac{d^t U}{dz^t}\right)_{z=q} = p^t \left\{(z-q)\frac{d^t}{dz^t}\left(\frac{z^s-1}{z-1}\right) + \binom{t}{1} \frac{d^{t-1}}{dz^{t-1}}\left(\frac{z^s-1}{z-1}\right)\right\}_{z=q} =$$
$$= tp^t \left(\frac{d^{t-1}}{dz^{t-1}} \cdot \frac{z^s-1}{z-1}\right)_{z=q} \qquad \text{c'est-à-dire } R_{st} = \frac{p^t}{(t-1)!} \cdot \frac{d^{t-1}}{dq^{t-1}}\left(\frac{1-q^s}{1-q}\right) \quad (0<t).$$

Dérivant cette équation par rapport à q nous retrouvons la formule (86).

Il est assez intéressant de noter que R_{st} qui par définition est la somme incomplète de $\binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$ peut être exprimée comme la somme *complète* de $(-)^\nu \frac{1}{t+\nu}\binom{s-t}{\nu} p^\nu$.

En effet, D désignant une dérivation par rapport à p nous avons en vertu de (86) pour $\nu > 0$

$$D^\nu R_{st} = D^{\nu-1}\, t\binom{s}{t} p^{t-1} q^{s-t} =$$

$$= t\binom{s}{t}\sum_{j=0}^{\nu-1}(-)^{\nu-j-1}\binom{\nu-1}{j}(t-1)^{[j]}(s-t)^{[\nu-j-1]} p^{t-j-1} q^{s-t-\nu+j+1}$$

donc $$\frac{(D^\nu R_{st})_{p=0}}{\nu!} = (-)^{\nu-t}\, t\binom{s}{t}\frac{1}{\nu}\binom{s-t}{\nu-t}, \quad (\nu > 0) \quad \text{c'est-à-dire}$$

(88 a) $$R_{st} = t\binom{s}{t} p^t \sum_{\nu=0}^{s-t}(-)^\nu \frac{1}{\nu+t}\binom{s-t}{\nu} p^\nu \quad (0 \leqq t).$$

Corollaire. De la formule (88 a) on peut tirer la formule sommatoire suivante pour le quotient de deux coëfficients binomiaux

$$\sum_{\nu=0}(-)^\nu \frac{\binom{a}{\nu}}{\binom{b+\nu}{c}} = \frac{c}{a+c}\,\frac{1}{\binom{a+b}{b-c}}$$

a, b, c étant des entiers quelconques

$$a = 1, 2, \cdots, \quad c = 0, 1, \cdots, \quad b = c, c+1, \cdots$$

et la sommation devant être étendue jusqu'au dernier terme qui ne s'évanouit pas. En effet de (88 a) on tire d'abord pour $p = 1$

$$\sum_{\nu=0}^{s-t}(-)^\nu \frac{\binom{s-t}{\nu}}{\nu+t} = \frac{1}{t\binom{s}{t}} = \frac{1}{(s-t+1)\binom{s}{t-1}}$$

d'où pour $s-t=a$, $t=b$

$$\sum_{\nu=0}(-)^\nu \frac{\binom{a}{\nu}}{b+\nu} = \frac{1}{(a+1)\binom{a+b}{b-1}} = \frac{1}{b\binom{a+b}{b}}.$$

C'est la formule considérée pour $c=1$.

D'autre part supposant que la formule soit exacte pour c, nous trouvons par une sommation par parties

$$\sum_{\nu=0}(-)^\nu \frac{\binom{a}{\nu}}{\binom{b+\nu}{c}} = -\sum_{\nu=0}\left\{\frac{1}{\binom{b+\nu+1}{c}} - \frac{1}{\binom{b+\nu}{c}}\right\}(-)^\nu\binom{a-1}{\nu} = \frac{c}{c+1}\sum_{\nu=0}(-)^\nu \frac{\binom{a-1}{\nu}}{\binom{b+1+\nu}{c+1}}$$

d'où pour $(a+1)$ et $(b-1)$

$$\sum_{\nu=0} (-)^\nu \frac{\binom{a}{\nu}}{\binom{b+\nu}{c+1}} = \frac{c+1}{c} \sum_{\nu=0} (-)^\nu \frac{\binom{a+1}{\nu}}{\binom{b-1+\nu}{c}} = \frac{c+1}{a+(c+1)} \cdot \frac{1}{\binom{a+b}{b-(c+1)}}.$$

La formule est donc générale.

La formule que l'on vient de démontrer permet encore d'exprimer R_{st} comme une autre somme complète.

On a d'abord en vertu de (88a)

$$R_{st} = t \binom{s}{t} p^t \sum_{j=0} (-)^j \frac{1}{(t+j)\, j\,!} (s-t)^{[j]} p^j .$$

Puisque, en vertu de (53a)

$$(s-t)^{[j]} p^{[j]} = \sum_{\nu=0}^{s-t} \nu^{[j]} \binom{s-t}{\nu} p^\nu q^{s-t-\nu},$$

on trouve $$R_{st} = t \binom{s}{t} p^t \cdot \sum_{\nu=0}^{s-t} \binom{s-t}{\nu} p^\nu q^{s-t-\nu} \sum_{j=0} (-)^j \frac{\binom{\nu}{j}}{t+j}$$

d'où $$R_{st} = \binom{s}{t} p^t \sum_{\nu=0}^{s-t} \frac{\binom{s-t}{\nu}}{\binom{\nu+t}{t}} p^\nu q^{s-t-\nu} = P_{st} \sum_{\nu=0}^{s-t} \frac{(s-t)^{[\nu]}}{(t+\nu)^{[\nu]}} \left(\frac{p}{q}\right)^\nu$$

c'est-à-dire $$P_{st} = m_{[t]}\, \overline{m}_{[-t]}$$

$m_{[h]}$ et $\overline{m}_{[h]}$ désignant respectivement les moments factoriels complets de la distribution binomiale où le nombre de tirages dans la série est s et $(s-t)$. Cette formule peut du reste aussi être obtenue directement par une simple transformation de l'expression de définition de R_{st}.

Le problème de trouver une expression pour le moment *incomplet* d'ordre zéro (que l'on peut toujours considérer comme un moment factoriel) est donc équivalent au problème de trouver une expression pour le moment factoriel *complet* d'un ordre négatif.

Avant de terminer l'étude du moment incomplet nous indiquons brièvement quelque developpements qui dans certains cas, par exemple si p (ou q) est petit, peuvent servir d'expressions asymptotiques. Il paraît qu'il est très difficile de trouver un développement pour R_{st} qui peut servir d'expression asymptotique pour toute valeur de p. Le très intéressant développement de M. JORDAN[1] est par exemple sujet à la restriction que p doit être petit.

Je me suis efforcé d'obtenir une expression asymptotique générale sans toutefois être arrivé à des résultats définitifs. Je me borne à signaler les développements que voici:

[1] Comptes Rendus, Paris, Séance du 1er février 1926.

Dans le cas $t > \frac{s}{2}$ on peut développer $\frac{1}{t+\nu}$ dans (88a) suivant les puissances de ν, ce qui conduit à l'expression

$$R_{st} = \binom{s}{t} p^t q^{s-t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{1}{t^n} \sum_{k=0}^{n} (-)^k \binom{n}{k} B_{n-k}^{(-k)} (s-t)^{[k]} \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

Si l'on développe $\frac{1}{t+\nu}$ en série de facultés, c'est-à-dire suivant les factorielles négatives $\nu^{[-i]}$ on trouve

$$R_{st} = -\binom{s}{t} p^t \sum_{i=1}^{t} t^{[i]} (s-t)^{[-i]} p^{-i} \sum_{\nu=i}^{s-t+i} (-)^\nu \binom{s-t+i}{\nu} p^\nu.$$

Si l'on transforme (88a) par une sommation par parties répétée utilisant la formule suivante (K entier, $0 \gtreqless K < n$).

$$\sum_{i=0}^{n} u_i v_i = \sum_{k=0}^{K} (-)^k \Delta^k u_{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-i}{k} v_i + (-)^{K+1} \sum_{i=0}^{n-(K+1)} \Delta^{K+1} u_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i+K-j}{K} v_j$$

on trouve
$$R_{st} = \binom{s-1}{t-1} p^t q^{s-t} \sum_{k=0}^{s-t} \frac{(s-t)^{[k]}}{(s-1)^{[k]} q^k},$$

formule que l'on peut du reste aussi déduire à l'aide de (84).

Enfin puisque nous connaissons la valeur du polynome $M_{nh}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{h+j}{j} x^j$ et de ses dérivées pour $x=0$ et $x=1$ l'idée se présente de tenter une application de la formule d'interpolation de Newton pour trouver la valeur du polynome dans l'intérieur de l'intervalle.

Soit d'une façon générale $f(x)$ un polynome en x. Si l'on prend successivement en considération les valeurs $a_0 \, a_1 \cdots$ de x et les valeurs correspondantes $f(a_0) \, f(a_1) \cdots$ de $f(x)$ (ou bien la valeur des dérivées successives de $f(x)$ dans le cas où quelques-uns des a_ν viendraient à coïncider), alors on a pour $f(x)$ le développement bien connu

$$f(x) = f(a_0) + \sum_{\nu=0}^{N-1} (x-a_0)(x-a_1) \cdots (x-a_\nu) f_{\nu+1} + R,$$

les f_ν désignant les différences

$$f(a_0 \, a_1 \cdots a_\nu) = \frac{f(a_0 \, a_1 \cdots a_{\nu-1}) - f(a_1 \, a_2 \cdots a_\nu)}{a_0 - a_\nu}$$

et R étant égal à[1] $R = (x-a_0)(x-a_1) \cdots (x-a_N) \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}$, ξ ayant une valeur entre le plus grand et le plus petit des a_ν et x. Dans le cas qui nous intéresse on prend $a_\nu = \frac{1-(-)^\nu}{2}$ et l'on aura pour $f(x)$ le développement

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum_{g=0}^{k-1} (-)^g \left(f_{2g+1} - (1-x) f_{2(g+1)}\right) (x(1-x))^g + R$$

ou
$$R = (-)^k (x (1- \text{[illegible]} \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}.$$

[1] Steffensen: Interpolationslære, Kobe[illegible]5, p. 31.

On voit que dans le cas $f(x)=M_{nh}(x)$, R [illegible]gne $(-)^k$ dans l'intervalle $0<x<1$ puisque toutes les dérivées de $M_{[illegible]}$ sont positives, jusqu'à la derivée $(n+1)$-ième qui s'évanouït. Si l'on calcule les termes successifs du développement de $f(x)=M_{nh}(x)$ on aura donc alternativement une évaluation par excès et par défaut.

Pour déterminer la valeur des coëfficients f_ν on pourra utiliser la définition même de ces quantités, mais il est plus rapide de procéder comme il suit. On peut écrire le développement en question $f(x)=\sum\limits_{g=0}(f_{2g}+xf_{2g+1})(x(x-1))^g$. Si l'on développe dans cette formule d'une part $(x-1)^g$ suivant les puissances de x, et d'autre part x^g suivant les puissances de $(x-1)$, et si l'on prend la dérivée k-ième des expressions ainsi obtenues, on trouve pour $x=0$, respectivement $x-1=0$

$$(-)^k\frac{\alpha_k}{k!}=\sum_{g=0}^{k}\binom{g}{k-g}f_{2g}-\binom{g}{k-g-1}f_{2g+1},\quad \frac{\beta_k}{k!}=\sum_{g=0}^{k}\binom{g}{k-g}f_{2g}+\binom{g+1}{k-g}f_{2g+1}$$

où $\alpha_k=f^{(k)}(0)$, $\beta_k=f^{(k)}(1)$, c'est-à-dire dans le cas $f(x)=M_{nh}(x)$

$\alpha_k=(h+k)^{[k]}$, $\quad\beta_k=(h+k)^{[k]}\binom{n+h+1}{h+k+1}$. Ces formules donnent sucessivement

$$f_0=\alpha_0=1 \qquad\qquad f_1=\beta_0-\alpha_0$$
$$f_2=-\alpha_1+(\beta_0-\alpha_0) \qquad\qquad f_3=\alpha_1+\beta_1-2(\beta_0-\alpha_0)$$
$$f_4=\frac{\alpha_2}{2}+\alpha_1+(\alpha_1+\beta_1)-3(\beta_0-\alpha_0)$$

d'où l'on tire pour R_{st} le développement

$$\text{(88 b)}\quad \frac{p^{-t}R_{st}(p)-1}{q}=\left\{\left[\binom{s}{t}-1\right]-p\left[\binom{s}{t}-(t+1)\right]\right\}-pq\left\{\left[t\binom{s}{t+1}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\binom{s}{t}+t+2\right]+p\left[t\binom{s}{t+1}-3\binom{s}{t}+\binom{t+1}{2}+2t+3\right]\right\}+(pq)^2\{\cdots\}-\cdots$$

Si l'on ne tient compte d'aucun terme du second membre de (88 b), on aura pour R_{st} la limite inférieure p^t. Utilisant la relation $R_{st}(p)=$ $=1-R_{s,s-t+1}(q)$ on en tire encore une limite supérieure, de façon que

$$\text{(88 c)}\qquad p^t<R_{st}<1-q^{s-t+1}.$$

En général cette évaluation est évidemment très grossière, mais elle peut être intéressante si q est très petit.

On peut aussi obtenir d'autres limites simples. Utilisant l'expression de μ_1 nous avons

$$\mu_1=\sum_{\nu=t}^{s}(\nu-sp)P_{s\nu}>(t-sp)R_{st} \text{ et } <sqR_{st}.$$

La dernière inégalité est triviale $\left(\text{puisque } \frac{\mu_1}{sq}<P_{st}\right)$, mais la première ne l'est pas si $t>sp$, ce qui ne restreint pas la généralité. On en tire une limite supérieure pour R_{st}. Cette limite est en réalité celle que fournit la formule habituelle de sommation par parties (42 b). Si nous employons la formule (42 a) en faisant $a_i = i + t - sp - 1$, $b_i = P_{s,i+t-1}$, nous aurons pour $t > sp$ une limite inférieure non triviale dans le cas $p > q$. On trouve après quelques réductions

(88 d) $$\frac{2tq}{t - sp + sq} P_{st} < R_{st} < \frac{tq}{t - sp} P_{st} \qquad (t > sp).$$

La différence relative des limites prise par rapport à la limite inférieure est égale à $\varrho = \frac{s - t}{2(t - sp)}$. Si l'on appelle les termes après le terme maximal la «queue» de la distribution, on voit que l'évaluation considérée est d'autant plus précise que le nombre de termes dans R_{st} est faible par rapport au nombre de termes dans le reste de la queue.

En appliquant la formule (42 c) on obtient des limites qui en général sont plus précises. Pour $a_i = (i + t - sp - 1)^h P_{s,i+t-1}$, $b_i = (i + t - sp - 1)^k$ nous trouvons d'abord[1]

(88 e) $$\mu_{h+k}\, \mu_{h-k} \gtreqless \mu_h^2.$$

Ici on a supposé $t > sp$, h et k quelconques, positifs, négatifs ou nuls, entiers ou non. On peut laisser tomber la condition $t > sp$ si on introduit cette autre condition que $(h+k)$ doit être un entier pair, h et k entiers.

Considérons pour $t \gtreqless sp + 1$ la différence $\Delta = \mu_{h+k}\, \mu_{h-k} - \mu_h^2$ comme fonction de h et k. On a en vertu de (42 c)

$$2\frac{\partial \Delta}{\partial h} = \sum_{ij} ((i - sp)(j - sp))^{h-k} ((i - sp)^k - (j - sp)^k)^2 (\log(i - sp) + \log(j - sp)) P_{si} P_{sj}$$

$$2\frac{\partial \Delta}{\partial k} = \sum_{ij} ((i - sp)(j - sp))^{h-k} ((i - sp)^{2k} - (j - sp)^{2k}) (\log(i - sp) - \log(j - sp)) P_{si} P_{sj},$$

$\frac{\partial \Delta}{\partial h}$ est donc toujours positif et $\frac{\partial \Delta}{\partial k}$ a le même signe que k. L'inégalité (88 e) est par conséquence d'autant plus précise que h est plus petit (au sens algébrique) et k est plus petit en valeur absolue.

Cela étant, faisant $k = 1$ et $h = 1$, ensuite $k = 1$ et $h = 2$, $(t > sp)$. Utilisant les formules[2] suivantes tirées de (81)

(88 f)
$$\mu_2 = (t - (s+1)p)\, \mu_1 + spq\, \mu_0$$
$$\mu_3 = [(t - (s+1)p)^2 + (2s - 1)pq]\, \mu_1 + spq(q - p)\, \mu_0$$

nous trouvons

(88 g) $$\frac{t}{2sp} P_{st} [\sqrt{A^2 + 4spq} - A] < R_{st} < \frac{t}{sp} P_{st} [\sqrt{B^2 + (2s-1)pq} - B] \; (t > sp)$$

où $$A = t - sp - p \qquad B = t - sp - \frac{1}{2}.$$

---

[1] D'une façon plus générale on déduit de (42 e) que

$$\mu_x^{y-z}\, \mu_y^{z-x}\, \mu_z^{x-y} < 1 \qquad (x < y < z)$$

x, y et z étant quelconques, positifs, négatifs ou nuls, entiers ou non, $t > sp$.

[2] Biometrika XVII (1925), p. 171.

La limite inférieure de (88 g) est toujours plus précise que la limite inférieure de (88 d) si $A \gtreqless 0$. En ce qui concerne la limite supérieure, (88 g) est la plus précise pourvu que $t < 2sp$ (donc *a fortiori* si $p > q$). On s'en rend compte en posant $t - sp = \alpha$, et en résolvant l'équation quadratique en α obtenue en égalisant les limites supérieures des deux formules.

Pour la différence relative $\varrho(p)$ des limites (88 g) prise par rapport à la limite inférieure on a

$$\varrho(p) + 1 = 2 \frac{\sqrt{B^2 + (2s-1)pq} - B}{\sqrt{A^2 + 4spq} - A}.$$

C'est une fraction assez faible si s est très grand.[1] Avant de calculer effectivement les limites, il sera avantageux de calculer $\varrho(p)$ pour voir si les limites donnent un résultat assez précis pour l'application que l'on a en vue. Si p est très petit, on est obligé d'effectuer le calcul avec un grand nombre de décimales pour avoir la valeur de $\varrho(p)$. Dans ce cas on utilisera plus tôt le développement

$$\varrho(p) = \frac{s-t}{s(2t-1)} + \frac{(s-t)(2s-1)(t-1)(4t-1)}{st(2t-1)^3} p + \cdots$$

Si l'on veut admettre des expressions un peu plus compliquées, on peut encore sensiblement préciser les limites.

La propriété de l'inégalité (88 e) de devenir plus précise au fur et à mesure que h diminue suggère l'idée de tenter une application de cette inégalité pour h négatif. Pourtant on ne peut employer la méthode directe de tout à l'heure puisque on ne connaît pas de relations entre μ_0 et les premiers moments incomplets d'ordre négatif, analogues aux relations (88 f). Il faut procéder d'une autre façon.

Dans l'équation

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{sq} - \sum_{\nu=t}^{s-1} \sum_{i=t}^{\nu} \left(\frac{1}{\nu+1-sp} - \frac{1}{\nu - sp} \right) (i - sp) P_{si}$$

obtenue par une sommation par parties de $\sum\limits_{\nu=t}^{s} \frac{(\nu - sp) P_{s\nu}}{\nu - sp}$, nous introduisons pour la somme $\sum\limits_{i=t}^{\nu} (i - sp) P_{si}$ l'expression $\mu_1 - (\nu+1) q P_{s,\nu+1}$ tirée de (79), ce qui donne après quelques réductions

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{t - sp - 1} + spq \mu_{-1} - q(sp+1) \sum_{\nu=t}^{s} \frac{P_{s\nu}}{\nu - 1 - sp} \qquad (t > sp+1).$$

Puisque $\frac{1}{\nu - 1 - sp} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu - sp)^i}$, $(t > sp+1)$, cette équation se réduit a

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{t - sp - 1} - q\mu_{-1} - q(sp+1) \sum_{i=2}^{\infty} \mu_{-i}.$$

[1] $\alpha = t - sp$ étant supposé de même ordre que s.

D'autre part on trouve par une application répétée de (88 e)

$\frac{\mu_{-h}}{\mu_{-(h-1)}} > \frac{\mu_0}{\mu_1}$ d'où encore $\mu_{-h} > \mu_0 \left(\frac{\mu_0}{\mu_1}\right)^h$ c'est-à-dire

$$\sum_{i=2}^{\infty} \mu_{-i} > \frac{\mu_0^{\,3}}{\mu_1 (\mu_1 - \mu_0)} .$$

Pour le rapport $x = \frac{\mu_0}{\mu_1}$ nous aurons donc l'inégalité cubique

$$x^3 - \frac{x^2}{sq} + \frac{t-sp}{spq\,(t-sp-1)}\,x < \frac{1}{spq\,(t-sp-1)} .$$

Le discriminant de l'équation cubique correspondant est toujours négatif dans le cas $t > sp + 1$, l'équation a donc une seule racine réelle x_0. D'autre part la valeur du premier membre est toujours positive pour $x \to \infty$. L'inégalité considerée est donc équivalente à $x < x_0$. On en déduit

(88 h) $$R_{st} < tqP_{st}\left[\frac{1}{3sq} + \sqrt[3]{D+Q} - \sqrt[3]{D-Q}\right]$$

$$D = \sqrt{P^3 + Q^2}\,, \quad P = \frac{t-sp}{3spq\,(t-sp-1)} - \left(\frac{1}{3sq}\right)^2,$$

$$Q = \frac{(1+2q)\,s - t}{6spq \cdot sq\,(t-sp-1)} + \left(\frac{1}{3\,sq}\right)^3.$$

Pour donner une idée de la précision croissante des limites supérieures que nous avons successivement obtenues, nous les avons calculées pour $s = 12$, $p = \frac{1}{3}$, $t = 7$.

Abstraction faite du dénominateur 531 441 on a

Formule	(88 c)	484 790
„	(88 d)	39 424
„	(88 g)	38 614
„	(88 h)	35 953
Valeur exacte		35 313

Chap. III. Les Paramètres de la distribution hypergéométrique.

§ 1. Notations et fonctions génératrices.

Supposons que l'on fasse s épreuves sur l'arrivée d'un certain évènement, le schéma de réalisation étant le schéma de la boule non-remplacée. La probabilité pour que l'évènement considéré arrive ν fois, est comme on le sait

(89 a)
$$ {}_nP_{s\nu} = \binom{s}{\nu} \frac{a^{[\nu]}\, b^{[s-\nu]}}{n^{[s]}} $$

a et b étant respectivement le nombre des cas favorables et défavorables, et $n = a + b$ le nombre total des cas possibles au début de la série des s épreuves; a et b peuvent par exemple représenter les nombres de boules blanches et noires contenues dans une urne au commencement d'une suite de tirages sans remplacement.

La loi de distribution ${}_nP_{s\nu}$ est appelée la distribution hypergéométrique, parce que la fonction génératrice $u(t)$ de cette distribution peut être exprimée à l'aide de la fonction hypergéométrique. En effet on a d'après la définition de la fonction $u(t)$ (formule (33))

(89 b)
$$ e^{u(t)} = \sum_{\nu=0}^{s} e^{\nu t}\, {}_nP_{s\nu} = $$
$$ \frac{b^{[s]}}{n^{[s]}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-s)(-s+1)\cdots(-s+\nu-1)\cdot(-a)(-a+1)\cdots(-a+\nu-1)}{\nu!\,(b-s+1)(b-s+2)\cdots(b-s+\nu)} e^{\nu t}. $$

Si l'on pose $\alpha = -s$, $\beta = -a$, $\gamma = b - s + 1$, d'où $s = -\alpha$, $a = -\beta$, $b = \gamma - \alpha - 1$, $n = \gamma - \alpha - \beta - 1$; on a donc

(90 a)
$$ e^{u(t)} = \frac{b^{[s]}}{n^{[s]}} F(\alpha, \beta, \gamma; e^t) $$

$F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ étant la fonction hypergéométrique $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\nu-1)^{[\nu]}(\beta+\nu-1)^{[\nu]}}{\nu!\,(\gamma+\nu-1)^{[\nu]}} z^\nu$.

Posons encore $p = \frac{a}{n} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-\gamma+1}$ $q = \frac{b}{n} = \frac{\alpha-\gamma+1}{\alpha+\beta-\gamma+1}$, de façon à ce que p représente la probabilité de l'évènement considéré au commencement des tirages.

Les édifices que nous avons employés dans le chap. II pour trouver soit des relations récurrentes, soit des expressions indépendantes pour les paramètres μ et m étaient pour une grande partie basés sur des opérations telles que: sommation par parties, changements des indices muets etc., effectuées *directement* aux formules de définition mêmes, par exemple aux formules (53 a) et (62 ab). Quand il s'agit de la distribution binomiale, ces relations sont assez simples pour qu'il soit préférable dans bien des cas d'employer ces méthodes directes au lieu d'utiliser les fonctions génératrices. Quand il s'agit de la distribution hypergéométrique l'utilité des méthodes directes est beaucoup plus restreinte. La principale raison en est que là où les formules relatives à la distribution binomiale contiennent des puissances de p, les formules analogues relatives à la distribution hypergéométrique contiennent des factorielles en (np). Une importante conséquence de cette différence est par exemple que la méthode directe que nous avons employée pour démontrer les formules telles que (54 a) et la formule de M. ROMANOVSKY[1] fait défaut dans le cas de la distribution hypergéométrique. Dans ce cas on est donc obligé d'avoir recours aux fonctions génératrices dans une plus large mesure.

A côté de la fonction génératrice $u(t)$ nous considérons aussi les fonctions $v(t)=e^{u(t)}$, $w(t)=e^{u(t)-spt}$, c'est-à-dire

$$\text{(90 b)} \quad v(t)=\frac{b^{[s]}}{n^{[s]}}F(\alpha,\beta,\gamma;e^t) \qquad \text{(90 c)} \quad w(t)=\frac{b^{[s]}}{n^{[s]}}F(\alpha,\beta,\gamma;e^t)\,e^{-spt}.$$

La fonction hypergéométrique $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ satisfait comme on le sait[2] à l'équation différentielle (91) $z(1-z)F''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)F'-\alpha\beta F=0$ F' et F'' désignant respectivement $\frac{d}{dz}F$ et $\frac{d^2}{dz^2}F$.

Si nous faisons dans (91) les substitutions (90 a b c) nous aurons pour u, v et w respectivement les équations différentielles

$$\text{(92 a)} \quad (1-e^t)u''+(1-e^t)u'^2+(b-s+(s+a)e^t)u'-sa\,e^t=0$$

$$\text{(92 b)} \quad (1-e^t)v''+((b-s)+(s+a)e^t)v'-sa\,e^t\,v=0$$

$$\text{(92 c)} \quad (1-e^t)w''+[(b-(q-p)s)+(a+(q-p)s)e^t]w'+spq(n-s)(1-e^t)w=0$$

u' et u'' désignant respectivement $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$ et de même pour v et w.

Les équations (92) sont une source de certaines relations importantes entre les semi-invariants et les moments de la distribution hypergéométrique.

§ 2. Semi-invariants, moments factoriels et moments pris autour de l'origine.

Les paramètres de la distribution hypergéométrique dont l'expression est la plus simple, sont les moments factoriels.

---

[1] En ce qui concerne la formule de M. ROMANOVSKY, je me permets de renvoyer à mon article de Biometrika déjà cité. Dans le § 3 de cet article j'ai montré combien la méthode directe est plus simple que la méthode employée par M. ROMANOVSKY. En plus la démonstration directe comprend aussi le cas important des moments incomplets pour lesquels la méthode de M. ROMANOVSKY n'est pas appliquable.

[2] Voir par exemple WHITTAKER et WATSON: Modern analysis 3ème ed., p. 283.

Appliquant la fonction génératrice v nous aurons $m_{[h]} = (D_{e^t}^h v(t))_{t=0} = \frac{b^{[s]}}{n^{[s]}} (D_z^h F(\alpha, \beta, \gamma; z))_{z=1}$. Puisque la fonction hypergéométrique satisfait à la relation $D_z^h F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{(\alpha+h-1)^{[h]} (\beta+h-1)^{[h]}}{(\gamma+h-1)^{[h]}} F(\alpha+h, \beta+h, \gamma+h; z)$

il vient $\qquad m_{[h]} = h!\, {}_nP_{sh}\, F(\alpha+h, \beta+h, \gamma+h; 1)$.

Introduisant $\qquad F(\alpha+h, \beta+h, \gamma+h; 1) = \frac{(n-h)^{[s-h]}}{b^{[s-h]}}$,

nous avons $m_{[h]} = s^{[h]} \frac{a^{[h]}}{n^{[h]}}$. C'est la formule de M. STEFFENSEN[1].

On pourrait du reste obtenir cette formule par une sommation directe en utilisant la remarque déjà faite (p. 17) que les factorielles satisfont à la formule binomiale.

Puisque les moments *pris autour de l'origine* peuvent être exprimés à l'aide des quantités $m_{[h]}$ comme une forme linéaire et homogène à coëfficients indépendants de n, s et p (formule (31 a), nous n'insistons pas sur l'expression indépendante de ces paramètres[2]. Nous allons seulement développer une formule récurrente. Pour cela nous utilisons l'équation (92 b.). Une méthode serait de développer e^t, v, v' et v'' suivant les puissances de t et de porter les séries ainsi obtenues dans l'équation différentielle. Puisque les développements de v, v' et v'' contiennent les quantités m comme coëfficients, on aura une relation recurrente pour ces paramètres en égalant à zéro le coëfficient de t^h dans l'équation obtenue. Cette méthode est en réalité équivalente à la méthode employée par M. PEARSON pour trouver une relation récurrente pour les moments moyens. Pourtant on peut éviter ces calculs d'identification. Pour obtenir les formules cherchées on n'a qu'à dériver l'équation considérée $(h-1)$ fois par rapport à t et de faire ensuite $t=0$. Ce procédé est beaucoup plus simple que le développement en série de puissances; $(h-1)$ dérivation nous donne

$$\sum_{j=0}^{h-1} \binom{h-1}{j} \left\{ v^{(h-j+1)} D^j (1-e^t) + v^{(h-j)} D^j ((b-s)+(s+a)e^t) - sa\, e^t\, v^{(h-j-1)} \right\} = 0$$

d'où pour $t=0$ en remarquant que $v^{(h)}(0) = m_h$

$$(93\text{ b}) \qquad (n-h+1)\, m_h = sa + \sum_{j=1}^{h-1} \left\{ sa \binom{h-1}{j} - (s+a) \binom{h-1}{j-1} + \binom{h-1}{j-2} \right\} m_j.$$

La même méthode appliquée à l'équation (92 a) donne une formule récurrente pour les semi-invariants, mais ici la relation obtenue ne sera plus

---

1 Matematisk Iagttagelseslære p. 50. Voir aussi TSCHUPROW, Metron. Vol. II. (1923), p. 679.

2 L'expression des moments pris autour de l'origine, à laquelle conduit la méthode symbolique de M. SOPER (Frequency arrays, Cambridge, 1922, p. 28) est précisément l'expression que l'on obtiendra en appliquant la formule générale (31 a) au cas de la distribution hypergéométrique.

linéaire, parce que l'équation différentielle est elle-même non linéaire. Nous aurons d'abord

$$\sum_{j=0}^{h-1}\binom{h-1}{j}\Big\{u^{(h-j+1)}D^j(1-e^t)+D^j(1-e^t)D^{h-j-1}(u'^2)+$$
$$+u^{(h-j)}D^j((b-s)+(s+a)e^t)\Big\}=sa\,e^t$$

puisque $\qquad D^{h-j-1}(u'^2)=\sum_{l=0}^{h-j-1}\binom{h-j-1}{l}u^{(l+1)}u^{(h-j-l)},$

il vient pour $t=0$, en vertu de $u^{(h)}(0)=\lambda_h$.

$$\text{(93 a)}\qquad (n-h+1)\lambda_h=sa+\sum_{j=1}^{h-1}\left\{-(s+a)\binom{h-1}{j-1}+\binom{h-1}{j-2}\right\}\lambda_j+$$
$$+\sum_{j=1}^{h-1}\sum_{l=1}^{h-j}\binom{h-1}{j-1}\binom{h-j}{l-1}\lambda_j\lambda_l.$$

Comme une dernière application de cette méthode montrons comment elle conduit rapidement à la formule de M. Pearson pour les moments moyens; $(h-1)$ dérivation de (92 c) donne

$$\sum_{j=0}^{h-1}\binom{h-1}{j}\Big\{w^{(h-j+1)}D^j(1-e^t)+w^{(h-j)}D^j\left[(b-(q-p)s)+(a+(q-p)s)e^t\right]+$$
$$+spq(n-s)w^{(h-j-1)}D^j(1-e^t)\Big\}=0$$

d'où pour $t=0$, en vertu de $w^{(h)}(0)=\mu_h$

$$\text{(93 c)}\ (n-h+1)\mu_h=spq(n-s)+\sum_{j=2}^{h-2}\left\{spq(n-s)\binom{h-1}{j}-(np+s(q-p))\binom{h-1}{j-1}\right.$$
$$\left.+\binom{h-1}{j-2}\right\}\mu_j+\left\{-(np+s(q-p))\binom{h-1}{h-2}+\binom{h-1}{h-3}\right\}\mu_{h-1}.$$

Au Chap. II nous avons utilisé les formules «complémentaires»

$$\text{(94 a)}\qquad \mu_h(1-p)=(-)^h\mu_h(p)\qquad \lambda_h(1-p)=(-)^h\lambda_h(p)$$

pour effectuer certaines transformations des formules analogues aux formules (93 a c).

Les formules «complémentaires» (94 a) subsistent encore pour les μ et λ hypergéométriques. On a d'abord

$$\mu_h(1-p)=\sum_{\nu=0}^{s}(\nu-sq)^h\binom{s}{\nu}\frac{b^{[\nu]}a^{[s-\nu]}}{n^{[s]}}=$$
$$=(-)^h\sum_{\nu=0}^{s}((s-\nu)-sp)^h\binom{s}{s-\nu}\frac{a^{[s-\nu]}b^{[\nu]}}{n^{[s]}}=(-)^h\mu_h(p).$$

Cela étant, considérons l'expression de λ_h en fonction des μ (formule 38). Les indices $i_2 i_3\cdots i_h$ du terme général satisfont à l'équation $2i_2+3i_3+\cdots+h\,i_h=h$, que l'on peut aussi écrire

$$i_3+i_5+i_7+\cdots+\begin{Bmatrix} i_{h-1} & (h\text{ pair})\\ i_h & (h\text{ impair})\end{Bmatrix}=$$
$$=h-\left[2(i_2+i_3)+4(i_4+i_5)+\cdots+\begin{Bmatrix}(h-2)(i_{h-2}+i_{h-1})+h\,i_h & (h\text{ pair})\\ (h-1)(i_{h-1}+i_h) & (h\text{ impair})\end{Bmatrix}\right]$$

quelques-uns des indices i pouvant être nuls. Dans tous les cas le deuxième terme du second membre est un nombre pair. La somme des indices $i_3 + i_5 + \cdots$ est donc toujours de la même parité que h. Cependant cette somme est la somme des exposants des μ d'ordre impair qui figurent dans le terme général sous le signe $\sum\limits_{(i)}$ de la formule (38). Si l'on change la valeur de p en $(1-p)$, le seul effet sur ce terme général sera donc l'introduction d'un facteur $(-)^h$, ce qui démontre la proposition.

Les formules (94 a) permettent d'effectuer des transformations sur les formules récurrentes complètes (93 a) et (93 c) analogues aux transformations que nous avons effectuées pour les équations en les μ et les λ binomiaux. On trouve par exemple pour les μ hypergéométriques

$$(94\,\mathrm{b})\quad 2(n-h+1)\,\mu_h = \sum_{j=1}\left\{2\binom{h-1}{2j-1}spq\,(n-s)-\binom{h-1}{2j}n+2\binom{h-1}{2j+1}\right\}\mu_{h-2j}$$
$$+(q-p)\,(n-2s)\sum_{j=1}\binom{h-1}{2j-1}\mu_{h-2j+1}\,.$$

§ 3. Moments moyens. Calcul numérique exact et expressions indépendantes.

Dans ce paragraphe nous allons étudier plus à fond les moments moyens de la distribution hypergéométrique.

L'application de la formule générale de définition (26 c) conduit dans le cas de la distribution hypergéométrique à

$$(95)\qquad \mu_h = \sum_{\nu=0}^{s}(\nu - sp)^h \binom{s}{\nu}\frac{a^{[\nu]}\,b^{[s-\nu]}}{n^{[s]}}\,.$$

Nous commençons par indiquer une méthode pour le calcul numérique exact qui nous semble plus rapide et plus sûre que la méthode habituelle, qui est basée sur la formule (93 c). Pour cela nous considérons l'expression[1]

$$(96)\qquad \mu_h = \sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}B_{h-i}^{(-i)}(-sp)\,\frac{s^{[i]}\,a^{[i]}}{n^{[i]}}$$

que l'on tire immédiatement de (31 c) en faisant remarquer que l'on a

$$m_1 = m_{[1]} = \frac{sa}{n} = sp\,; \qquad \text{Posons } B_{hi} = (-)^{h+i}\binom{h}{i}B_{h-i}^{(-i)}(-sp),$$

d'où
$$B_h^{(-i)}(-sp) = (-)^h\,\frac{B_{h+i,\,i}}{\binom{h+i}{i}}\,.$$

[1] La formule qu'a obtenu TSCHUPROW (Metron Vol. II (1923) p. 680, formule (12)) est en réalité équivalente à la formule (96) ci-dessus, bien que la formule de TSCHUPROW paraisse beaucoup moins simple. Une remarque analogue s'applique à l'expression trouvée par M. ROMANOVSKY. Biometrika XVII (1925), p. 59. Ces deux exemples nous semblent montrer l'avantage très réelle que comporte l'introduction des polynomes B et les formules générales (31) et (32).

Portant cette expression dans l'équation (22) à laquelle satisfont les polynomes B, nous aurons pour B_{hi} la formule récurrente

(97 a) $$B_{hi}=(sp-i)\,B_{h-1,i}+B_{h-1,i-1}$$

avec les conditions initiales $B_{h0}=(sp)^h$, $B_{hh}=1$.

Une application de la formule (20 b) conduit à la formule de contrôle[1]

(97 b) $$\sum_{i=0}^{h}(-)^i h^{[i]} B_{hi}=(sp-h)^h.$$

La valeur numérique des quantités B_{hi} peut donc être calculée par un schéma très simple. Numérotant par exemple les lignes $h=0, 1\cdots$ et les colonnes $i=0, 1, \cdots$ on inscrit dans la colonne $i=0$ les quantités $1, sp, (sp)^2\cdots$, dans la diagonale les quantités $1, 1, \cdots$ et dans une colonne à part les quantités $1, (sp-1), (sp-2)^2, \cdots$. Le calcul et le contrôle s'effectuent alors rapidement à l'aide des formules (97 a b).

La valeur numérique des quantités B_{hi} et $m_{[i]}=\dfrac{s^{[i]}\,a^{[i]}}{n^{[i]}}$ étant calculée, la valeur des μ_h se calcule par la formule

(97 c) $$\mu_h=(-)^h\sum_{i=0}^{h}(-)^i B_{hi}\, m_{[i]}.$$

Le nombre de multiplications nécessitées pour calculer les quantités μ_h par cette méthode est à peu près le même que par la méthode basée sur la formule (93 c). Mais il y a la différence que par la méthode de la formule (97 c) on n'a pas à effectuer de sommations partielles pour trouver des multiplicateurs tels que les coëfficients de la formule (93 c). En plus le calcul par la méthode indiquée ici peut être fait systématiquement par étapes, avec la possibilité de contrôler en partie les résultats obtenus.

Nous faisons aussi remarquer que notre méthode s'applique sans modification aux moments pris autour d'un point quelconque. Elle est même plus générale puisqu'elle s'applique à toute distribution dont on peut facilement calculer les moments factoriels.

L'expression de μ_h comme fonction des quantités n, s et p peut être envisagée sous beaucoup de formes différentes. La forme qui nous semble la plus intéressante est la suivante

(98 a) $$\mu_h=\sum_{\lambda=0}^{h-1}\frac{F_{\lambda h}}{(n-1)^{[\lambda]}},$$ $F_{\lambda h}$ étant un polynome en s et p indépendant de n.

Mettant $(s-1)^{[\lambda]}$ en facteur nous poserons $(s-1)^{[\lambda]}\mathfrak{f}_{\lambda h}=F_{\lambda h}$ de façon que

(98 b) $$\mu_h=\sum_{\lambda=0}^{h-1}\frac{(s-1)^{[\lambda]}}{(n-1)^{[\lambda]}}\mathfrak{f}_{\lambda h},$$

$\mathfrak{f}_{\lambda h}$ étant un polynome en s et p indépendant de n. De plus, $\mathfrak{f}_{\lambda h}$ est un polynome de la même forme que le moment *binomial* μ_h. En particulier on a $\mathfrak{f}_{\lambda h}(1-p)=(-)^h\mathfrak{f}_{\lambda h}(p)$ ainsi que $F_{\lambda h}(1-p)=(-)^h F_{\lambda h}(p)$.

[1] D'une façon plus générale on a $\sum_{i=0}^{h}(-)^i x^{[i]} B_{hi}=(sp-x)^h$, x quelconque. Pour $x=0, 1\cdots$ on en tire une formule récurrente en i seulement.

Ces formules découlent immédiatement de (94 a) qui est vérifié pour n et s quelconques. On peut donc poser:

$$\mathfrak{f}_{\lambda h} = \frac{F_{\lambda h}}{(s-1)^{\lambda}} = (q-p)^{\frac{1-(-)^h}{2}} \sum_{\varrho=1}^{g} \sum_{k=0}^{g-\varrho} {}_{\lambda}U_{h\varrho k}\, \mu^{\varrho} r^{k}, \text{ où } r = pq,\ \mu = spq, \tag{98 c}$$

les U étant des coëfficients numériques indépendants de n, s et p, et g désignant Ent $\left(\frac{h}{2}\right)$, de façon à ce que

$$\mu_h = (q-p)^{\frac{1-(-)^h}{2}} \sum_{\lambda=0}^{h-1} \frac{(s-1)^{[\lambda]}}{(n-1)^{[\lambda]}} \sum_{\varrho=1}^{g} \sum_{k=0}^{g-\varrho} {}_{\lambda}U_{h\varrho k}\, \mu^{\varrho} r^{k}. \tag{98 d}$$

Il ne sera pas difficile de démontrer directement la possibilité de mettre μ_h sous les formes (98 a b d). On pourra par exemple procéder par une conclusion de h à $(h+1)$, utilisant la formule (94 b), mais nous n'y insistons pas.

Pour trouver l'expression des polynomes $\mathfrak{f}_{\lambda h}$ et $F_{\lambda h}$ on pourra attaquer directement l'expression (95) et y développer le facteur $\frac{a^{[\nu]} b^{[s-\nu]}}{n^{[s]}}$ suivant les factorielles $\frac{1}{(n-1)^{[\lambda]}}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots)$. Mais on pourra aussi bien considérer l'expression (96) et y développer le facteur $m_{[i]} = \frac{s^{[i]} (np)^{[i]}}{n^{[i]}}$ suivant les factorielles $\frac{1}{(n-1)^{[\lambda]}}$. Les deux méthodes conduiront nécessairement au même résultat, mais les calculs à effectuer seront très différents. Les calculs de la première méthode mettent en évidence certaines propriétés des polynomes $\mathfrak{f}$ qui sont intéressants si on les considère comme des coëfficients des termes successifs d'approximation pour μ_h. Nous utiliserons cette méthode au paragraphe suivant. Dans le présent paragraphe nous employons la dernière méthode.

Pour développer $\frac{(np)^{[i]}}{n^{[i]}} = p \frac{(np-1)^{[i-1]}}{(n-1)^{[i-1]}}$ $(0 < i)$ suivant les factorielles $\frac{1}{(n-1)^{[\lambda]}}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots)$ nous avons à développer $(np-1)^{[i-1]}$ suivant les factorielles de $(i-n-1)$. A l'aide des formules (21 a) et (21 b) nous trouvons

$$(np-1)^{[i-1]} = B_{i-1}^{(i)}(np) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} B_{i-j-1}^{(i)} \cdot (np)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} (-)^{i-j-1} \binom{i-1}{j} B_j^{(i)}\, p^{i-j-1} B_{i-j-1}^{(0)} (1-i+(i-n-1))$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\lambda=0}^{i-1} (-)^{i-j-1} \binom{i-1}{j} \binom{i-j-1}{\lambda} B_j^{(i)} B_{i-j-\lambda-1}^{(-\lambda)} (1-i) p^{i-j-1} (i-n-1)^{[\lambda]}$$

d'où $\frac{(np)^{[i]}}{n^{[i]}} =$

$$\sum_{\lambda=0}^{i-1} (-n)^{[-i+1]} (-n+i-1)^{[\lambda]} \sum_{j=0}^{i-1} (-)^j \binom{i-1}{j} \binom{i-j-1}{\lambda} B_j^{(i)} B_{i-j-\lambda-1}^{(-\lambda)} (1-i)\, p^{i-j}$$

puisque $$(-n)^{[-i+1]} (-n+i-1)^{[\lambda]} = \frac{(-)^{\lambda-i+1}}{(n-1)^{[i-\lambda-1]}}$$

nous avons pour $0 < i$

$$\frac{(np)^{[i]}}{n^{[i]}} = p^i \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{(-)^{[\lambda]}}{(n-1)^{[\lambda]}} \sum_{j=0}^{i-1} (-)^j \binom{i-1}{j} \binom{i-j-1}{\lambda-j} B_j^{(i)} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)} (1-i) p^{-j}.$$

Posons pour $0 < i$

$$\text{(99 a)} \qquad f_{\lambda i} = \sum_{j=0}^{i-1} (-)^j \binom{i-1}{j} \binom{i-j-1}{\lambda-j} B_j^{(i)} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)} (1-i) p^{-j} =$$

$$= (-)^{\lambda} \binom{i-1}{\lambda} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{\lambda}{j} B_j^{(i)} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)} (\lambda) p^{-j}$$

et pour $i=0$: $f_{\lambda 0} = 0 \; (0 < \lambda)$, $f_{00} = 1$.

Nous avons pour $0 \leqq i$, $\frac{(np)^{[i]}}{n^{[i]}} = p^i \sum_{\lambda=0}^{i} \frac{(-)^{\lambda} f_{\lambda i}}{(n-1)^{[\lambda]}}$

donc (99 b) $$\mu_h = \sum_{\lambda=0}^{h-1} \frac{(-)^{\lambda}}{(n-1)^{[\lambda]}} \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)} (-sp)\, s^{[i]} p^i f_{\lambda i}.$$

(99 c) $$F_{\lambda h} = (-)^{\lambda} \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)} (-sp)\, s^{[i]} p^i f_{\lambda i}.$$

Comparent (99 c) à l'expression (62 b) pour le moment *binomial* on prévoit que les quantités $f_{\lambda i}$ vont jouer un rôle dans notre analyse.

De (99 a) on tire immédiatement $f_{0i} = 1$ ce qui montre que le premier terme dans l'expression du μ_h hypergéométrique, c'est-à-dire le terme indépendant de n est égal au moment binomial correspondant, résultat que l'on peut du reste obtenir aussi en faisant tendre n vers ∞ dans (95) en conservant s et $p = \frac{a}{n}$ constantes. D'autre part on a $f_{\lambda i} = 0$ pour $i \leqq \lambda$ $(0 < \lambda)$, en particulier $f_{\lambda\lambda} = 0 \, (0 < \lambda)$.

Les quantités $f_{1i}, f_{2i}, \cdots$ sont toutes des polynomes en i. En effet, on peut toujours développer $B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(\lambda)$ dans (99 a) suivant les puissances de λ. L'expression de $f_{\lambda i}$ ainsi obtenue sera une somme dont chaque terme sera le produit par deux nombres B d'un coëfficient indépendant de i. Du reste i ne figurera que dans les indices supérieurs des nombres B. Si l'on introduit l'expression des nombres B comme des polynomes en leur indice supérieur, on obtiendra donc une expression pour $f_{\lambda i}$ sous forme d'un polynome en i. D'une façon plus précise on voit que le degré de ce polynome sera 2λ.

Le calcul des polynomes $f_{\lambda i}$ pourra être effectué par la méthode que nous venons d'indiquer. Pourtant on peut éviter ces calculs assez longs en se servant de la formule récurrente que voici

$$(100) \qquad f_{\lambda+1,i} = f_{\lambda+1,i-1} + \left(\frac{i-1}{p} - \lambda\right) f_{\lambda,i-1} - (i-\lambda-1) f_{\lambda i} \qquad (0 < i)$$

avec les conditions initiales $f_{0i} = 1$ $(0 \lesseqgtr i)$; $f_{\lambda i} = 0$ pour $i \lesseqgtr \lambda$ $(0 < \lambda)$.

Pour démontrer cette formule posons comme nous l'avons déjà fait à l'occasion de la formule (14 a)

$$B_k^{(n)} = \frac{(-)^k}{\binom{n-1}{k}} C_{k,n-1}.$$

L'expression de $f_{\lambda i}$ sera $f_{\lambda i} = \sum_{j=0} \binom{i-j-1}{\lambda-j} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)\, C_{j,i-1}\, p^{-j}$, la sommation étant étendue jusqu'au dernier terme qui ne s'évanouit pas.

Dans l'expression de $(\lambda-i) f_{\lambda i}$ décomposons le facteur $(\lambda-i)\, B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)$ sous le signe Σ à l'aide de la formule (22), ce qui donne

$$(j-i)\, B_{\lambda-j}^{(\lambda-i)}(1-i) - (\lambda-1)(\lambda-j)\, B_{\lambda-j-1}^{(\lambda-i)}(1-i).$$

La sommation $\sum_{j=0}$ étendue au dernier de ces deux termes donne $(\lambda-i)(\lambda-1) f_{\lambda-1,i}$ tandis que le premier terme donne lieu à

$$(\lambda-i) \sum_{j=-1} \binom{i-j-1}{\lambda-j-1} B_{\lambda-j-1}^{(\lambda-i)}(1-i)\, C_{j+1,i-1}\, p^{-j-1}.$$

Ecrivant $(\lambda+1)$ au lieu de λ nous avons donc

$$p(f_{\lambda+1,i} - \lambda f_{\lambda i}) = \sum_{j=-1} \binom{i-j-1}{\lambda-j} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)\, C_{j+1,i-1}\, p^{-j}, \text{ d'où}$$

$$(101\text{ a}) \qquad D p^{\lambda+1}(f_{\lambda+1,i} - \lambda f_{\lambda i}) = (i-\lambda) \sum_{j=-1} \binom{i-j-1}{\lambda-j-1} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)\, C_{j+1,i-1}\, p^{\lambda-j-1}$$

D désignant une dérivation par rapport à p.

D'autre part nous trouvons sans peine

$$(101\text{ b}) \qquad D p^{\lambda} f_{\lambda i} = (i-\lambda) \sum_{j=0} \binom{i-j-1}{\lambda-j-1} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)\, C_{j,i-1}\, p^{\lambda-j-1}.$$

Cela étant, considérons l'expression

$$D p^{\lambda+1} f_{\lambda i} = \sum_{j=0} \binom{i-j-1}{\lambda-j} B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)\, C_{j,i-1}(\lambda-j+1)\, p^{\lambda-j}.$$

Le facteur $(\lambda-j+1)\, B_{\lambda-j}^{(\lambda-i+1)}(1-i)$ est égal a $B_{\lambda-j+1}^{(\lambda-i+2)}(2-i) - B_{\lambda-j+1}^{(\lambda-i+2)}(1-i)$ en vertu de la formule (17). La sommation $\sum_{j=0}$ étendue au dernier de ces deux termes donne $-\dfrac{D p^{\lambda+1} f_{\lambda+1,i}}{i-\lambda-1}$ en vertu de (101 b), tandis que le premier terme donne lieu à

$$\sum_{j=-1} \binom{(i-1)-j-1}{\lambda-j-1} B_{\lambda-j}^{(\lambda+1-(i-1))}(1-(i-1))\, C_{j+1,i-1}\, p^{\lambda-j-1}.$$

Décomposons encore le facteur $C_{j+1,i-1}$ en $C_{j+1,i-2}+(i-1)\,C_{j,(i-1)-1}$ (formule 10 a). La sommation $\sum\limits_{j=-1}$ étendue au dernier de ces deux termes donne $\frac{i-1}{i-\lambda-1} Dp^{\lambda} f_{\lambda,i-1}$ d'après la formule (101 b), tandis que la sommation étendue au premier terme donne $\frac{1}{i-\lambda-1} Dp^{\lambda+1}(f_{\lambda+1,i-1}-\lambda f_{\lambda,i-1})$ d'après la formule (101 a). Rassemblant les termes, nous avons

$$Dp^{\lambda+1}\left\{(i-\lambda-1)f_{\lambda i}-(f_{\lambda+1,i-1}-\lambda f_{\lambda,i-1})-\frac{i-1}{p}f_{\lambda,i-1}+f_{\lambda+1,i}\right\}=0.$$

L'expression sous le signe D est donc égale à une constante $\gamma_{\lambda i}$ indépendante de p. Pour la déterminer faisons $p=0$. L'expression de $f_{\lambda i}$ montre que l'on a $\lim\limits_{p\to 0}(p^{\lambda} f_{\lambda i})=C_{\lambda,i-1}$, donc $-C_{\lambda+1,i-2}-(i-1)\,C_{\lambda,i-2}+C_{\lambda+1,i-1}=\gamma_{\lambda i}$. Le premier membre de cette équation est égal à zéro d'après la formule (10 a), nous avons par conséquence $\gamma_{\lambda i}=0$ ce qui donne la formule (100).

A l'aide de cette formule nous trouvons successivement $f_{0i}=1$, $f_{1i}=\frac{q}{p}\binom{i}{2}$, $f_{2i}=3\left(\frac{q}{p}\right)^2\binom{i}{4}+2\frac{q(q-p)}{p^2}\binom{i}{3}$ et d'une façon générale

$$p^{\lambda} f_{\lambda i}=\sum_{j=\lambda+1}^{2\lambda}\binom{i}{j}\varphi_{\lambda j} \qquad (0<\lambda) \tag{102}$$

les $\varphi_{\lambda j}$ étant des polynomes en p indépendants de i, qui satifont à l'équation

$$\varphi_{\lambda j}=(\lambda-j)\,p\varphi_{\lambda-1,j}+(q-p)\,(j-1)\,\varphi_{\lambda-1,j-1}+q\,(j-1)\,\varphi_{\lambda-1,j-2} \quad (1<\lambda) \tag{103}$$
$$\varphi_{1j}=0\ (j\neq 2) \qquad \varphi_{12}=q$$

que l'on déduit facilement en portant l'expression (102) dans l'équation (100) et identifiant les deux membres.

Posant encore (104) $F_{\lambda h}=\sum\limits_{i=0}^{h}\binom{h}{i}B_{h-i}^{(-i)}(-sp)\,s^{[i]}p^i\binom{i}{\lambda}$ (λ quelconque)

Nous pouvons écrire l'expression de $\mathsf{F}_{\lambda h}$

$$\mathsf{F}_{\lambda h}=(-p)^{-\lambda}\sum_{j=\lambda+1}^{2\lambda}\varphi_{\lambda j}F_{jh}. \qquad (0<\lambda) \tag{105}$$

Le calcul de $\mathsf{F}_{\lambda h}$ revient donc à calculer les quantités $F_{\lambda h}$. La définition (104) donne immédiatement $F_{0h}=\mathsf{F}_{0h}=$ moment *binomial* μ_h. On pourrait aussi calculer les quantités $F_{1h}, F_{2h},\cdots$ par la formule de définition (104) mais le calcul serait assez long. Il sera plus avantageux de chercher des formules récurrentes. Dérivant la formule (104) par rapport à p nous aurons

$$F'_{\lambda h}=\sum_{i=0}^{h} i\binom{h}{i}B_{h-i}^{(-i)}(-sp)\,s^{[i]}p^{i-1}\binom{i}{\lambda}-s\,(h-i)\binom{h}{i}B_{h-i-1}^{(-i)}(-sp)\,s^{[i]}p^i\binom{i}{\lambda}.$$

Introduisant dans le premier terme

$$i\binom{i}{\lambda}=(\lambda+1)\binom{i}{\lambda+1}+\lambda\binom{i}{\lambda}$$

et dans le second $$(h-i)\binom{h}{i}=h\binom{h-1}{i},$$

il vient $$(106\,\mathrm{a})\quad pF'_{\lambda h}=(\lambda+1)\,F_{\lambda+1,\,h}+\lambda F_{\lambda h}-sph\,F_{\lambda,\,h-1}.$$

Cette formule est déjà très utile, mais on peut en trouver une autre ne renfermant pas de signe de dérivation. Posons d'une façon plus générale

$$(106\,\mathrm{b})\qquad {}_kF_{\lambda h}=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}B_{h-i}^{(-i)}(-sp)\,s^{[i-k]}p^i\binom{i}{\lambda},$$

de façon à ce que ${}_0F_{\lambda h}=F_{\lambda h}$.

Nous utilisons la relation

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{\lambda}=\binom{i+1}{\lambda+1}$$

pour une sommation par parties de (106 b)

$${}_kF_{\lambda h}=-\sum_{i=0}^{h}\binom{i+1}{\lambda+1}\left\{\binom{h}{i+1}B_{h-(i+1)}^{(-(i+1))}(-sp)\,s^{[i-k+1]}p^{i+1}-\binom{h}{i}B_{h-i}^{(-i)}(-sp)\,s^{[i-k]}p^i\right\}.$$

Le premier terme du second membre est égal à $-{}_kF_{\lambda+1,\,h}$. Dans le second terme nous changeons l'indice muet i en $(i-1)$ et décomposons le facteur $B_{h-i+1}^{(-i+1)}(-sp)$ en les trois termes

$$\frac{h+1}{i}B_{h-i+1}^{(-i)}(-sp)+\frac{h-i+1}{i}\left\{[sp-(\lambda+1)]-[i-(\lambda+1)]\right\}B_{h-i}^{(-i)}(-sp).$$

La sommation $\sum_i$ étant effectuée, ces trois termes donnent respectivement $\frac{1}{p}\,{}_{k+1}F_{\lambda+1,\,h+1}$, $\frac{sp-(\lambda+1)}{p}\,{}_{k+1}F_{\lambda+1,\,h}$ et $-\frac{\lambda+2}{p}\,{}_{k+1}F_{\lambda+2,\,h}$,

donc $p\,({}_kF_{\lambda h}+{}_kF_{\lambda+1,\,h})={}_{k+1}F_{\lambda+1,\,h+1}+(sp-\lambda-1)\,{}_{k+1}F_{\lambda+1,\,h}-(\lambda+2)\,{}_{k+1}F_{\lambda+2,\,h}$.

Exprimant les ${}_kF$ dans cette équation par des ${}_{k+1}F$ à l'aide de la relation $${}_{k-1}F_{\lambda h}=(s+k-\lambda)\,{}_kF_{\lambda h}-(\lambda+1)\,{}_kF_{\lambda+1,\,h}$$
que l'on tire sans peine de la définition (106 b), il vient

$${}_kF_{\lambda+1,\,h+1}=(s-\lambda+k)\,p\,{}_kF_{\lambda h}+[(\lambda+1)(q-p)+kp]\,{}_kF_{\lambda+1,\,h}+(\lambda+2)\,q\,{}_kF_{\lambda+2,\,h}$$

d'où pour $k=0$

$$(107)\quad F_{\lambda h}=q(\lambda+1)\,F_{\lambda+1,\,h-1}+\lambda(q-p)\,F_{\lambda,\,h-1}+(s-(\lambda-1))\,p\,F_{\lambda-1,\,h-1}\ (0\lesseqgtr\lambda).$$

Corollaire. La formule (107) peut être utilisée pour le calcul numérique des moments *binomiaux*. En effet on a $F_{hh}=s^{[h]}p^h$ et $F_{0h}=$moment *binomial* μ_h. On peut par exemple établir un schéma de calcul où l'on numérote les lignes $h=0,1,\cdots$ et les colonnes $\lambda=0,1,\cdots$. On pose les moments factoriels $s^{[h]}p^h$ dans la diagonale descendante et l'on calcule les quantités $F_{\lambda h}$ ligne par ligne de droite à gauche. La dernière quantité calculée sur chaque ligne est le moment binomial μ_h.

Pour le contrôle on fera usage de la formule $\sum_{\lambda=0}^{h}(-)^{\lambda}F_{\lambda h}=(-sp)^h$. On obtient cette formule en prenant la somme alternée de l'équation (104), λ étant l'indice muet.

Nous allons [illegible]ant nous servir des formules (103) et (107) pour le calcul effectifs d[illegible]cients U dans la formule (98 c). Pour cela il sera avantageux de m[illegible] et F sous les formes

$$(108\,a)\qquad \varphi_{\lambda i}=(q-p)^{\frac{1-(-)^i}{2}}\, q^{i-\lambda} \sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}\frac{2\lambda-i}{2}} {}_{\lambda}a_{2\lambda-i+1,k}\, r^k \qquad (0<\lambda)$$

$$(108\,b)\qquad F_{\lambda h}=(q-p)^{\frac{1-(-)^{h-\lambda}}{2}}\, \frac{(s-1)^{[\lambda-1]}\, p^{\lambda-1}}{q} \sum_{\varrho=1}^{g} \sum_{k=0}^{g-\varrho} {}_{\lambda-1}\beta_{h-\lambda+2,\varrho,k}\, \mu^{\varrho}\, r^k . \quad (0 \gtreqless \lambda)$$

$$g=\mathrm{Ent}\,\frac{h-\lambda+2}{2}$$

Les α et les β étant des coëfficients numériques indépendants de n, s et p. La possibilité de mettre φ et F sous les formes ci-dessus peut facilement être démontrée par une conclusion de λ à $(\lambda+1)$ utilisant les relations (103) et (107). Portant les expressions (108 a) et (108 b) dans les équations (103) et (107) respectivement, et identifiant les deux membres, on obtient après quelques réductions les formules suivantes pour les α et les β

$$(109\,a)\qquad {}_{\lambda}a_{ik}=(i-\lambda-1)_{\lambda-1}\, a_{i-2,k-1}+(2\lambda-i)_{\lambda-1}\, a_{i-1,k}+(2\lambda-i)_{\lambda-1}\, a_{ik}+ \\ +2\,((-)^i-1)\,(2\lambda-i)_{\lambda-1}\, a_{i-1,k-1} \qquad (1<\lambda)$$

$$(109\,b)\qquad {}_{\lambda}\beta_{h\varrho k}={}_{\lambda-1}\beta_{h\varrho k}+(\lambda+2)_{\lambda+1}\,\beta_{h-2,\varrho-1,k}-(\lambda+1)\,(\lambda+2)_{\lambda+1}\,\beta_{h-2,\varrho,k-1} \\ +(\lambda+1)\,{}_{\lambda}\beta_{h-1,\varrho,k}-2\,(1+(-)^h)\,(\lambda+1)\,{}_{\lambda}\beta_{h-1,\varrho,k-1} \qquad (0 \gtreqless \lambda).$$

Avec les conditions initiales

$${}_{1}a_{10}=1 \quad {}_{\lambda}a_{ik}=0 \text{ pour } \lambda<1 \quad \text{ou } i<1 \text{ ou } k<0$$

$${}_{\lambda}\beta_{210}=1 \;\; {}_{\lambda}\beta_{h\varrho k}=0 \text{ pour } \lambda<-1 \text{ ou } h<2 \text{ ou } \varrho<1 \text{ ou } k<0 .$$

Voyons maintenant comment on peut exprimer les coëfficients numériques U de la formule (98 c) en fonction des α et des β. Portons d'abord les expressions (108 a) et (108 b) dans la formule (105), ce qui conduit à l'expression suivante (109 c) $\dfrac{(-)^{\lambda}\,(q-p)^{\frac{(-)^h-1}{2}}\, F_{\lambda h}}{(s-1)^{[\lambda]}}=$

$$=\sum_{j=0}^{\lambda-1}\ \sum_{\substack{\varrho=1\\ \varkappa,\,k=0}} (q-p)^{\frac{1+(-)^{\lambda+j}+(-)^{h+j+\lambda}+(-)^h}{2}}\,(s-1-\lambda)^{[j]}\,{}_{\lambda}a_{\lambda-j,\varkappa}\cdot{}_{\lambda+j}\beta_{h+1-(\lambda+j),\varrho,k}\cdot\mu^{\varrho}\, r^{j+k+\varkappa}.$$

Nous n'avons pas indiqué les limites supérieures des sommations $\sum\limits_{\varrho\varkappa k}$ ces sommations devant être étendues jusqu'au dernier terme qui ne s'évanouit pas.

Puisque $1+(-)^{\lambda+j}+(-)^{\lambda+j+h}+(-)^h=(1+(-)^h)\,(1+(-)^{\lambda+j})$ nous avons

$$(q-p)^{\frac{1+(-)^{\lambda+j}+(-)^{\lambda+j+h}+(-)^h}{2}}=1-(1+(-)^h)\,(1+(-)^{\lambda+j})\, r .$$

D'autre part développons $(s-1-\lambda)^{[j]}$ suivant les puissances de s

$$(s-1-\lambda)^{[j]}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} B_{j-i}^{(j+1)}(-\lambda)\, s^i .$$

Posons $B_{ji\lambda} = \binom{j}{i} B_{j-i}^{(j+1)}(-\lambda)$. La valeur numérique des $B_{ji\lambda}$ se calcule facilement à l'aide de l'équation $B_{ji\lambda} = B_{j-1,i-1,\lambda} - (\lambda+j)\, B_{j-1,i,\lambda}$, $B_{jj\lambda} = 1$ $B_{j0\lambda} = (-)^j (\lambda+j)^{[j]}$ que l'on tire de (22).

Cela étant, désignons les indices muets ϱ et k par ϱ' et k'. Les sommations du second membre de (109 c) seront $\sum\limits_{j}^{\lambda-1} \sum\limits_{0}^{\lambda-1} \sum\limits_{i}\sum\limits_{0}^{\varkappa} \sum\limits_{0}\sum\limits_{\varrho' k'}$. Introduisons deux nouveaux indices muets ϱ et k et éliminons les indices i et $\varkappa$ par les équations $\varrho'+i=\varrho$, $k'+\varkappa+j-i=k$. Les nouvelles sommations du second membre seront $\sum\limits_{\varrho k} \mu^{\varrho} r^k \sum\limits_{j=0}^{\lambda-1} \sum\limits_{\varrho' k'}$. Identifiant cette expression à l'expression de

$$(-)^{\lambda}(q-p)^{\frac{(-)^h-1}{2}} \frac{F_{\lambda h}}{(s-1)^{[\lambda]}} = (-)^{\lambda}(q-p)^{\frac{(-)^h-1}{2}} \mathfrak{f}_{\lambda h},$$

tirée de (98 c), nous avons en définitive

$$(110\text{ a})\qquad (-)^{\lambda}\,{}_{\lambda}U_{h\varrho k} = \sum_{j=0}\sum_{\varrho' k'} B_{j,\varrho-\varrho',\lambda}\cdot {}_{\lambda}\alpha_{\lambda-j,\varrho+k-j-(\varrho'+k')} \{ {}_{\lambda+j}\beta_{h+1-(\lambda+j),\varrho',k'}$$
$$-(1+(-)^h)\,(1+(-)^{\lambda-j})\; {}_{\lambda+j}\beta_{h+1-(\lambda+j),\varrho',k'-1} \}.$$

Il suffit d'étendre la sommation $\sum\limits_{j}$ jusqu'au plus petit des nombres $\lambda-1$ et $h-\lambda-1$ parce que pour $h-\lambda-1<j$ on a $h+1-(\lambda+j)<2$ ce qui montre que β s'évanouit.

Pour le calcul numérique on doit disposer les quantités ${}_{\lambda}\beta_{h\varrho' k'}$ dans un schéma analogue au tableau des quantités U ci-dessus. Dans la formule (110 a) on prend alors la sommation $\sum\limits_{j}$ comme sommation principale, chaque terme de cette somme étant formé par les quantités sur la ligne correspondante du schéma des β multipliées par les facteurs α et B. Remarquons enfin que l'on pourra aussi obtenir une formule qui sera récurrente directement en les U. Pour cela on pourra porter l'expression (98 d) dans l'équation (93 c) et identifier les deux membres. Pourtant la formule obtenue sera une formule récurrente *complète* et assez difficile à manier. Nous avons trouvé plus avantageux de décomposer le calcul en introduisant les α et les β pour lesquels on a les formules récurrentes *incomplètes* (109 a b).

Pour des calculs numériques tels que ceux de la formule (110 a) il est indispensable d'avoir des formules de contrôle. Nous allons démontrer que pour $2 \gtreqless h$ on a la règle que voici: h, ϱ et k étant quelconques, la somme des coëfficients ${}_{\lambda}U_{h\varrho k}$ étendue au seul indice muet λ est égale à zéro. C'est-à-dire

$$(110\text{ b})\qquad \sum_{\lambda=0}^{h-1} {}_{\lambda}U_{h\varrho k} = 0.$$

Cette formule est d'un emploi très efficace et sûr. Elle a entr'autres l'avantage que la sommation de contrôle est assez restreinte de façon qu'il soit possible de localiser une erreur éventuelle. Pour démontrer la formule (110 b) nous allons employer certains passages à la limite. Nous donnons d'abord un exemple qui montre la nature de cette méthode.

Considérons le moment moyen *binomial*

$$\mu_h = \sum_{r=0}^{s} (r - sp)^h \binom{s}{r} p^r q^{s-r}. \tag{111 a}$$

Puisque le moment binomial est la limite du moment hypergéometrique pour $n \to \infty$ (s constante), nous avons pour le moment binomial

$$\mu_h = (q-p)^{\frac{1-(-)^h}{2}} \sum_{\varrho=1}^{g} \sum_{k=0}^{g-\varrho} U_{h\varrho k}\, \mu^{\varrho}\, r^k. \tag{111 b}$$

$U_{h\varrho k}$ désignant les coëfficients ${}_0U_{h\varrho k}$ c'est-à-dire les coëfficients V et W des formules (59 ab). Considérons la somme $S_h = \sum_{\varrho k} U_{h\varrho k}$ définie au § 4 du chap. II. La formule (111 b) montre que S_h est égal à la valeur que prend $(q-p)^{\frac{(-)^h-1}{2}} \mu_h$ pour $r = pq = 1$ et $\mu = spq = 1$, c'est à-dire pour

$$s = 1,\ p = e^{-\frac{\pi}{3}i},\ q = e^{+\frac{\pi}{3}i},\ (q-p) = i\sqrt{3},\ (i = \sqrt{-1}). \tag{111 c}$$

Cependant cette valeur de $(q-p)^{\frac{(-)^h-1}{2}} \mu_h$ peut être tirée de (111 a). On trouve pour $s=1$: $S_h = (q-p)^{\frac{(-)^h-1}{2}} (q^{h-1} + (-)^h p^{h-1})$.

Introduisant les valeurs (111 c) nous avons

$$S_h = \begin{cases} e^{(h-1)\frac{\pi}{3}i} + e^{-(h-1)\frac{\pi}{3}i} = 2\cos\frac{h-1}{3}\pi & (h \text{ pair}) \\ \dfrac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{(h-1)\frac{\pi}{3}i} - e^{-(h-1)\frac{\pi}{3}i}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin\dfrac{h-1}{3}\pi & (h \text{ impair}) \end{cases}$$

ce qui montre que l'on a $S_h = 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2,\ -1$ suivant que

$$h \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad (\text{mod. } 6).$$

C'est le résultat déjà obtenu par une autre méthode.

Quand il s'agit du moment hypergéométrique, le passage à la limite $s \to 1$ (avec $n \neq 1, 2, \cdots (h-1)$) ne donne pas de résultats en dehors de ceux que nous connaissons déjà. Pour obtenir de nouveaux résultats il faut en outre laisser n tendre vers s. Mais alors il faut faire attention à l'ordre des passages aux limites, le résultat n'étant plus le même si cet ordre est renversé. La formule (98 d) montre que la somme triple $\sum_{\lambda\varrho k} {}_\lambda U_{h\varrho k}$ est égale à $\lim_{s\to 1} \lim_{n \to s} (i\sqrt{3})^{\frac{(-)^h-1}{2}} \mu_h$ pour $p = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, où l'on suppose que l'on laisse d'abord n tendre vers s et ensuite s vers 1. Pour trouver la valeur de cette limite on peut utiliser la formule de M. PEARSON (73 c) par une conclusion de $(h-1)$ à h. On a d'abord $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = spq\dfrac{n-s}{n-1}$, donc $\lim_{n\to s} \mu_2 = 0$.

Puisque pour $n = s$, le second membre de (93 c) est une forme linéaire et *homogène* en les quantités $\mu_2\, \mu_3 \cdots \mu_{h-1}$, on voit que $\lim\limits_{n \to s} \mu_h$ est égale à zéro pourvu que la limite des $\mu_2\, \mu_3 \cdots \mu_{h-1}$ soit nulle. La relation

(112 a) $$\lim_{n \to s} \mu_h = 0 \qquad (0 < h)$$ est donc générale.

D'où $$\sum_{\lambda \varrho k} {}_\lambda U_{h\varrho k} = 0$$ h étant quelconque.

Cette formule peut être généralisée. En effet pour démontrer (112 a) nous n'avons rien supposé sur s et p. On peut donc effectuer le passage à la limite $n \to s$ seul, μ et r étant quelconques. Le second membre de la relation

$$\lim_{n \to s} (q-p)^{\frac{(-)^h - 1}{2}} \mu_h = \sum_{\varrho k} \mu^\varrho r^k \sum_{\lambda=0}^{h-1} {}_\lambda U_{h\varrho k}$$

tirée de (98 d) sera un polynome en μ et r, dont les coëfficients sont les sommes $\sum\limits_{\lambda} {}_\lambda U_{h\varrho k}$. Puisque le premier membre est nul en vertu de (112 a) μ et r étant quelconques, il faut que les coëfficients du second membre soient nuls séparément, d'où l'on tire la formule (110 b).

Le tableau 5 donne les premiers coëfficients U calculés à l'aide de la formule (110 a) et contrôlés par (110 b). Comme dans les tableaux précédents nous avons inscrit dans les en-têtes non seulement la valeur des indices $\lambda h \varrho k$ mais aussi les quantités auxquelles ${}_\lambda U_{h\varrho k}$ appartient comme coëfficient. Cette disposition permet d'utiliser le tableau sans être obligé de tenir compte de la signification des indices. Ainsi par exemple on peut immédiatement écrire l'expression de μ_3,

$$\mu_3 = (q-p)\, spq \left\{ 1 - 3\,\frac{s-1}{n-1} + 2\,\frac{(s-1)^{[2]}}{(n-1)^{[2]}} \right\}.$$

Quant à l'expression indépendante des coëfficients on pourrait l'obtenir en introduisant les nombres B. La marche à suivre serait à peu près la même qu'au chap. II. Pourtant la multiplicité des signes Σ dans l'expression obtenue rendrait son utilité à peu près illusoire. C'est pourquoi nous ne donnons pas ces formules.

§ 4. Expressions asymptotiques.

Le plus souvent dans les applications n est un «très grand» nombre, quelquefois il est même «très grand» par rapport à s, s étant lui-même un «très grand» nombre. Dans le cas où n est grand par rapport à s on est conduit à envisager les termes du développement (98 b) comme le terme principal et les termes supplémentaires de μ_h. Dans la première partie du présent paragraphe nous considérons les coëfficients $\mathfrak{f}_{\lambda h} = \frac{F_{\lambda h}}{(s-1)^{\lambda}}$ du

Tableau 5.

$_{\lambda}U_{h\varrho k}$				$\varrho=1$			$\varrho=2$		$\varrho=3$
				$k=0$	1	2	$k=0$	1	$k=0$
				μ	μr	μr^2	μ^2	$\mu^2 r$	μ^3
$h=2$	$\lambda=0$	$\mu_2=$	1	1					
	1		$\frac{s-1}{n-1}$	-1					
$h=3$	$\lambda=0$	$\frac{\mu_3}{q-p}=$	1	1					
	1		$\frac{s-1}{n-1}$	-3					
	2		$\frac{(s-1)^{[2]}}{(n-1)^{[2]}}$	2					
$h=4$	$\lambda=0$	$\mu_4=$	1	1	-6		3		
	1		$\frac{s-1}{n-1}$	-7	36		-6		
	2		$\frac{(s-1)^{[2]}}{(n-1)^{[2]}}$	12	-57		3		
	3		$\frac{(s-1)^{[3]}}{(n-1)^{[3]}}$	-6	27		0		
$h=5$	$\lambda=0$	$\frac{\mu_5}{q-p}=$	1	1	-12		10		
	1		$\frac{s-1}{n-1}$	-15	120		-40		
	2		$\frac{(s-1)^{[2]}}{(n-1)^{[2]}}$	50	-330		50		
	3		$\frac{(s-1)^{[3]}}{(n-1)^{[3]}}$	-60	350		-20		
	4		$\frac{(s-1)^{[4]}}{(n-1)^{[4]}}$	24	-128		0		

développement (98 b) sous ce point de vue. Dans la seconde partie nous considérons le développement asymptotique dans le cas ou n et s sont d'un même ordre.

Dans le premier cas on pourrait aussi envisager le développement de μ_h suivant les puissances négatives de n. Ce développement contiendra une infinité de termes. Bien que la série obtenue soit toujours convergente dans le cas que nous considérons, le développement (98 b) en un nombre fini de termes nous paraît plus intéressant. Pour cette raison nous nous bornons à indiquer rapidement comment le développement en série peut être effectué pour étudier plus à fond les coëfficients du développement

Tableau 5 (cont.).

$_\lambda U_{h\varrho k}$				$\varrho=1$			$\varrho=2$		$\varrho=3$
				$k=0$	1	2	$k=0$	1	$k=0$
				μ	μr	μr^2	μ^2	$\mu^2 r$	μ^3
$h=6$	$\lambda=0$	$\mu_6=$	1	1	−30	120	25	−130	15
	1		$\frac{s-1}{n-1}$	−31	540	−1 800	−180	870	−45
	2		$\frac{(s-1)^{[2]}}{(n-1)^{[2]}}$	180	−2 505	7 500	415	−1 915	45
	3		$\frac{(s-1)^{[3]}}{(n-1)^{[3]}}$	−390	4 755	−13 200	−390	1 740	−15
	4		$\frac{(s-1)^{[4]}}{(n-1)^{[4]}}$	360	−4 010	10 505	130	−565	0
	5		$\frac{(s-1)^{[5]}}{(n-1)^{[5]}}$	−120	1 250	−3 125	0	0	0
$h=7$	$\lambda=0$	$\frac{\mu_7}{q-p}=$	1	1	−60	360	56	−462	105
	1		$\frac{s-1}{n-1}$	−63	1 680	−7 560	−686	4 662	−525
	2		$\frac{(s-1)^{[2]}}{(n-1)^{[2]}}$	602	−11 550	44 100	2590	−15 645	945
	3		$\frac{(s-1)^{[3]}}{(n-1)^{[3]}}$	−2100	33 250	−113 400	−4270	23 730	−735
	4		$\frac{(s-1)^{[4]}}{(n-1)^{[4]}}$	3360	−46 690	146 265	3234	−16 863	210
	5		$\frac{(s-1)^{[5]}}{(n-1)^{[5]}}$	−2520	31 794	−93 093	−924	4 578	0
	6		$\frac{(s-1)^{[6]}}{(n-1)^{[6]}}$	720	−8 424	23 328	0	0	0

(98 b): $\mathfrak{f}_{\lambda h} = \dfrac{F_{\lambda h}}{(s-1)^{[\lambda]}}$ pour les premières valeurs de λ et des valeurs quelconques de $h\ (\overline{\gtrless} n)$.

Posons
$$\pi_i(z) = \frac{a^{[i]}}{n^{[i]}} = p\,\frac{(z-p)\left(z-\dfrac{p}{2}\right)\cdots\left(z-\dfrac{p}{i-1}\right)}{(z-1)\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\cdots\left(z-\dfrac{1}{i-1}\right)},\quad z=\frac{1}{n},\ (0<i)$$

$\pi_i(z)$ est une fonction régulière de z dans le cercle de rayon $\varrho = \dfrac{1}{h} < \dfrac{1}{h-1} \overline{\gtrless} \dfrac{1}{i-1}$ autour de l'origine des z et sur ce cercle lui-même.

Pour $|z| \overline{\overline{<}} \frac{1}{h}$ on peut donc développer $\pi_i(z)$ suivant les puissances négatives de n.

Développant le numérateur et le dénominateur de π_i comme des polynomes en n, nous trouvons d'abord

$$\pi_i = p^i \frac{\sum_{j=0}^{i-1} (-)^j C_{j,i-1} (pn)^{-j}}{\sum_{j=0}^{i-1} (-)^j C_{j,i-1} n^{-j}} \qquad (0 < i)$$

les $C_{j,i-1}$ ayant la signification de la formule (10a).

Utilisant la formule de HAGEN déjà citée, nous aurons pour $0 \overline{\overline{<}} i$

$$\pi_i = \frac{a^{[i]}}{n^{[i]}} = p^i \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-)^\lambda \Delta_{\lambda i} n^{-\lambda}, \text{ où } \Delta_{\lambda 0} = 0 \ (\lambda \neq 0),\ \Delta_{00} = 1$$

$$\Delta_{\lambda i} = \begin{vmatrix} C_{0,i-1} & C_{0,i-1} & 0 \cdots\cdots\cdots & 0 \\ -p^{-1} C_{1,i-1} & -C_{1,i-1} & +C_{0,i-1} \cdots\cdots & 0 \\ +p^{-2} C_{2,i-1} & +C_{2,i-1} & -C_{1,i-1} \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-)^\lambda p^{-\lambda} C_{\lambda,i-1}, & (-)^\lambda C_{\lambda,i-1}, & (-)^{\lambda-1} C_{\lambda-1,i-1} \cdots & -C_{1,i-1} \end{vmatrix} \quad 0 < i)$$

Pour μ_h on a par conséquence le développement

$$(113) \qquad \mu_h = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-)^\lambda}{n^\lambda} \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)} (-sp)\, s^{[i]} p^i \Delta_{\lambda i}$$

Puisque les $C_{j,i-1}$ peuvent être développés suivant les factorielles de i, il en est de même de $\Delta_{\lambda i}$. Pour le calcul des termes du développement (113) on retombe donc sur les quantités $F_{\lambda h}$ du § 3.

Voyons maintenant comment on peut obtenir l'expression des coëfficients $\mathfrak{f}_{\lambda h} = \frac{F_{\lambda h}}{(s-1)^{[\lambda]}}$ pour les premières valeurs de λ et des valeurs quelconques de h. Puisque on a pour $\lambda = 0$, $\mathfrak{f}_{0h} = F_{0h} =$ le moment *binomial* μ_h, il est naturel de se demander si les coëfficients d'ordre supérieur $\mathfrak{f}_{1h}, \mathfrak{f}_{2h}, \cdots$ peuvent être exprimés à l'aide des moments binomiaux, par exemple comme une forme linéaire et homogène en ces quantités. Pour démontrer la possibilité d'un tel développement nous allons trouver une expression du facteur $\frac{a^{[\nu]} b^{[s-\nu]}}{n^{[s]}}$ qui figure dans la définition (95).

Posons $\qquad \psi(n) = \frac{a^{[\nu]} b^{[s-\nu]}}{n} = p\,(a-1)^{[\nu-1]} b^{[s-\nu]}.$

Supposant d'abord $0 < \nu$ et développant $\psi(n)$ suivant les puissances de n, nous avons

$$\psi(n) = p^\nu q^{s-\nu} \sum_{k=0}^{s-1} n^{s-1-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{\nu-1}{i} \binom{s-\nu-1}{k-i} B_i^{(\nu)} B_{k-i}^{(s-\nu)} p^{-i} q^{-(k-i)}.$$

Cette formule que l'on a obtenue en supposant $0 < \nu$ est encore vérifiée pour $\nu = 0$. Nous en tirerons, Δ désigant une opération différentielle par rapport à n

$$\Delta^{s-\lambda-1}\,\psi(\lambda) = p^{\nu}\,q^{s-\nu}\sum_{k=0}^{s-1}\Delta^{s-\lambda-1}\,\lambda^{s-k-1}\sum_{i=0}^{k}\binom{\nu-1}{i}\binom{s-\nu-1}{k-i}B_i^{(\nu)}\,B_{k-i}^{(s-\nu)}\,p^{-i}\,q^{-(k-i)}.$$

Cela étant, on a pour un polynome quelconque $\psi(x)$ de degré m la formule

$$\psi(x) = \sum_{\lambda=0}^{m}\binom{x-a-\lambda}{m-\lambda}\,\Delta^{m-\lambda}\,\psi(a+\lambda-1) \quad (a \text{ une constante quelconque}),$$ que

l'on obtient par une transformation de la formule bien connue

$$\psi(x+b) = \sum_{\lambda=0}^{m}\binom{x}{\lambda}\,\Delta^{\lambda}\,\psi(b).$$

Le polynome $\psi(n)$ que nous considérons est de degré $(s-1)$, on a donc en faisant $a = 1$

$$\psi(n) = \binom{n-1}{s-1}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{(s-1)^{[\lambda]}}{(n-1)^{[\lambda]}}\,\Delta^{s-\lambda-1}\,\psi(\lambda).$$

Introduisant l'expression de $\Delta^{s-\lambda-1}\,\psi(\lambda)$ et remarquant que

$$\frac{\Delta^{s-\lambda-1}\,\lambda^{s-k-1}}{(s-1)!} = \frac{B_{\lambda-k}^{(\lambda-s+1)}(\lambda)}{(s-1)^{[k]}\,(\lambda-k)!}$$

nous aurons

$$\mu_h = \sum_{\lambda=0}\frac{(s-1)^{[\lambda]}}{(n-1)^{[\lambda]}}\sum_{k=0}^{\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{B_{\lambda-k}^{(\lambda-s+1)}(\lambda)}{(s-1)^{[k]}\,(\lambda-k)!}\,p^{-i}\,q^{-(k-i)}\,\underset{\text{bin}}{E}\,G_{ki}(\nu)\,.$$

$\underset{\text{bin}}{E}\,G_{ki}(\nu)$ désignant l'espérance mathématique du polynome

$G_{ki}(\nu) = (\nu - sp)^h\binom{\nu-1}{i}\binom{s-\nu-1}{k-i}B_i^{(\nu)}\,B_{k-i}^{(s-\nu)}$ sous la loi de distribution binomiale. $B_i^{(\nu)}$ et $B_{k-i}^{(s-\nu)}$ pouvant être exprimés comme des polynomes en ν et $(s-\nu)$ de degré i et $(k-i)$ respectivement, on voit que G_{ki} est le produit par $(\nu-sp)^h$ d'un polynome en ν de degré $2\,k$. Ce dernier polynome pouvant être ordonné suivant les puissances de $(\nu-sp)$ on en conclut que

$$(114)\quad F_{\lambda h} = (s-1)^{[\lambda]}\,\mathfrak{f}_{\lambda h} = \sum_{k=0}^{\lambda}\sum_{i=0}^{k}\binom{s-k-1}{\lambda-k}B_{\lambda-k}^{(-(s-\lambda-1))}(\lambda)\,p^{-i}\,q^{-(k-i)}\,\underset{\text{bin}}{E}\,G_{ki}(\nu)$$

est une forme linéaire et homogène en les moments *binomiaux* $\mu_h, \mu_{h+1}, \cdots \mu_{h+2\lambda}$. Abstraction faite du facteur $(pq)^{-\lambda}$ les coëfficients de cette forme seront des polynomes en s et p. En effet les coëfficients de G_{ki} sont de tels polynomes et il en est de même de $B_{\lambda-k}^{(-(s-\lambda-1))}(\lambda)$. Pour le reconnaître on peut par exemple imaginer que l'on développe le polynome B en question suivant les puissances de λ et que l'on exprime ensuite les nombres B qui y figurent comme des polynomes en l'indice supérieur. Pour les premières valeurs de λ on pourra même effectuer le calcul par la méthode que l'on vient d'indiquer, mais ici encore il sera plus avantageux de se servir d'une formule récurrente. En principe le problème est déjà résolu par les formules (107) et (103). En effet puisque F_{0h} (h quelconque) est égal au moment binomial μ_h, on peut exprimer aussi F_{1h}, $F_{2h} \cdots$ (h quelconque) comme des formes linéaires et homogènes en les μ_h, $\mu_{h+1} \cdots$ binomiaux. Puisque les $\varphi_{\lambda j}$ sont indépendants de h, la formule (105) répond à la question.

On peut toutefois abréger un peu le calcul en posant

$$ {}_\lambda a_j = (q-p)^{\frac{(-)^{j-1}-1}{2}} q^{j-\lambda-1} \varphi_{\lambda, 2\lambda-j+1}, \qquad {}_\lambda\beta_h = (\lambda+1)!\, q^{\lambda+1} F_{\lambda+1, \lambda+h-1}. $$

Les α étant des polynomes en $r=pq$ indépendants de h et de s, et les β étant comme les F des formes linéaires et homogènes en les μ_h binomiaux, à coëfficients dépendants de s et p. On calculera les α et les β de proche en proche par les formules suivantes tirées de (103) et (107)

$$ (115\,a) \quad {}_\lambda a_j = (j-\lambda-1)\, r \cdot {}_{\lambda-1}a_{j-2} + (2\lambda-j)_{\lambda-1}\, a_{j-1} + (2\lambda-j)_{\lambda-1}\, a_j $$
$$ + 2r((-)^j-1)(2\lambda-j)\, {}_{\lambda-1}a_{j-1} \qquad (1<\lambda) $$
$$ {}_1a_1 = 1 \qquad {}_1a_j = 0 \qquad \text{pour } j \neq 1. $$

$$ (115\,b) \quad {}_\lambda\beta_h = {}_{\lambda-1}\beta_{h+2} - \lambda(q-p)\, {}_{\lambda-1}\beta_{h+1} - \lambda(s-\lambda+1)\, r\, {}_{\lambda-2}\beta_{h+2} \qquad (0 \leqq \lambda) $$
$$ {}_{-1}\beta_h = \mu_{h-2} \text{ (binomial)} \qquad {}_\lambda\beta_h = 0 \text{ pour } \lambda < -1. $$

Ainsi on trouve par exemple

${}_\lambda a_1 = 1.3 \cdots (2\lambda-1)$	${}_{-1}\beta_h = \mu_{h-2}$
${}_2a_2 = 2$	${}_0\beta_h = \mu_h$
${}_3a_2 = 20$	${}_1\beta_h = \mu_{h+2} - (q-p)\,\mu_{h+1} - spq\,\mu_h$
${}_3a_3 = 3(2-9r)$	etc.
etc.	

les μ_h désignant les moments binomiaux.

Les polynomes α et les formes β étant calculés, l'expression de $F_{\lambda h}$ comme une forme linéaire et homogène en les μ binomiaux, est donnée par la formule

$$ (115\,c) \qquad F_{\lambda h} = (-r)^{-\lambda} \sum_{j=\lambda+1}^{2\lambda} \frac{(q-p)^{\frac{1-(-)^j}{2}}}{j!}\, {}_\lambda a_{2\lambda-j+1} \cdot {}_{j-1}\beta_{h-j+2} \qquad (0<\lambda) $$

que l'on tire sans peine de (105)

Voici le résultat pour les premières valeurs de λ

$$ (116) \quad \mu_h \text{ (hypergéom.)} = \mu_h - \frac{1}{2!\,r(n-1)} \left\{ \mu_{h+2} - (q-p)\,\mu_{h+1} - \mu \cdot \mu_h \right\} $$
$$ + \frac{1}{4!\,r^2(n-1)^2} \left\{ \begin{array}{l} 3\mu_{h+4} - 10(q-p)\,\mu_{h+3} + (9-12r-18\mu)\,\mu_{h+2} \\ -(q-p)(2+12r-18\mu)\,\mu_{h+1} - \mu(2+10r-9\mu)\,\mu_h \end{array} \right\} $$
$$ - \frac{1}{(n-1)^3} \left\{ \cdots \right\} + \cdots $$

Les μ_h du second membre étant les moments binomiaux. Cette formule nous semble assez intéressante parce qu'elle rattache le calcul des moments hypergéométriques au calcul des moments binomiaux.

La condition pour que les termes du second membre de (116) puissent être considérés comme des approximations successives pour le μ_h hypergéométriques, est que n soit grand par rapport à s. Il n'y a que dans ce cas que l'ordre des termes en $\frac{1}{(n-1)^{[\lambda]}}$ vont en décroissant.

Dans le cas où n et s sont des quantités d'un même ordre il n'en sera pas ainsi. Dans ce cas le *coëfficient* de $\frac{1}{(n-1)^{[\lambda]}}$ est d'ordre $(g+\lambda)$, g désignant Ent $\left(\frac{h}{2}\right)$, de façon à ce que tous les termes du second membre de (116) soient de même ordre. Pour le reconnaître considérons par exemple le terme en $\frac{1}{(n-1)^{[2]}}$. Le μ_h binomial est d'ordre $g=\text{Ent}\left(\frac{h}{2}\right)$ en s, ou en $\mu=spq$ ce qui revient au même si p est considéré comme une constante finie différente de zéro et de l'unité. Les termes entre $\{\ \}$ dans le coëfficient de $\frac{1}{(n-1)^{[2]}}$ sont donc ou bien alternativement d'ordre $(g+2)$ et $(g+1)$, (si $h=2g$), ou bien tous d'ordre $(g+2)$, (si $h=2g+1$). Dans tous les cas le terme en $\frac{1}{(n-1)^{[2]}}$ est d'ordre g. Et il en est de même des autres termes. Dans le cas où n et s sont d'un même ordre il faut donc envisager l'expression asymptotique sous une autre forme.

Posons $\frac{n-s}{n}=c$. S'il s'agit d'un relevé représentatif, $1-c=\frac{s}{n}$ représente le pourcentage des éléments qui sont relevés. Dans tout ce qui suit nous considérons c comme une constante finie. Posons en outre $\mu^{-1}=\frac{1}{spq}=z$. Nous allons démontrer que si l'ordre h du moment hypergéométrique μ_h ne surpasse pas $\frac{s}{1-c}=n$, le quotient $\frac{\mu_h}{\mu^g}$ peut être développé en série de puissances non négatives de z. Les coëfficients de ce développement ne dépendant que de c et p. D'une façon plus précise le rayon de convergence de cette série est égal à $\frac{1}{(1-c)\,(h-1)pq}$. Il découle des propriétés des séries de puissances que tant que $h \lesseqgtr \frac{s}{1-c}=n$ la convergence sera même absolue et uniforme en z ou en s, ce qui revient au même si p est une constante finie entre zéro et l'unité.

La proposition est exacte pour $h=2$, puisqu'on a

$$\frac{\mu_2}{\mu}=c\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right].$$

Puisque $\frac{1}{n} = (1-c)\,pqz$, on voit que le rayon de convergence de la série corre[...]dante en z est égal à $\frac{1}{(1-c)(h-1)pq}$ pour $h=2$.

Cela étant, nous allons utiliser la formule (94 b) pour une conclusion de $(h-1)$ à h...

Remarquons que l'on a $s=\frac{1}{r}z^{-1}$, $n=\frac{1}{r(1-c)}z^{-1}$, $n-s=\frac{c}{r(1-c)}z^{-1}$, $n-2s=\frac{2c-1}{r(1-c)}z^{-1}$, $\frac{1}{n-(h-1)}=r(1-c)\,z\sum_{i=0}^{\infty}[(1-c)(h-1)r]^i z^i$.

Pour $0<l$ on a par hypothèse $z^{\mathrm{Ent}\frac{h-l}{2}}\mu_{h-l}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{h-l,k}\,z^k$, les $A_{h-l,k}$ ne dépendant que de c et p et le rayon de convergence étant égal à $\frac{1}{(1-c)(h-l-1)r}$. On aura donc en divisant la formule (94 b) par $(n-(h-1))$

$$
\begin{aligned}
(117^*)\qquad 2z^g\mu_h = & \sum_{j=1} z^{j-1}\left\{2c\binom{h-1}{2j-1}-\binom{h-1}{2j}z\right. \\
& \left.+2r(1-c)\binom{h-1}{2j+1}z^2\right\}\sum_{i=0}^{\infty}[(1-c)(h-1)r]^i z^i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}A_{h-2j,k}\,z^k \\
& +(q-p)(2c-1)\sum_{j=1} z^{j+\frac{(-)^h-1}{2}}\binom{h-1}{2j-1}\sum_{i=0}^{\infty}[(1-c)(h-1)r]^i z^i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}A_{h-2j+1,k}\,z^k.
\end{aligned}
$$

La sommation $\sum_{j=1}$ du second membre contient un nombre fini de termes. Chaque terme est le produit de deux séries de puissances. Le rayon de convergence de la première de ces séries est égal à $\frac{1}{(1-c)(h-1)r}$, le rayon de l'autre est plus grand puisqu'il est par hypothèse $\frac{1}{(1-c)(h-2j-1)r}$ ou $\frac{1}{(1-c)(h-2j)r}$ respectivement, j étant supérieur ou égal à l'unité. Le produit considéré est donc lui-même une série de puissances dont le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{(1-c)(h-1)r}$. De plus, le coëfficient qui figure avant le produit considéré ne contient jamais de puissance négative de z.

D'autre part la somme d'un nombre fini de séries à rayon $\frac{1}{(1-c)(h-1)r}$ est elle-même une série de même espèce, ce qui démontre la proposition.

Pour obtenir les coëfficients A du développement dont nous avons démontré l'existence, on pourra se servir des nombres B. Toutefois l'expression ainsi obtenue contiendra des opérations de sommation dont l'ordre augmente avec h. Nous allons considérer une autre expression qui nous parait plus intéressante. C'est l'expression des coëfficients comme le produit par une exponentielle de certaines factorielles en $g=\text{Ent}\left(\frac{h}{2}\right)$. Nous nous bornerons à considérer les deux premiers termes du développement.

Développant (117*) suivant les puissances de z pour $h=2g$ et $h=2g+1$ respectivement et identifiant les deux membres nous obtiendrons les formules récurrentes

(117 a) $$A_{2g,0}-c(2g-1)A_{2(g-1),0}=0.$$

(117 b) $$A_{2g+1,0}-2cgA_{2(g-1)+1,0}=(q-p)(2c-1)gA_{2g,0}.$$

(117 c)
$$A_{2g,1}-c(2g-1)A_{2(g-1),1}=r(1-c)(2g-1)A_{2g,0}-\frac{(2g-1)(g-1)}{2}A_{2(g-1),0}$$
$$+c\frac{(2g-1)(2g-3)(g-1)}{3}A_{2(g-2),0}+(q-p)(2c-1)\frac{2g-1}{2}A_{2(g-1)+1,0}.$$

(117 d) $$A_{2g+1,1}-2cgA_{2(g-1)+1,1}=2r(1-c)gA_{2g+1,0}-\frac{(2g-1)g}{2}A_{2(g-1)+1,0}$$
$$+2c\frac{(2g-1)g(g-1)}{3}A_{2(g-2)+1,0}$$
$$+(q-p)(2c-1)\left\{gA_{2g,1}+\frac{(2g-1)g(g-1)}{3}A_{2(g-1),0}\right\}$$

avec les conditions initiales.

$$A_{10}=A_{11}=0 \qquad A_{20}=c \qquad A_{21}=c(1-c)r.$$

Par des applications répétées de (117 a) on trouve sans peine

(118 a) $$A_{2g,0}=1.3\cdots(2g-1)c^g.$$

Portant cette expression dans (117 b) nous trouvons pour $A_{2g+1,0}$ l'équation aux différences

$$A_{2g+1,0}-2cgA_{2(g-1)+1,0}=(q-p)(2c-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2g-1)gc^g.$$

La solution d'une équation aux différences linéaire avec second membre $f_\nu-q_\nu f_{\nu-1}=R_\nu$, est comme on le sait donnée par la formule

$$f_\nu=\sum_{i=0}^{n-1}q_\nu^{[i]}R_{\nu-i}+q_\nu^{[n]}f_{\nu-n} \quad (n \text{ un entier positif quelconque})$$

où la factorielle $q_\nu^{[i]}$ désignent le produit $q_\nu\cdot q_{\nu-1}\cdots q_{\nu-i+1}$.

Appliquant cette formule pour $n=g$ nous aurons à considérer une sommation qui peut être effectuée à l'aide de la formule (41 b), ce qui donne

(118 b) $$A_{2g+1,0}=(q-p)(2c-1)\ 1.3\cdots(2g+1)\frac{g}{3}c^g.$$

Portant les expressions (118 a b) dans (117 c) nous aurons pour $A_{2g,1}$ l'équation aux différences

$$A_{2g,1} - c(2g-1)A_{2(g-1),1} = 1.\,3 \cdots (2g-1)\,c^{g-1}(B_0 + B_1 g^{[1]} + B_2 g^{[2]})$$

les B étant indépendants de g

$$B_0 = \frac{1}{6}\left\{(2c-1)^2 + 1 - r\left(6c(1-c) + 4(2c-1)^2\right)\right\}$$

$$B_1 = -\frac{1}{6}\left\{(2c-1)^2 + 1 - r\left(12c(1-c) + 4(2c-1)^2\right)\right\}$$

$$B_2 = \frac{(2c-1)^2}{3}(1-4r).$$

La même méthode que tout à l'heure permet encore de résoudre la dernière équation, ainsi que l'équation

$$A_{2g+1,1} - 2cg\,A_{2(g-1)+1,1} =$$
$$= (q-p)(2c-1)\,1.\,3 \cdots (2g-1)\,c^{g-1}(C_1 g^{[1]} + C_2 g^{[2]} + C_3 g^{[3]} + C_4 g^{[4]})$$

obtenue en portant (118ab) dans (117d). Les C sont comme les B des expressions linéaires en r indépendants de g.

Nous avons réuni les résultats[1] dans le tableau 6, qui est l'analogue du tableau 4 pour les moments binomiaux. Si l'on pose $c=1$ dans le tableau 6, on retombe sur les coëfficients des deux premières colonnes du tableau 4.

Tableau 6.

Expression asymptotique		Première approx.	Deuxième approx.	
		$(c\mu)^g$	$+(c\mu)^{g-1}$	
		1	1	$+r$
$\dfrac{\mu_{2g}}{1\cdot 3\cdots(2g-1)} =$	1	1	.	.
	$g^{[1]}$	.	.	f
	$g^{[2]}$	.	$\frac{1}{6}(1-6f)$	$-\ (1-5f)$
	$g^{[3]}$	.	$\frac{1}{9}(1-4f)$	$-\frac{4}{9}(1-4f)$
$\dfrac{\mu_{2g+1}}{(q-p)(c-b)\,1\cdot 3\cdots(2g+1)} =$	$g^{[1]}$	$\frac{1}{3}$	.	f
	$g^{[2]}$	.	$\frac{1}{30}(1-12f)$	$-\frac{1}{15}(6-47f)$
	$g^{[3]}$	.	$\frac{1}{18}(1-6f)$	$-\frac{1}{3}(1-5f)$
	$g^{[4]}$	.	$\frac{1}{81}(1-4f)$	$-\frac{4}{81}(1-4f)$

$r = pq = p(1-p)$, $\quad f = bc = c(1-c)$, $\quad c = \dfrac{n-s}{n}$, $\quad$ donc $c\mu = p(1-p)\,c(1-c)\,n$.

[1] L'expression de la *première* approximation (première colonne du tableau 6) peut aussi être tirée d'une formule que TSCHUPROW a obtenue par une autre méthode. Voir Metron. Vol. II (1923), p. 662.

Dans les applications ni n ni s sont de vrais infiniment grands. Entre le cas où il convient de considérer n comme grand par rapport à s et le cas ou l'on doit considérer ces quantités comme étant d'un même ordre, il y a des cas intermédiaires, où la succession des termes dont on doit tenir compte dans le calcul numérique par approximation, est ni la succession de la formule (116) ni celle du tableau 6. Pour ces cas intermédiaires on pourra utiliser le tableau 7.

Tableau 7.

Expression asymptotique dans deux sens		1			$-\frac{1}{(n-1)r}$		
		μ^g	$+\mu^{g-1}$		μ^{g+1}	$+\mu^g$	
		1	1	$-r$	1	1	$-r$
$\frac{\mu_{2g}}{1\cdot 3\cdots(2g-1)}=$	1	1	.	.	.	.	.
	$g^{[1]}$	.	.	.	1	.	1
	$g^{[2]}$	.	$\frac{1}{6}$	1	.	$\frac{7}{6}$	6
	$g^{[3]}$	.	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	.	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{3}$
	$g^{[4]}$	.	.	.	.	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{\mu_{2g+1}}{(q-p)\,1\cdot 3\cdots(2g+1)}=$	$g^{[1]}$	$\frac{1}{3}$	.	.	1	.	1
	$g^{[2]}$	.	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{3}$
	$g^{[3]}$	.	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	.	$\frac{53}{90}$	$\frac{17}{5}$
	$g^{[4]}$	.	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	.	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{9}$
	$g^{[5]}$	.	.	.	.	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$
		1	2		3	4	

Ce tableau n'est en somme autre chose qu'un tableau des coëfficients du développement de μ_h hypergéométrique en série double, la série étant ordonnée dans un sens par des factorielles, dans l'autre par des puissances. Nous avons préféré cette forme parce qu'alors le développement s'interrompt dans les deux sens avec un nombre fini de termes, de façon à ce que l'on évite toute question de convergence.

Pour calculer les coëfficients du tableau 7 nous avons développé les expressions entre $\{\ \}$ de la formule (116) suivant les puissances décroissantes $\mu^{g+\lambda}$, $\mu^{g+\lambda-1}$ à l'aide des coëfficients du tableau 4 et réuni les termes appartenant à une même combinaison des exposants de μ et n.

Si l'on voulait de servir du tableau 7 dans le cas où n et s sont des quantités d'un même ordre on aurait dû d'abord calculer la valeur de tous les termes (au nombre de h) de la première diagonale du haut en bas, non seulement les deux premiers termes (carrés 1, 3,) de cette diagonale qui figure dans le tableau[1]. Après ces calculs on aurait dû calculer tous les termes de la seconde diagonale, et ainsi de suite. Au contraire si n était «très grand» par rapport à s on aurait dû commencer par calculer tous les termes de la première ligne de gauche à droite. Dans le cas intermédiaire que nous considérons ici, il peut arriver qu'il convienne de calculer les termes dans un autre ordre. On doit en général commencer par calculer le premier terme de la première diagonale (ɔ: de la première ligne) et continuer par quelque terme dans le voisinage, par exemple le terme du carré 4. A ce sujet on ne peut établir de règle qui convient à tous les cas. Dans chaque cas particulier on se laissera guider par l'allure générale des valeurs absolues des termes. Ce procédé est évidemment peu satisfaisant au point de vue théorique, mais nous ne croyons pas qu'il soit possible d'arriver à des résultats plus précis sans avoir à sa disposition une expression maniable pour le reste.

Les problèmes que nous avons étudiés dans les chapitres II et III du présent travail relèvent de cette partie de la statistique mathématique que nous avons appelé la partie rationnelle. Ce sont des problèmes que l'on rencontre quand on cherche les distributions auxquelles donne lieu un schéma de réalisation donné.

Le problème inverse: comment remonter d'une distribution empirique donnée au schéma qui a donné naissance à la distribution observée, est un problème d'un aspect assez différent. Pour le traiter d'une façon approfondie on ne peut éviter d'entrer dans des questions philosophiques et plus particulièrement dans des questions qui relèvent de la théorie de la connaissance. Il nous semble que trop souvent les savants statisticiens et mathématiciens ont refusé d'entrer dans ces questions philosophiques pour se borner à traiter exclusivement les questions de la technique. C'est là croyons nous la raison de ce que l'interprétation critique du fondement et des méthodes de la statistique n'ont pas tenu pied au développement technique et l'extention croissante du champ d'application de notre discipline et dans le domaine des sciences sociales et dans le domaine des sciences de la nature.

[1] Les expressions «première diagonale» et «première ligne» se rapportent à la disposition que l'on aurait obtenue en ordonnant les colonnes 1, 2, 3, 4 du tableau 7 dans un tableau à double entrée ainsi: $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdot & & \\ 3 & 4 & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$ Il sera très désirable de calculer aussi les termes suivants. Une telle extension rendra le tableau applicable aussi dans le cas où la décroissance des termes à partir du carré 1 n'est pas très rapide.

Dans un travail publié en 1925 TSCHUPROW nous a fait connaître les premiers résultats de ses réflexions si profondes sur le fondement et l'interprétation critique des méthodes de la statistique[1]. Malheureusement ses recherches sur le sujet vont rester sans continuation. TSCHUPROW est décédé en avril 1926.

J'avais déjà longtemps réfléchi sur le sujet lorsque j'ai eu au printemps 1924 le bonheur d'entrer en relations avec TSCHUPROW, qui faisait à cette époque des conférences à l'Université d'Oslo. Depuis, mes études ont pour une grande partie été inspirées par les siennes. En particulier je n'ai pas cessé de m'occuper de ce que j'ai appelé plus haut le problème inverse. Sur ce point je suis arrivé à une conclusion assez différente de celle de TSCHUPROW. Je crois que la théorie des valeurs présomptives à laquelle TSCHUPROW attacha tant d'importance, ne peut rester sans altérations très sensibles.

J'espère pouvoir publier d'ici peu des développements relatifs à la théorie à laquelle je viens de faire allusion.

[1] Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. Leipzig 1925.