Sammenhengen mellem primærinvestering og reinvestering.

Av universitetsstipendiat dr. philos. Ragnar Frisch.

1. Innledning.

Dr. Schønheyder anmodet mig for en tid siden om å fremstille hans nye kriseteori i matematisk form. Nogen almindelig analyse av teorien har jeg ikke hatt anledning til å foreta. En slik er vel heller ikke nødvendig. Jeg har imidlertid festet mig ved et enkelt punkt hvis teoretiske innhold vanskelig lar sig illustrere ved enkle talleksempler og hvis matematiske analyse derfor kanskje han være av en viss interesse. Det gjelder et punkt som flere forfattere har vært inne på under studiet av de cykliske bevegelser i det økonomiske liv, nemlig sammenhengen mellem en gitt primærinvestering og den reinvestering som er nødvendig for å vedlikeholde de konkrete kapitalgjenstande der er skapt ved den givne primærinvestering. Formålet for den følgende analyse er kun å bringe rede i denne sammenheng, ikke å undersøke hvilke konsekvenser som herav kan trekkes for den generelle kriseteori.

Selvom ideen og foranledningen til de følgende betraktninger er utgått fra dr. Schønheyder, sier det sig selv at dr. Schønheyder er uten ansvar for riktigheten av de resultater jeg gir. Det synspunkt hvorefter jeg har anlagt analysen, nemlig sondringen mellem hvad jeg har kalt det tallteoretiske fenomen, distribusjonsfenomenet og repetisjonsfenomenet, faller forøvrig ikke helt sammen med dr. Schønheyders synspunkt efter hvad jeg har forstått av den fremstilling av teorien som dr. Schønheyder har gitt overfor mig.

Det foreliggende problem kan illustreres ved følgende simplifiserte eksempel. La oss tenke oss at der på et visst tidspunkt skjer en primærinvestering (nyinvestering) der omfatter fremstillingen av en trehammer, en jernhammer og en stålhammer. Trehammeren har en varighet av ett år, jernhammeren to år og stålhammeren tre år. Vi forutsetter at hamrene blir fornyet eftersom de slites ut.

Det første år efterat primærinvesteringen fant sted melder trehammeren sig til fornyelse, næste år kommer trehammeren og jernhammeren, det tredje år trehammeren og stålhammeren, det fjerde år trehammeren og jernhammeren, det femte år kommer trehammeren alene, og det sjette år kommer alle tre på en gang.

Den årlige reinvestering som den givne primærinvestering foranlediger, er altså langt fra konstant. Der er en tydelig fluktuasjon. Spørsmålet er hvilken økonomisk betydning man skal tillegge denne fluktuasjon. Jeg skal i avsnitt 2 søke å vise at den fluktuasjon i den årlige reinvestering som fremkommer i dette eksempel ikke kan tillegges nogen økonomisk betydning. Den skyldes primtallssammensetningen av tallene 1—6 i forbindelse med det vilkårlige valg av tidsenhet i eksemplet. Man kan nemlig bevise at hvis fordelingen av primærinvesteringen efter kapitalgjenstandenes varighet er finere inndelt f. eks. med klassevidde på et kvartal eller en måned, så vil fluktuasjonene i den årlige reinvestering bli dempet, og ved en kontinuerlig betraktning forsvinner de ganske. Dette fenomen kaller jeg det talltenoretiske fenomen.

Derimot er det en annen slags fluktuasjon i den årlige reinvestering som ikke forsvinner ved en kontinuerlig betraktning og som derfor må tillegges en økonomisk betydning. Sett at primærinvesteringen ikke består av en trehammer, en jernhammer og en stålhammer, men av en trehammer, tre jernhammere og en stålhammer. Fordelingen av de konkrete kapitalgjenstande efter varighet er altså ikke lenger uniform, men unimodal. Kapitalgjenstandene er fordelt omkri en viss typisk

varighet (to år). I dette tilfelle vil den årlige reinvestering opvise visse (tilnærmelsesvis periodiske) fluktuasjoner som ikke forsvinner når man går over til en kontinuerlig betraktning. Dette fenomen kaller jeg distribusjonsfenomenet for å antyde at det skyldes de konkrete kapitalgjenstandes statistiske distribusjon efter varighet.

Også ved distribusjonsfenomenet vil der skje en dempning av fluktasjonene i den årlige reinvestering, nemlig i den forstand at jo lenger man i tid fjerner sig fra det tidspunkt da primærinvesteringen fant sted, desto slakere vil utslagene i reinvesteringen bli. Efter en viss tids forløp blir de praktisk talt umerkelige. Den årlige reinvestering holder sig fra nu av tilnærmelsesvis konstant. Man kan si at de betraktede kapitalgjenstande nu er sunket ned til å bli en intergrerende del av den i samfundet gjennemløpende kapital, hvorav der hvert år melder sig til fornyelse en viss konstant mengde. Dette dempningsfenomen er efter min opfatning ganske interessant. Det er nærmere behandlet i avsnitt 3.

Det ligger nær å trekke en sammenligning mellem distribusjonsfenomenet og det fenomen i folkemengdens bevegelse som går under navn av Eilert Sundts lov. Sammenligningen er dog ikke helt treffende. Eilert Sundts lov refererer sig til den måte hvorpå fluktuasjonene i det årlige antall nyfødte forplanter sig til befolkningssammensetningen og folkemengdens bevegelse i de følgende generasjoner. Når man taler om Eilert Sundts lov fester man altså opmerksomheten ved den omstendighet at størrelsen av en viss nytilgang (representert ved fødselshyppigheten) kan variere fra det ene år til det annet. Ved distribusjonsfenomenet er det imidlertid ikke tale om hvorledes nytilgangen (her representert ved primærinvesteringen) varierer fra det ene år til det annet, ti distribusjonsfenomenet refererer sig til et enkelt års nytilgang (et enkelt års primærinvestering). Det man ved distribusjonsfenomenet fester opmerksomheten ved, er den omstendighet at elementene i vedkommende års nytilgang (de enkelte kapitalgjenstande) har en typisk unimodal fordeling efter den tid som vil hengå innen de melder sig til reproduksjon. Det befolkningsteoretiske fenomen som vilde være et analogon til det kapitalistiske distribusjonsfenomen, er den virkning på befolkningssammensetningen og folkemengdens bevegelse i de følgende generasjoner som vilde fremkomme hvis den stående befolkning ved en bestemt anledning fikk et visst tilskudd og dette tilskudd selv var en sammensatt befolkning med en viss aldersfordeling.

Omvendt: Det reinvesteringsfenomen som vilde være et analogon til Eilert Sundts lov er den variasjon i den årlige reinvestering som fremkommer når den årlige primærinvestering består av en bestemt slags kapitalgjenstande (med samme varighet) f. eks. bare stålhamrer, og når størrelsen av den årlige primærinvestering varierer med tiden, når der f. eks. i 1916 investeres 10 stålhamrer, i 1917 investeres 20 stålhamrer o. s. v. Dette siste fenomen kaller jeg repetisjonsfenomenet. Det er behandlet i avsnitt 4.

Ved distribusjonsfenomenet studerer man altså et enkelt års primærinvestering under forutsetning av at de konkrete kapitalgjenstande har en viss fordeling efter varighet. Ved repetisjonsfenomenet studerer man hvorledes den årlige primærinvestering varierer med tiden. Og forutsetningen er her at alle de konkrete kapitalgjenstande som inngår i den årlige primærinvestering, har samme varighet.

I en viss forstand er distribusjonsfenomenet det mest generelle av de to fenomener. Forutsetningen om at alle de konkrete kapitalgjenstande har en bestemt varighet er nemlig en spesiell forutsetning der inneholdes som grensetilfelle i den mer generelle forutsetning om at kapitalgjenstandene har en viss fordeling efter varighet. I en annen forstand er repetisjonsfenomenet det mest generelle. Forutsetningen om at der skjer en viss primærinvestering på et gitt tidspunkt er nemlig en spesiell forutsetning der inneholdes som grensetilfelle i den mer generelle forutsetning om at størrelsen av primærinvesteringen skal variere med tiden på en viss måte.

Det mest spesielle fenomen er det som fremkommer når der på et gitt tidspunkt skjer en primærinvestering av kapitalgjenstande der alle har samme varighet v. Reinvesteringen i dette tilfelle kommer simpelthen til å bestå deri at nøiaktig den samme kapitalmasse blir investert påny hvert v-te år fremover. Dette fenomen kunde man kalle det rene repetisjonsfenomen. Det er åbenbart et grensetilfelle av det ovenfor omtalte almindelige repetisjonsfenomen. Det kan forøvrig også opfattes som et grensetilfelle av distribusjonsfenomenet. Forskjellen mellem det rene repetisjonsfenomen på den ene side og det almindelige repetisjonsfenomen og distribusjonsfenomenet på den annen side er at det første er et simpelt fenomen, mens de to andre (bortsett fra visse undtagelsestilfelle) er et interferens eller resultant-fenomen i den forstand at reinvesteringen på et visst tidspunkt blir en sum av partialinvesteringer nemlig summen av en viss mengde første gangs reinvestering, en viss mengde annen gangs reinvestering o. s. v.

Det mest generelle fenomen er det som fremkommer når såvel størrelsen av primærinvesteringen (regnet pr. år) som dens fordeling efter varighet varierer med tiden. Dette fenomen vil jeg kalle det sammensatte fenomen. Det er behandlet i avsnitt 5.

Jeg forutsetter i det følgende at der ved hjelp av priser eller standardkoefficienter er definert en felles målestokk for mengden av kapitalgjenstande av forskjellig varighet, således at gjenstandene kan adderes. Hvorledes dette skal gjøres i et konkret tilfelle f. eks. hvor det gjelder en statistisk iakttagelse, er et spørsmål som det ikke er nødvendig å drøfte her.

Forutsetningen i det følgende er dessuten at enhver kapitalgjenstand som engang er blitt skapt ved en primærinvestering altid effektivt blir fornyet når dens levetid er ute. Som en første tilnærmelse til det konkrete økonomiske liv bortser man altså fra den omstendighet at endel av kapitalgjenstandene ikke blir fornyet når de er utslitt. Det tilfelle da endel av kapitalgjenstandene ikke blir fornyet, kan forøvrig behandles ved å betrakte en negativ primærinvestering, men jeg skal ikke gå nærmere inn på det.

2. Kapitalgjenstande med diskret fordeling efter varighet. Det tallteoretiske fenomen.

Både primærinvesteringen og reinvesteringen er i det konkrete økonomiske liv fordelt praktisk talt kontinuerlig i tid. Således vil f. eks. nasjonens årlige investering (primærinvestering og reinvestering) for 1926 være fordelt over årets måneder, uker og dager. Likeså vil i det konkrete økonomiske liv kapitalgjenstandenes fordeling efter varighet være praktisk talt kontinuerlig.

Problemet angående sammenhengen mellem primærinvestering og reinvestering er imidlertid i en viss henseende mer oversiktlig og lettere å angripe når man tenker sig at årets investering foregår konsentrert i et øieblikk og at kapitalgjenstandene er diskret fordelt efter varighet. Vi skal derfor først gjøre denne forutsetning. I næste avsnitt behandles kontinuerlig fordeling.

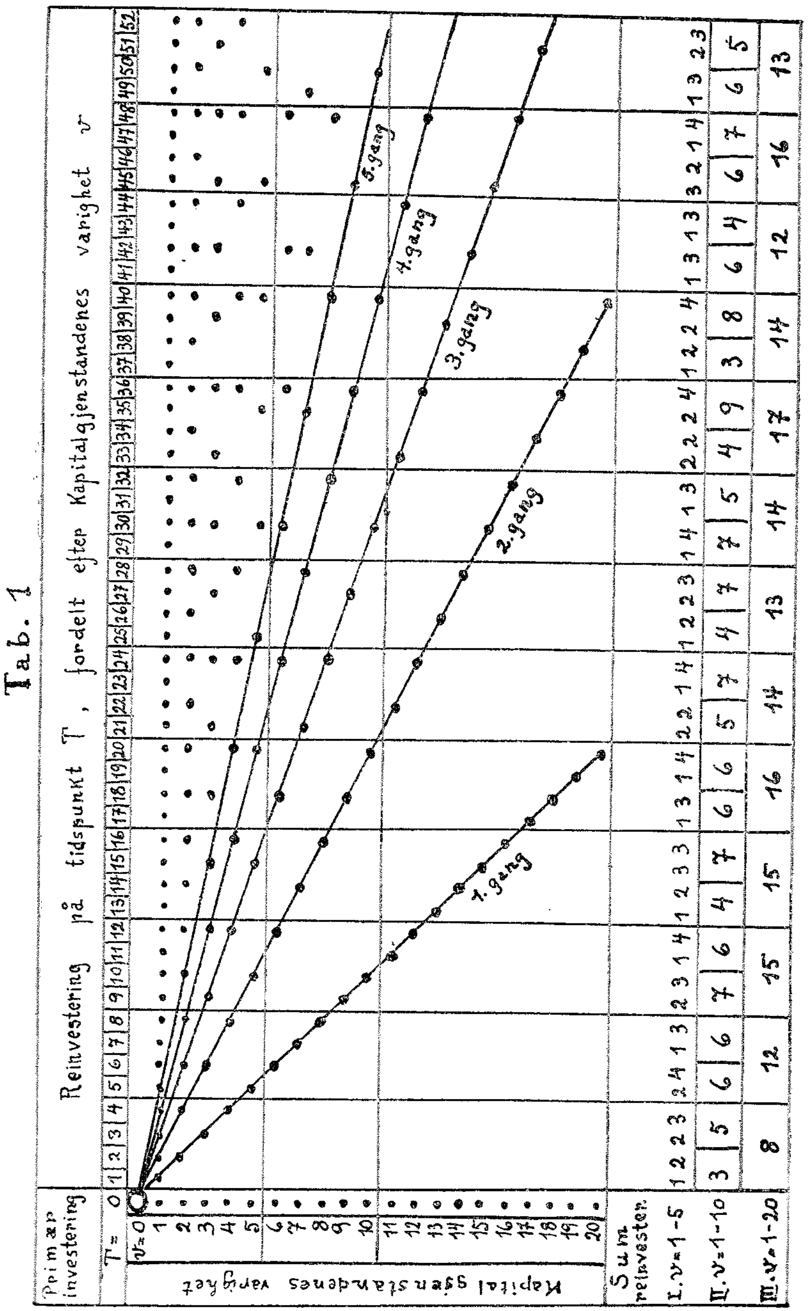
Vi antar at der på et gitt tidspunkt foregår en viss primærinvestering bestående av en mengde f_1 av 1-årige, f_2 av 2-årige . . . f_n av n-årige kapitalgjenstande. Spørsmålet er hvilken reinvestering dette vil gi foranledning til.

La oss først anta at der i den betraktede primærinvestering forekommer like stor mengde 1-årige som 2-årige . . . . som n-årige kapitalgjenstande. Vi har altså $f_1 = f_2 = \ldots = f_n$. For å få en oversikt over reinvesteringen vil vi benytte en fremstilling som i tab. 1.

Tabellens hode representerer tiden T regnet fra det øieblikk da den betraktede primærinvestering fant sted. Primærinvesteringen skjer altså på tidspunktet $T = o$, d. v. s. ved begynnelsen av det første år. Tabellens forspalte representerer kapitalgjenstandenes varighet v. I kolonnen rett under $T = o$ fremstilles primærinvesteringens fordeling efter varighet ved at der rett ut for $v = 1$ (varighet 1 år) anbringes et punkt der representerer de 1-årige kapitalgjenstande, rett ut for $v = 2$ (varighet 2 år) anbringes et punkt der representerer de 2-årige kapitalgjenstande o. s. v.

Reinvesteringen fremstilles på følgende måte. De 1-årige kapitalgjenstande melder sig til fornyelse på tidspunktene $T =$ 1, 2, 3 . . . o. s. v., altså ved slutten av det første, annet, tredie år o. s. v. Det fremstilles ved rekken av punkter langs første linje i tabellen. De 2-årige kapitalgjenstande melder sig til fornyelse på tidspunktene $T = 2, 4, 6$ . . . o. s. v. Det fremstilles ved rekken av punkter langs annen linje i tabellen. Og således videre for de følgende linjer. Når denne konstruksjon er utført, kan reinvesteringspunktene ordnes efter skrålinjer. Først forbindes punktene ($T = 1$, $v = 1$), ($T = 2$, $v = 2$) o. s. v. med en skrålinje hvis bratthet (ɔ: forholdet mellem høide og basis) er lik 1. Punktene langs denne linje representerer alle første gangs reinvesteringer, nemlig første gangs reinvestering av de 1-årige kapitalgjenstande (punktet $T = 1$, $v = 1$), første gangs reinvestering av de 2-årige kapitalgjenstande (punktet $T = 2$, $v = 2$) o. s. v. Dernæst forbindes punktene ($T = 2$, $v = 1$), ($T = 4$, $v = 2$) o. s. v. med en skrålinje hvis bratthet er $\frac{1}{2}$. Punkter langs denne linje

Tab. 1



representerer alle annen gangs reinvesteringer. Tilsvarende for de følgende skrålinjer. Det er lett å se at brattheten av den k-te skrålinje blir $\frac{1}{k}$ og at tettheten av punktene langs den k-te skrålinje blir lik $\frac{1}{k}$ av punktenes tetthet langs den første skrålinje. Det er også lett å se at punktenes tetthet langs den v-te horisontallinje er $\frac{1}{v}$ pr. tidsenhet, d. v. s. tidsavstanden mellem to nabopunkter er v. Den samlede reinvestering på tidspunktene $T = 1, 2, 3 \ldots$ o. s. v. er representert ved punktene langs de vertikale kolonner svarende til $T = 1, 2, 3 \ldots$ o. s. v. Disse summer er angitt ved foten av tabellen.

I tabellen er n (antall varighetsklasser) lik 20, men tabellen fremstiller også forholdet f. eks. for $n = 5$. Man betrakter da bare den øverste fjerdedel av tabellen og bortser fra de nederste tre fjerdedele.

Hvis primærinvesteringens varighetsfordeling ikke er uniform, hvis altså ikke $f_1 = f_2 = \ldots = f_n$, så må de forskjellige punkter i primærinvesteringskolonnen (ɔ: kolonnen $T = o$) tillegges forskjellig vekt i overensstemmelse med størrelsen av f_v ($v = 1, 2, \ldots n$). Og denne forskjellighet i vekt forplanter sig fra primærinvesteringspunktene til reinvesteringspunktene, idet alle punkter på den v-te horisontale linje blir å tillegge en vekt f_v. Teoretisk kan man anskueliggjøre dette på den måte at der i ethvert punkt i tabellen opreises en perpendikulær på tabellens plan. Lengden av hver perpendikulær settes lik størrelsen av f_v. Eller man kan erstatte hver av tabellens punkter med et tall, nemlig det tall som angir størrelsen av f_v. Endelig kan man gi en særdeles instruktiv fremstilling av de forskjellige vekter som skal tillegges punktene, ved å tenke sig at hvert punkt tildeles en masse lik størrelsen av f_v. Det er særlig denne fremstilling vi vil benytte i det følgende. De tre her nevnte fremstillinger er forøvrig prinsipielt ekvivalente. Når fordelingen ikke er uniform, får man å betrakte massens tetthet langs horisontallinjer og skrålinjer istedetfor punktenes tetthet. Når jeg i det følgende taler om tetthet, mener jeg altid massens tetthet regnet pr. tidsenhet. Uttrykkene «masse» og «mengden av kapitalgjenstande» vil bli brukt som synonyme.

Den gjennemsnitlige tetthet langs den v-te horisontale linje er $\frac{f_v}{v}$. Ti langs den v-te horisontallinje går der gjennemsnitlig $\frac{1}{v}$

punkter pr. tidsenhet, og hvert av disse punkter har en masse lik f_v. Denne tetthet langs den v-te horisontallinje er et uttrykk for den gjennemsnittlige reinvestering pr. år som foranlediges av de v-årige kapitalgjenstande.

Langs den k-te skrålinje blir den gjennemsnitlige tetthet i et intervall på k år (målt langs T aksen) lik $\frac{f_v}{k}$ hvor v er varigheten svarende til det reinvesteringspunkt som finnes på den k-te skrålinje i det betraktede tidsintervall (der eksisterer et og kun et slikt punkt). Den samlede masse langs den vertikallinje som svarer til en viss størrelse av T er lik den samlede reinvestering på tidspunkt T.

Tettheten langs horisontallinjer står i forbindelse med begrepet den (totale) gjennemsnitlige reinvestering pr. år.

Dette defineres på følgende måte. I primærinvesteringen er der en mengde f_1 av 1-årige kapitalgjenstande. Disse kommer igjen hvert år, det gir gjennemsnitlig pr. år $\frac{f_1}{1}$. Der er en mengde f_2 av 2-årige kapitalgjenstande. Disse kommer igjen annethvert år. Det gir gjennemsnitlig pr. år $\frac{f_2}{2}$ o. s. v. Den samlede gjennemsnitlige reinvestering pr. år blir altså

$$a = \frac{f_1}{1} + \frac{f_2}{2} + \ldots + \frac{f_n}{n} = \sum_{v=1}^{n} \frac{f_v}{v} \tag{1}$$

Hvis primærinvesteringens fordeling efter varighet ikke er inndelt i hele årsklasser men f. eks. i kvartalsklasser, månedsklasser eller generelt i klasser hvis vidde er en (ekte eller uekte) brøkdel l av et år, og hvis f_w ($w = 1, 2, \ldots n$) betegner mengden av kapitalgjenstande med varighet lw år, så blir den gjennemsnitlige årlige reinvestering

$$a = \sum_{w=1}^{n} \frac{f_w}{lw} \tag{2}$$

Jeg har behandlet disposisjonen av tab. 1 og de dermed sammenhengende begreper tettheten langs horisontallinjer og skrålinjer såvidt utførlig fordi tab. 1 er et viktig hjelpemiddel når man vil studere reinvesteringen.

Jeg vender nu tilbake til den uniforme fordeling av primærinvesteringen (f_v = konstant). Jeg forutsetter først at primærinvesteringens varighetsfordeling har de 5 klasser 1—5 år. Forløpet av den årlige reinvestering er gitt i fotlinjen (I) i tab. 1. Der er sterke fluktuasjoner i dette forløp. Regnet procentvis av den gjennemsnitlige reinvestering $a = \sum_{v=1}^{5} \frac{1}{v} = 2{,}28$ (idet f_v = konstant er satt lik 1), blir forløpet som angitt i rubr. (I) tab. 2 og kurven (I) fig. 1.

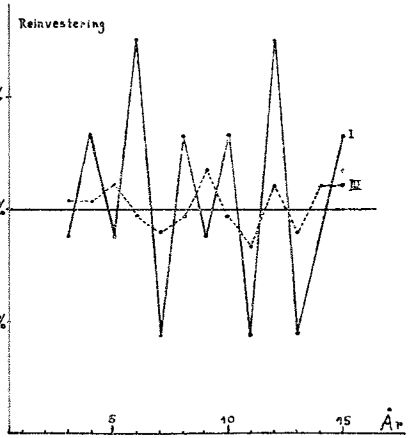


Fig. 1.

Jeg skal nu vise at disse fluktuasjoner (det talteoretiske fenomen) er et fenomen som ikke kan tillegges nogen økonomisk betydning.

Anta nemlig at primærinvesteringens varighetsfordeling er gitt med klassevidde på et halvt år ($l = \frac{1}{2}$), idet fordelingen fremdeles forutsettes å være uniform. Istedetfor en mengde 1 av kapitalgjenstande med varighet et år o. s. v. er der altså en mengde $\frac{1}{2}$ av kapitalgjenstande med varighet $\frac{1}{2}$ år, en mengde $\frac{1}{2}$ av kapitalgjenstande med varighet 1 år o. s. v. Også den årlige reinvestering som foranlediges av denne primærinvestering kan opsummeres v. hj. av tab. 1 idet nu målenheten for såvel T som v er et halvt år og hvert punkt i tabellen teller for $\frac{1}{2}$. Man får å regne med den øvre halvdel av tabellen ($v = 1 - 10$). Summen for $T = 1 - 2$, nemlig 3 punkter hver med vekt $\frac{1}{2}$, gir den samlede reinvestering det første år $= 1\frac{1}{2}$ o. s. v. (fotlinjen (II) i

tab. 1). Den gjennemsnitlige reinvestering pr. år efter formel (2) for $l = \frac{1}{2}$ og $f_w = \frac{1}{2}$ blir $a = \sum_{w=1}^{10} \frac{f_w}{lw} = \sum_{w=1}^{10} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}w} = 2{,}93$.
Herav beregnes den procentvise fluktuasjon i den årlige reinvestering. Den er angitt i rubr. (II) i tab. 2.

Tab. 2.

	Reinvesteringen det T-te år i procent av den gjennemsnitlige reinvestering pr. år.		
	Når kapitalgjenstandene i primærinvesteringen er fordelt med klassevidde på		
	helt år (I)	halvt år (II)	kvartal (III)
T = 3	88 %	102 %	104 %
4	133 »	102 »	104 »
5	88 »	119 »	111 »
6	175 »	102 »	97 »
7	44 »	68 »	90 »
8	133 »	119 »	97 »
9	88 »	102 »	118 »
10	133 »	102 »	97 »
11	44 »	85 »	83 »
12	175 »	119 »	111 »
13	44 »	68 »	90 »

På samme måte kan man beregne den årlige reinvestering når primærinvesteringens varighetsfordeling har klassevidde på et kvartal, (fotlinjen (III) i tab. 1). I dette tilfelle blir $l = \frac{1}{4}$, altså den gjennemsnitlige reinvestering pr. år $\sum_{w=1}^{20} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}w} = 3{,}60$. Den hertil svarende procentvise variasjon i den årlige reinvestering er gitt i rubr. (III) tab. 2 og ved kurven (III) fig. 1. Både tab. 2 og fig. 1 viser tydelig at *fluktuasjonene i den årlige reinvestering dempes kraftig ved overgangen til mindre klassevidde for primærinvesteringens varighetsfordeling.* Og man kan bevise eksakt[1] at når

[1] Bevis. I grensetilfellet $l \to o$ kan benyttes formel (3) i avsnitt 3. $r_T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} f\left(\frac{T}{k}\right)$. Fordelingen blir nemlig da kontinuerlig med f(v) = kon-

klassevidden går mot null blir dempningen absolut: forholdet mellem den årlige reinvestering og den gjennemsnittlige reinvestering blir konstant. Også i en annen henseende er billedet av reinvesteringens fluktuasjoner helt forskjellig for de forskjellige klassevidder. Det år som er et maksimumsår for en klassevidde kan være et minimumsår for en annen klassevidde. Man kan f. eks. sammenligne det 5. år ($T = 5$) for helårs og halvårs klassevidde, eller det 9. år ($T = 9$) for helårs og kvartalsklassevidde.

Dempningsfenomenet ved overgangen til mindre klassevidde kan også analyseres på en annen måte, nemlig ved en sannsynlighetsteoretisk betraktning. Denne analyse gir et interessant innblikk i den måte hvorpå dempningen kommer istand.

Jeg gjengir det i tab. 1. benyttede reinvesteringsskjema simplifisert som i fig. 2.

---

stant $= c$ for $o \leqq v \leqq b$, men $f(v) = o$ for $v > b$ (i eksemplet $c = 1$, $b = 5$). For å bestemme $\frac{\varphi(T)}{a}$ i dette tilfelle kan man foreta en grenseovergang idet man først bestemmer $\frac{\varphi(T)}{a}$ for fordelingen $f(v) = c$ for $\varepsilon \leqq v \leqq b$, men $f(v) = 0$ for $v < \varepsilon$ eller $v > b$. Derefter lar man $\varepsilon \to 0$.

Vi har $\varphi(T) = c \sum_{k=M}^{N} \frac{1}{k}$ hvor M og N er de to hele pos. tall bestemt ved

$$\frac{T}{b} \leqq M < \frac{T}{b} + 1 \qquad \frac{T}{\varepsilon} - 1 < N \leqq \frac{T}{\varepsilon}$$

og

$$a = c \int_{\varepsilon}^{b} \frac{dv}{v} = c \left[\log \frac{b}{T} + \log \frac{T}{\varepsilon} \right]$$

altså

$$\frac{\varphi(T)}{a} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k}}{\log \frac{T}{\varepsilon} + \log \frac{b}{T}}$$

Lar vi her ε gjennemløpe verdiene $\frac{T}{v}$ idet $v \to \infty$ gjennem hele pos. verdier, så får vi, da annet ledd i teller og nevner er endelig,

$$\operatorname{Lim}_{\varepsilon \to o} \frac{\varphi(T)}{a} = \operatorname{Lim}_{v \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{v} \frac{1}{k}}{\log v} = 1 \text{ for enhver endelig størrelse av } T.$$

Ved den her betraktede dobbelte grenseovergang har vi først latt $l \to 0$, derefter $\varepsilon \to o$. Hvis analysen skulde være helt fullstendig, burde det undersøkes om resultatet blir det samme når man forandrer rekkefølgen av de to grenseovergangen, men det er neppe grunn til å gå nærmere inn [illegible] dette spørsmål her.

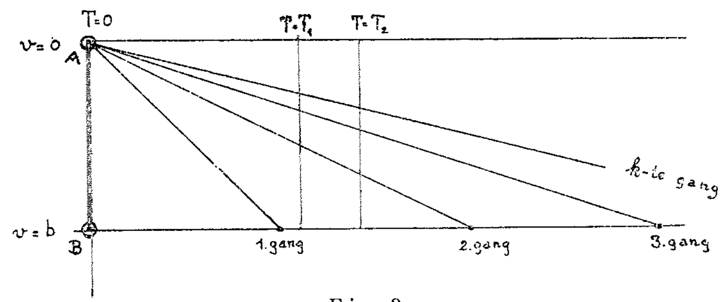


Fig. 2.

Linjen AB illustrerer primærinvesteringen, b er den høieste varighet som forekommer. Primærinvesteringens varighetsfordeling kan som tidligere utviklet illustreres ved en massefordeling langs AB. Jeg har ikke markert denne fordeling med punkter slik som i tab. 1, da ved de følgende betraktninger fordelingen skal variere. Hvis kapitalgjenstandene er uniformt fordelt i et visst antall, f. eks. 5 helårs klasser, vil den representative masse langs AB være koncentrert i 5 diskrete punkter langs AB med likestor masse c i hvert punkt.

Jo finere primærinvesteringen er fordelt, det vil si desto mindreklassevidden er, desto flere representative massepunkter vil der være langs AB og desto mindre masse vil hvert punkt inneholde. Hvis klassevidden er l år (f. eks. $l = \frac{1}{4}$ som svarer til kvartalsklasser) så er avstanden mellem to nabopunkter på AB lik l. Der er $\frac{b}{l}$ punkter ialt langs AB, og hvert punkt har en masse lc. I grensetilfellet $l \to o$ blir antallet av punkter uendelig og samtidig massen i hvert punkt lik o. Fordelingen er blitt kontinuerlig.

Reinvesteringen vil være representert ved analoge massefordelinger langs de respektive skrålinjer. Hvis l er varighetsavstanden mellem to nabopunkter langs AB, så vil tidsavstanden mellem de to nabopunkter på den k-te skrålinje være kl (tidsavstanden målt i T-aksens retning). Der faller altså gjennemsnittlig $\frac{1}{kl}$ punkter pr. tidsenhet (år). Da hvert punkt har en masse cl, blir den gjennemsnittlige masse pr. tidsenhet (den gjennemsnittlige tetthet) langs den k-et skrålinje lik $\frac{c}{k}$.

La os betrakte den masse som faller innenfor et vertikalt belte $T = T_1$ til $T = T_2$ (se fig. 2). Denne masse representerer den samlede reinvestering mellem tidspunktene T_1 og T_2. Hvis den k-te skrålinje skjærer dette belte og hvis massefordelingen er kontinuerlig, så må skrålinjen innenfor beltet ha en samlet masse lik tettheten gange beltets bredde. Kalles beltets bredde $\delta = T_2 - T_1$ så har altså ved kontinuerlig massefordeling den k-te skrålinje innenfor beltet T_1 til T_2 en masse lik $\frac{c}{k}\delta$. Når massen ikke er kontinuerlig fordelt, men koncentrert i diskrete punkter langs skrålinjen, så representerer $\frac{c}{k}\delta$ kun den sannsynlige masse som på den k-te skrålinje faller i beltet mellem T_1 og T_2. Betydningen herav er den at hvis der på forskjellige steder langs T-aksen blir valgt tilfeldig en rekke belter av bredde δ, så vil der sannsynligvis gjennemsnittlig pr. belte falle en masse $\frac{c}{k}\delta$ fra den k-te skrålinje. Jo finere primærinvesteringen er fordelt efter varighet desto større sannsynlighet er det for at et belte valgt tilfeldig (av bredde δ) skal ha en masse på den k-te skrålinje tilnærmelsesvis lik $\frac{c}{k}\delta$.

Den samme slags utjevning som kommer istand ved de store talls lov når man betrakter én bestemt skrålinje (den k-te) og en rekke forskjellige belter av bredde δ, kommer imidlertid også i stand når man betrakter et bestemt belte av bredde δ og en rekke forskjellige skrålinjer som skjærer dette belte. Og utjevningen vil være desto bedre jo finere primærinvesteringen er fordelt. Den samlede masse innenfor et belte av bredde δ vil derfor tilnærmelsesvis være $\delta c \Sigma \frac{1}{k}$ hvor Σ er utstrakt over alle k svarende til numrene på de skrålinjer som skjærer beltet. Hvis man derfor sammenligner to forskjellige belter av bredde δ, så vil forskjellen mellem beltenes totale masser tilnærmelsesvis kun ligge deri at $\Sigma \frac{1}{k}$ er forskjellig for de to belter. Efterhånden som klassevidden blir mindre og mindre vil imidlertid også den relative forskjell mellem $\Sigma \frac{1}{k}$ for to forskjellige belter forsvinne.

For et vilkårlig belte T_1 til T_2 har man nemlig $\Sigma \frac{1}{k} = \sum\limits_{k=M}^{N} \frac{1}{k}$

hvor M og N er de to hele pos. tall som er bestemt ved

$$\frac{T_1}{b} \leqq M < \frac{T_1}{b} + 1 \qquad \frac{T_2}{l} - 1 < N \leqq \frac{T_2}{l}$$

l er klassevidden og b største forekommende varighet, begge regnet i år.

Forholdet mellem $\Sigma \frac{1}{k}$ for to forskjellige belter $T_1{}'$ til $T_2{}'$ og $T_1{}''$ til $T_2{}''$ er derfor

$\dfrac{\sum\limits_{k=M'}^{N'} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=M''}^{N''} \frac{1}{k}}$ hvor summasjonsgrensene er bestemt ved ulikheter analoge de som gjelder for M og N. Når nu $l \rightarrow o$, blir dette forhold lik $\mathrm{Lim} \dfrac{\log N'}{\log N''} = \mathrm{Lim} \dfrac{\log T_2{}' - \log l}{\log T_2{}'' - \log l} = 1.$

Efterhånden som primærinvesteringen blir finere og finere fordelt vil derfor den relative forskjell mellem de totale masser innenfor to vilkårlige belter av samme bredde bli mindre og mindre for tilslutt å forsvinne. Herav følger at forholdet mellem den årlige reinvestering og den gjennemsnittlige reinvestering blir konstant (lik 1) når primærinvesteringen blir tilstrekkelig fint fordelt. Fluktuasjoner av den art som forekommer i fotlinjene i tab. 1 (gjengitt procentvis i tab. 2 og fig. 1) er derfor et fenomen som ikke kan tillegges nogen økonomisk betydning.

Når jeg har opholdt mig så utførlig ved dette fenomen, er det fordi talleksempler er et meget benyttet demonstrasjonsmiddel ved teoretisk-økonomiske undersøkelser, og fordi man vilde bli ledet til feilslutninger hvis man ukritisk vilde anvende denne metode på det foreliggende problem.

Hvis fordelingen ikke er uniform, er der en viss fluktuasjon som ikke forsvinner selv om klassevidden i primærinvesteringen blir liten. Dette fenomen (distribusjonsfenomenet) analyseres best ved å gå ut fra en kontinuerlig fordeling av primærinvesteringen.

3. Kapitalgjenstande med kontinuerlig varighetsfordeling. Distribusjonsfenomenet.

La f(v) være fordelingsfunksjonen for den kontinuerlige fordeling av primærinvesteringen. Der finnes da mellem varighetene v og v + d· en mengde kapitalgjenstande lik f(v) dv.

Fordelingen f(v) kan fortolkes som tettheten i punkt v for en kontinuerlig massefordeling langs linjen AB i fig. 2. Dog således at linjen AB nu tenkes forlenget ad infinitum for at den skal kunne representere en hvilkensomhelst fordeling. Hvis i et specielt tilfelle kapitalgjenstandenes varighet har en øvre grense b, så kan dette fortolkes ved å sette $f(v) = o$ for $v > b$.

Den betraktede primærinvestering gir foranledning til reinvesteringer som fremstilles ved massefordelinger langs skrålinjene i fig. 2 (skrålinjene blir å forlenge ad infinitum sammen med AB). Spørsmålet er hvad tettheten (pr. tidsenhet) blir langs disse skrålinjer.

La oss betrakte varigheter som ligger mellem to vilkårlige grenser v_1 og v_2. Disse varigheter er representert ved et horisontalt belte av bredde $(v_2 - v_1)$. Det innsees lett at den samlede masse mellem varighetsgrensene v_1 og v_2 er den samme langs alle skrålinjer, nemlig lik den samlede masse som finnes i primærinvesteringen mellem disse varighetsgrenser. Summen av all førstegangs reinvestering av kapitalgjenstande mellem v_1 og v_2 må nemlig være lik summen av de kapitalgjenstande som finnes i primærinvesteringen mellem v_1 og v_2. Og det samme gjelder annengangs reinvesteringen o. s. v.

Denne for alle skrålinjer like store masse er langs den k-te skrålinje fordelt over et tidsintervall av utstrekning $(v_2 - v_1)k$. I primærinvesteringen er den samme masse fordelt over et varighetsintervall av utstrekning $(v_2 - v_1)$. Det er derfor klart at langs den k-te skrålinje er den gjennemsnittlige tetthet i varighetsintervallet v_1 til v_2 lik $\frac{1}{k}$ av den gjennemsnittlige tetthet i det samme varighetsintervall i primærinvesteringen. Dette gjelder for vilkårlige varighetsgrenser. Det gjelder altså også om man lar utstrekningen av varighetsintervallet, altså differensen $(v_2 - v_1)$ avta mot null. Da går den gjennemsnittlige tetthet i varighetsintervallet over til å bli tettheten i et punkt, nemlig det punkt v mot hvilket v_1 og v_2 konvergerer. Tettheten (pr. tidsenhet) i punktet med varighet v på den k-te skrålinje blir derfor $\frac{1}{k}$ av tettheten i det tilsvarende punkt (ɔ: for den samme varighet) i primærinvesteringen, altså lik $\frac{f(v)}{k}$. Denne formel er analog formelen for diskrete fordelinger.

De kapitalgjenstande som forekommer på den k-te skrålinje på tidspunkt T har en varighet $v = \frac{T}{k}$. Tettheten (pr. tidsenhet) på tidspunkt T på den k-te skrålinje er derfor lik $\frac{1}{k} f\left(\frac{T}{k}\right)$. D. v. s. mengden av de kapitalgjenstande som mellem tidspunktene T og $T + dT$ reinvesteres for k-te gang er lik $\frac{1}{k} f\left(\frac{T}{k}\right) dT$.

La nu $\varphi(T)$ betegne den samlede reinvestering (regnet pr. år) ved tidspunkt T, således at altså den samlede reinvestering mellem tidspunktene T og $T + dT$ er $\varphi(T)\,dT$. Denne reinvestering er åpenbart summen av reinvesteringene mellem T og $T + dT$ for samtlige skrålinjer $(k = 1, 2 \ldots$ o. s. v.), altså

$$\varphi(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} f\left(\frac{T}{k}\right) \tag{3}$$

Denne formel viser hvorledes reinvesteringen (regnet pr. år) på et gitt tidspunkt T blir avledet av primærinvesteringens varighetsfordeling f(v).

I fig. 3 er gitt en geometrisk fremstilling av den sammenheng som iflg. formel (3) eksisterer mellem reinvesteringen $\varphi(T)$ og primærinvesteringens varighetsfordeling f(v).

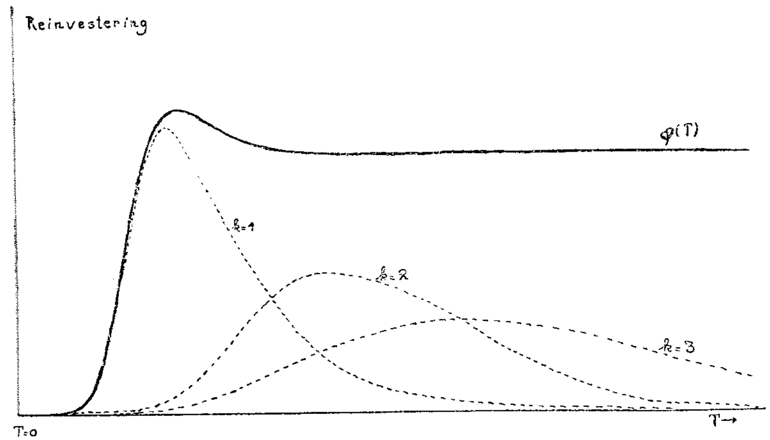


Fig. 3.

Først inntegnes fordelingskurven $f(T)$ idet nu T benyttes som abcisse istedetfor v. Dette gir leddet svarende til $k = 1$ i formel (3) (leddet svarende til første gangs reinvestering). Derefter inntegnes en ny kurve som fremgår av den første ved at ordinaten er forminsket til halvparten og abcissen strukket til det dobbelte. Dette gir leddet svarende til $k=2$ (annen gangs reinvestering) Derefter igjen en ny kurve som fremgår av den første ved at ordinaten er forminsket til tredjeparten og abcissen strukket til det tredobbelte. Dette gir leddet svarende til $k=3$, o. s. v. ad infinitum. Kurvene for $k=1, 2, 3 \ldots$ o. s. v. kan kalles de partielle reinvesteringskurver eller p a r t i a l k u r v e n e.

Man konstruerer nu resultantkurven for partialkurvene. Hermed menes den kurve hvis ordinat for ethvert tidspunkt T er summen av ordinatene for partialkurvene. Den således konstruerte resultantkurve er da reinvesteringskurven $\varphi(T)$.

Man ser herav at den måte hvorpå $f(v)$ forløper i nærheten av $v=0$ blir av vesentlig betydning for forløpet av $\varphi(T)$, og det ikke bare for tidspunkter i nærheten av $T=0$ men også senere. Selv om T er stor vil nemlig de senere ledd i formelen for $\varphi(T)$ d. v. s. leddene for store k komme til å avhenge av størrelsen av $f(v)$ for små v. Jo lenger ut i leddenes nummer man kommer, desto mindre er den v hvorav leddets størrelse avhenger, ti de senere ledd i formelen (de senere partialkurver) er dannet av $f(v)$ ved stadig større og større strekning av abcissen for $f(v)$. Da antallet av disse senere ledd er uendelig stort vil de få en dominerende innflydelse på størrelsen av $\varphi(T)$, hvis ikke $f(v)$ avtar meget raskt når $v \to 0$. Man kan også uttrykke forholdet slik: Mengden av kortvarige kapitalgjenstande i primærinvesteringen spiller en betydelig rolle selv for den fjernere reinvestering fordi de kortvarige kapitalgjenstande hyppig kommer igjen, og desto hyppigere jo mer kortvarige de er.

De kortvarige kapitalgjenstandes innflydelse på reinvesteringen trer tydelig frem når man betrakter den gjennemsnitlige reinvestering. For diskrete fordelinger (avsnitt 2) var den gjennemsnittlige reinvestering pr. år definert som $a = \sum_{v=1}^{n} \frac{f_v}{v}$ hvor n er den høieste varighetsklasse som forekommer. Formelen kan også skrives $a = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v}{v}$ når man setter $f_v = 0$ for $v > n$. Analogt defineres den gjennemsnittlige reinvestering pr. år når primærinvesteringen har en kontinuerlig varighetsfordeling $f(v)$.

$$a = \int_0^{\infty} \frac{f(v)\,dv}{v} \tag{4}$$

Man ser herav at hvis den gjennemsnittlige reinvestering skal bli endelig må $f(0)=0$. Ikke bare det, men når $v \to 0$, må $f(v)$ avta så sterkt at integralet konvergerer. Primærinvesteringens varighetsfordeling må altså være slik at mengden av kapitalgjenstande av en viss varighet avtar sterkt eftersom man betrakter kortere og kortere varigheter. Ved den overgang til kontinuerlig varighetsfordeling som blev analysert i avsnitt 2 var varighetsfordelingen slik at integralet (4) ikke konvergerte. Det forhindret dog ikke at de r e l a t i v e fluktuasjoner i den årlige reinvestering blev endelige.

Et annet begrep som spiller en viss rolle ved analysen av den kontinuerlig fordelte primærinvestering er den f u t u r i s k e reinvestering.[1] Hermed menes den årlige reinvestering som vil bli gjeldende når der er gått en lengere tid ($T \to \infty$) fra det tidspunkt da primærinvesteringen fant sted. Hvis $\lim_{T \to \infty} \varphi(T)$ eksisterer, er den futuriske reinvestering lik denne grense. Et hovedformål for undersøkelsen i dette avsnitt er netop å vise at denne grense eksisterer. Jeg skal vise at eftersom tiden går vil fluktuasjonene i den årlige reinvestering dempes. Reinvesteringen nærmer sig mot et visst konstant normalnivå. Og dette nivå er lik den ovenfor definerte størrelse a. D e n f u t u r i s k e r e i n v e s t e r i n g e r a l t s å l i k d e n g j e n n e m s n i t t l i g e r e i n v e s t e r i n g. Denne lov kan kalles distribusjonsloven.

Den her betraktede dempning (som kommer istand eftersom tiden går) er åbenbart et fenomen av en helt annen art enn den dempning som blev behandlet i avsnitt 2, (og som kommer istand ved at klassevidden i primærinvesteringens varighetsfordeling blir mindre og mindre).

Riktigheten av distribusjonsloven innses på følgende måte:

La $T = \frac{1}{\delta}$ $\qquad x_k = k\delta = \frac{k}{T} \qquad (k = 1, 2 \ldots \infty)$

altså $\qquad x_{k+1} - x_k = \frac{1}{T}$

Da er

[1] Adjektivet futurisk kan vel ikke sies å tilhøre den almindelige sprogbruk, men jeg har ikke kunnet finne noget almindelig brukt ord som gjenga meningen like nøiaktig. Ved å bruke betegnelsen den asymtotiske reinvestering vilde man *a priori* ha antydet at den futuriske reinvestering virkelig har en bestemt limes, hvilket åbenbart er uberettiget. Ved distribusjonsfenomenet har visstnok reinvesteringen en bestemt limes (se beviset i teksten), men dette er ikke altid t[illegible]lle ved det mer generelle fenomen behandlet i avsnitt 5.

$$\varphi(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\delta} f\left(\frac{1}{k\delta}\right) . \delta = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)_{x=x_k} (x_{k+1} - x_k). \tag{5}$$

Når her $T \to \infty$, altså $\delta \to o$ og følgelig $(x_{k+1} - x_k) \to o$, så går det siste uttrykk over i $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv$.

Dette følger uten videre av integralbegrepets definisjon.[1]

Vi har altså

$$\lim_{T \to \infty} \varphi(T) = \int_0^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv = a. \tag{6}$$

Av (5) følger ikke bare at den årlige reinvestering $\varphi(T)$ tilslutt nærmer sig et konstant nivå (forutsatt at $\int_0^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv$ konvergerer). Der følger også en viktig konsekvens angående den måte hvorpå fluktuasjonene i $\varphi(T)$ dempes. Det ses umiddelbart av formelen at på tidspunkt T er den årlige reinvesterings avvikelse fra den gjennemsnittlige reinvestering pr. år simpelthen lik det restledd som fremkommer når integralet av funksjonen $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ mellem 0 og ∞ approksimeres ved mekanisk kvadratur efter rektangelmetoden med intervall lik $\frac{1}{T}$.

Dette kaster et interessant lys over arten av den dempning i den årlige reinvesterings fluktuasjoner som kommer istand eftersom tiden går. Dempningen er av samme art som restleddsforminskelsen ved en mekanisk kvadratur.

Efter dette vil man vente at hvis primærinvesteringens varighetsfordeling er unimodal (som eksemplet i fig. 3), så blir reinvesteringens avvikelse fra gjennemsnittet stor når T har en størrelse i nærheten av den størrelse av v for hvilken fordelingsfunksjonen $f(v)$ har maksimum. Og utslaget må bli desto sterkere jo mer «hochgipflig» fordelingen er, altså jo tettere kapitalgjenstandene i primærinvesteringen er gruppert omkring den typiske varighet. Dette kan også ses av fig. 3. Hvis fordelingsfunksjonen $f(v)$, som representerer første partialkurve $(k = 1)$, er utpreget «hochgipflig», så må dette komme tilsyne i resultantkurven $\varphi(T)$.

For å vise hvorledes forskjellige grader av «Hochgipfligkeit» i fordelingsfunksjonen $f(v)$ fremkaller forskjellige grader av fluktuasjon i resultantkurven $\varphi(T)$ har jeg i tab. 3 og fig. 4 gitt tre forskjellige eksempler.

[1] Når integraldefinisjonen tas i den klassiske B··mannske form.

Disse eksempler trenger en nærmere forklaring. På grunn av det foran omtalte forhold angående virkningen av forløpet av $f(v)$ for små v nytter det ikke å tegne en vilkårlig fordelingskurve og derav grafisk avlede resultantkurven $\varphi(T)$. Man må som eksempel gå ut fra en fordelingsfunksjon $f(v)$ hvis analytiske uttrykk man kjenner, og avlede $\varphi(T)$ ved formel (3). Som fordelingskurve $f(v)$ må velges en kurve der er avsluttet mot venstre, ti der eksisterer ikke kapitalgjenstande med negativ varighet. Dessuten bør $f(v)$ være en funksjon for hvilken summen efter formel (3) kan angis i sluttet form. Endelig bør funksjonen inneholde parametre så dens «Hochgipfligkeit» kan varieres. En fordelingsfunksjon som tilfredsstiller disse fordringer er:

$$f(v) = \frac{\left(\frac{\beta}{v}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{v}}}{\beta\, \Gamma(\alpha)} \tag{7}$$

hvor α og β er parametre der bestemmer kurvens form, $\Gamma(\alpha)$ er den ordinære gammafunksjon. Funksjonens egenskap av fordelingsfunksjon er karakterisert ved $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$. Videre er $f(o) = f(\infty) = o$, $f(v)$ stiger monotont fra $v = o$ til et maksimum ved $v = \frac{\beta}{\alpha+1}$ og avtar derfra monotont til $v = \infty$. Kurven har infleksjonspunkter i $v = \frac{\beta}{\alpha+1}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha+2}}\right)$ altså i like stor avstand foran og bak maksimumspunktet. Velges $\beta = \alpha + 1$ så blir maksimum (ɔ: den typiske varighet) beliggende ved $v = 1$. Dette er gjort i eksemplene. Derved opnås at kurvene i de tre eksempler lettere kan sammenlignes. Da tidsenheten kan velges vilkårlig, betyr valget $\beta = \alpha + 1$ ikke at den typiske varighet er satt til 1 år. Dette vilde stemme dårlig med de konkrete forhold. Det betyr kun at hvis den her betraktede kurvetype skal anvendes på statistiske data, må tidsenheten velges lik den typiske varighet. For $\beta = \alpha + 1$ blir maksimum av $f(v)$ såsannt α er et helt positivt tall, tilnærmelsvis lik $\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi(\alpha+1)}}$. Fordelingskurven blir altså desto mer «hochgipflig» jo større α er. Den gjennemsnittlige (følgelig også den futuriske) reinvestering blir lik $\frac{\alpha}{\beta}$.

Når f(v) er valgt efter formel (7) og α er et helt positivt tall, kan uttrykket for $\varphi(T)$ gis i sluttet form.

Man har nemlig

$$\varphi(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta k}{T}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta k}{T}}}{k \cdot \beta\, \Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{\beta}{T}\right)^{\alpha+1}}{\beta\, \Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} x^{k}$$

hvor $x = e^{-\frac{\beta}{T}}$. For $\frac{\beta}{T}$ positiv er $|x| < 1$, rekken altså konvergent.

For $\alpha > 0$ kan nedre summasjonsgrense utvides til $k = 0$, altså

$$\varphi(T) = \frac{f(T)}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} k^{\alpha} x^{k+1} \tag{8}$$

Da nu α er forutsatt å være et helt positivt tall, så har man

$$k^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\alpha} \Delta^i 0^{\alpha} \binom{k}{i}$$

hvor $\Delta^i 0^{\alpha}$ er differensene av null.

Nu er imidlertid

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{i} x^{k+1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{i+1} \qquad |x| < 1$$

altså

$$\varphi(T) = \frac{f(T)}{x(1-x)} \sum_{i=0}^{\alpha} \Delta^i 0^{\alpha} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{i} \tag{9}$$

som er den søkte formel.

Jeg har valgt følgende tre eksempler.

(I) $\alpha = 3, \quad \beta = 4$
(II) $\alpha = 7, \quad \beta = 8$
(III) $\alpha = 11, \quad \beta = 12$

Det er disse eksempler som er gitt i tab. 3 og fig. 4. De numeriske regninger er utført av aktuar Andresen. Jeg benytter anledningen til å fremføre min beste takk for dette arbeide.

For hver av de tre resultantkurver $\varphi(T)$ i fig. 4 er avgitt den tilsvarende fordelingskurve $f(T)$. Figuren illustrerer tydelig det forhold at når fordelingskurvens «Hochgipfligkeit» er liten (som ved (I)), så inntrer dempningen i reinvesteringens fluktuasjoner meget raskt. Allerede den første bølge i reinvesteringen er liten. Ved (I) er f. eks. fluktuasjonene i reinvesteringen så små at de næsten blir umerkelige i den skala hvori kurven er tegnet. Forløpet er her praktisk talt det at reinvesteringskurven stiger

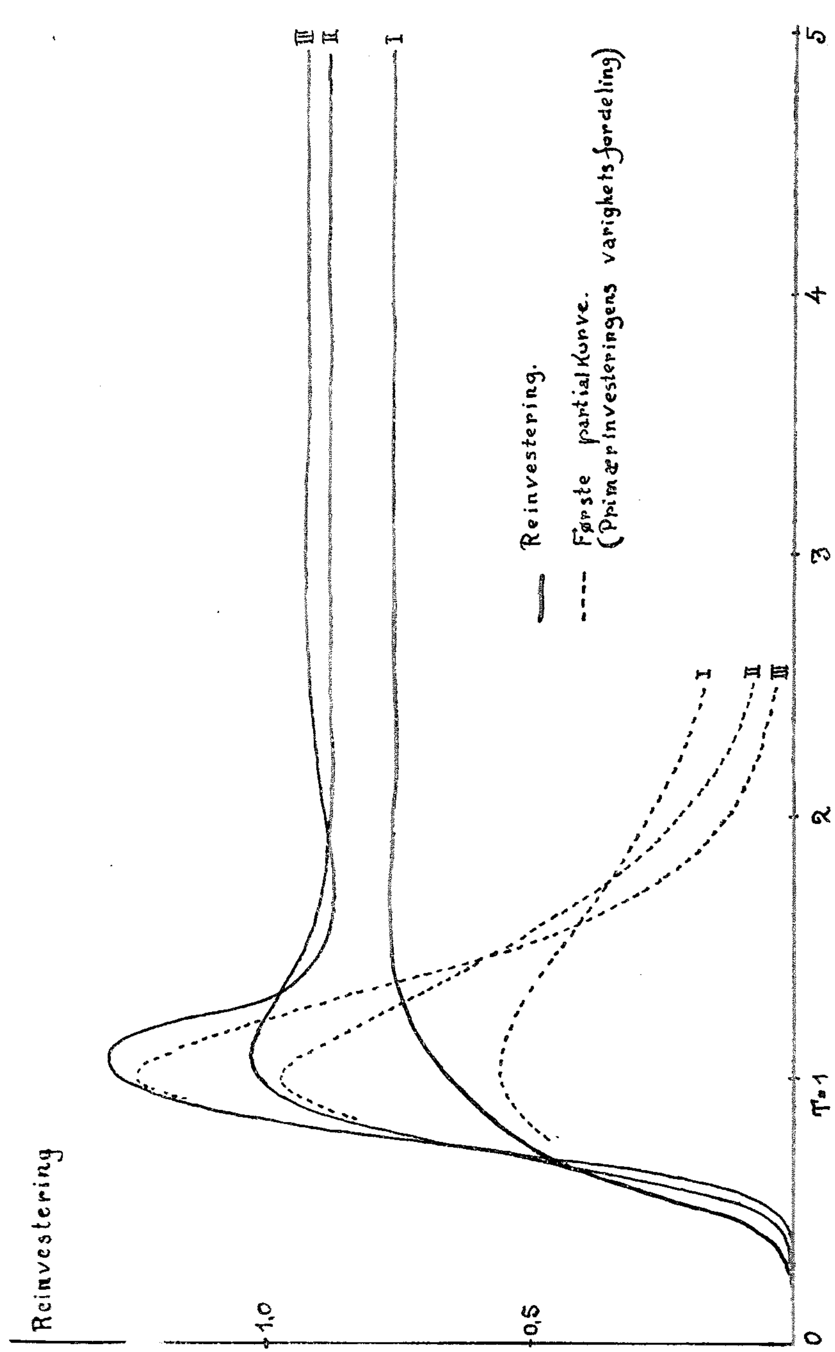


Fig. 4.

monotont op til sitt gjennemsnitlige nivå, for senere å følge dette. Man må se på tallene i tab. 3 for å få et inntrykk av bølgebevegelsen ved (I). Der er en svak første bølge med maksimum i nærheten av $T = 1{,}74$.

Tab. 3.

Tidspunkt T	Reinvestering $\varphi(T)$		
	I	II	III
0.27	0.0019	0.0000 . . .	0.0000 . . .
0.40	0.0567	0.0092	0.0011
0.50	0:1722	0.0839	0.0317
0.75	0.5113	0.6916	0.7459
1.00	0.6426	**1.0193**	**1.274**
1.25	0.7341	0.9896	1.074
1.48	0.7509	0.9208	0.9108
1.74	**0.7553**	0.8839	*0.8755*
2.00	0.7552	0.8731	0.8960
2.22	0.7545	*0.8715*	0.9100
2.50	0.7535	0.8724	0 9166
2.68	0.7526	0.8737	**0.9178**
3.07	0.7519	0.8742	0.9175
3.33	0.7515	0.8745	0.9170
4.00	0.7509	0.8746	0.9167
4.45	0.7506	0.8748	0.9167
5.00	0.7502	0.8749	0.9767
∞	0.7500	0.8750	0.9167

Hvis derimot «Hochgipfligkeit» i fordelingsfunksjonen er mer utpreget, som ved (II) og ennu mer ved (III), så blir også bølgene i reinvesteringen mer utpregede. Ved (III) er den første bølge meget fremtredende. Maksimum for den første reinvesteringsbølge i (III) nås efter utløpet av en tid ($T =$ ca. 1,1) som er noget større enn den typiske varighet. Dette er et generelt fenomen som altid vil gjøre sig gjeldende såsant fordelingskurven for primærinvesteringen stiger monotont inntil den typiske varighet.

I alle de tre tilfeller skjer der en dempning i reinvesteringens bølgebevegelse eftersom tiden går. Ved (III) er annen bølge (hvis maksimum nås ved $T =$ ca. 2,9) langt mindre fremtredende enn den første. Sammenlignet med den første bølge fortoner annen bølge sig kun som en slak og langstrakt hevning av kurven. De senere bølger ved (III) er umerkelige. Ved (I) og (II) er allerede annen bølge umerkelig. Ved (I) er der ikke engang noget minimum efter første maksimum. Reinvesteringen avtar fra det første maksimumspunkt monotont ned mot det normalnivå (0,75) som er gitt ved den gjennemsnitlige reinvestering. Ved (II) er der visstnok et minimum efter første bølge (nemlig ved ca. 2,3), men der fremkommer ingen komplett annen bølge efter minimet ved 2,3. Reinvesteringen tiltar fra dette minimumspunkt monotont op mot det normalnivå (0,875) som er gitt ved den gjennemsnitlige reinvestering. Disse eksempler illustrerer de forskjellige alternativer som kan forekomme. Hvis «Hochgipfligkeit» i primærinvesteringens varighetsfordeling ikke er særlig fremtredende, vil reinvesteringen kun opvise en, i høiden et par bølger, før dempningen kommer istand. For de fordelingskurver som forekommer i det konkrete økonomiske liv vil man sannsynligvis ikke begå stor feil ved efter utløpet av en tid lik $1\frac{1}{2}$ à 2 ganger den typiske varighet å erstatte det eksakte uttrykk for den årlige reinvestering (formel (3)) med uttrykket for den gjennemsnitlige reinvestering bestemt ved den simple formel (4).

Dette dempningsfenomen berøver ikke den her betraktede art av reinvesteringsfluktuasjoner deres økonomiske betydning. Heri ligger netop forskjellen mellem distribusjonsfenomenet og det tallteoretiske fenomen. Det avgjørende fra et kriseteoretisk synspunkt er åbenbart om der eksisterer en fremtredende første bølge eller ikke.

En nøiaktigere undersøkelse av de kriseteoretiske konsekvenser som kan trekkes av det her påviste fenomen vil derfor kreve en statistisk undersøkelse av hvilken grad av «Hochgipfligkeit» i de nyinvesterte kapitalgjenstandes varighetsfordeling som faktisk forekommer i det økonomiske liv. Som nevnt i innledningen ligger det utenfor denne artikkels ramme å gå nærmere inn på de kriseteoretiske konsekvenser. Jeg nøier mig derfor med å peke på forholdet.

4. Kapitalgjenstande med samme varighet. Repetisjonsfenomenet.

I foregående avsnitt har jeg undersøkt virkningen av en enkelt primærinvestering som foregår på et bestemt tidspunkt og som har en viss varighetsfordeling. I dette avsnitt skal jeg ganske kort redegjøre for det tilfelle da der foregår en kontinuerlig primærinvestering og alle kapitalgjenstande har en og samme varighet v.

La t betegne tidspunktet for primærinvesteringen, T tidspunktet for reinvesteringen. Primærinvesteringens forløp tenkes gitt ved en kontinuerlig funksjon g(t) som angir primærinvesteringen (pr. tidsenhet) på tidspunktet t. Mellem tidspunktene t og t + dt vil der da foregå en primærinvestering g(t)dt.

Hvis der skjer en primærinvestering g(t)dt mellem t og t + dt, så må dette åbenbart foranledige en reinvestering av samme størrelse g(t)dt for det første mellem tidspunktene t + v og t + v + dt, for det annet mellem tidspunktene t + 2v og t + 2v + dt o. s. v.

Omvendt: Mellem tidspunktene T og $T + dT$ skjer der en første gangs reinvestering av de kapitalgjenstande som blev primærinvestert mellem $T - v$ og $T - v + dT$; mengden av disse er $g(T - v)\,dT$. Mellem T og $T + dT$ skjer der dessuten en annen gangs reinvestering av de kapitalgjenstande som blev primærinvestert mellem $T - 2v$ og $T - 2v + dT$; mengden av disse er $g(T - 2v)\,dT$ o. s. v. Ialt skjer der altså mellem T og $T + dT$ en reinvestering lik

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(T - kv)\,dT.$$

Betegnes nu reinvesteringen (regnet pr. tidsenhet) på tidspunktet T med $\psi(T)$, således at der altså mellem T og $T + dT$ foregår en reinvestering av størrelse $\psi(T)\,dT$, så er følgelig

$$\psi(T) = \sum_{k=1}^{\infty} g(T - kv). \tag{10}$$

Hvis man kun betrakter den reinvestering som skyldes primærinvesteringer foretatt efter et tidspunkt t_0, har man kun å sette $g(t) = 0$ for $t < t_0$. Summen over k i formel (10) bryter da av i det endelige. I dette tilfelle kan den sammenheng mellem primærinvestering og reinvestering som er uttrykt i formel (10) illustreres geometrisk på den måte som er angitt i fig. 5.

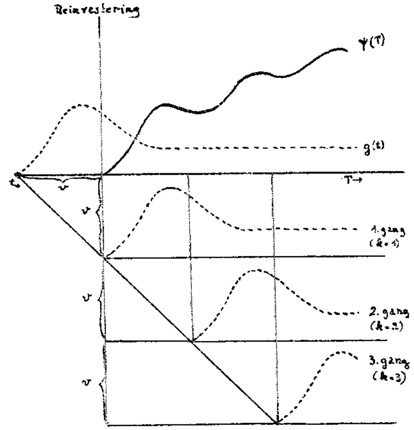


Fig. 5.

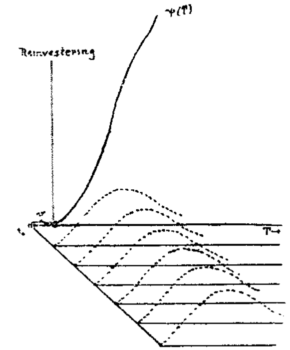


Fig. 6.

I fig. 5 er $t_0 T$ tidsaksen (smlgn. fig. 2), t_0 betegner det tidspunkt fra hvilket primærinvesteringen tar sin begynnelse. Fra t_0 trekkes en nedadgående skrålinje under 45° vinkel. Denne skjæres av horisontallinjer i avstandene v, 2v, 3v, o. s. v. fra tidsaksen. Første gangs reinvestering vil være gitt ved en kurve der er identisk med primærinvesteringskurven (som har sitt utgangspunkt i t_0), men forskjøvet mot høire et tidsintervall lik v (så den får sitt utgangspunkt i $t_0 + v$). Annen gangs reinvestering vil være gitt ved en kurve der også er identisk med primærinvesteringskurven men forskjøvet mot høire et tidsintervall lik 2v o. s. v. De partielle reinvesteringskurver fremkommer altså ved at primærinvesteringskurven blir **repetert** fremover i tiden hvert v-te år. Derav navnet repetisjonsfenomen. Der er den forskjell mellem partialkurvene ved repetisjonsfenomenet og distribusjonsfenomenet at de siste sukcessivt blir mer og mer deformert, de første derimot ikke. Smlgn. fig. 5 med fig. 3.

Reinvesteringskurven $\psi(T)$ ved repetisjonsfenomenet vil være resultantkurven av partialkurvene i fig. 5, altså den kurve hvis ordinat på et hvilketsomhelst tidspunkt T er summen av ordinatene for partialkurvene. En analog geometrisk fremstilling gjelder når primærinvesteringen ikke er begrenset til tiden efter t_0, men antallet av partialkurver blir da uendelig.

Ved repetisjonsfenomenet vil reinvesteringskurven eftersom tiden går, ikke nærme sig et konstant nivå således som ved distribusjonsfenomenet. Tvertimot vil reinvesteringskurven stort sett stige med tiden. Reinvesteringen vil inneholde en sekularbevegelse som stadig hever det nivå hvorom de eventuelt forekommende periodiske fluktuasjoner foregår. Dette nivå blir det analoge begrep til den gjennemsnittlige reinvestering som blev definert under analysen av distribusjonsfenomenet. Mens ved distribusjonsfenomenet den gjennemsnittlige reinvestering er en konstant, så er den ved repetisjonsfenomenet en funksjon av tiden.

Den presise definisjon av den gjennemsnittlige reinvestering ved repetisjonsfenomenet kan gis på følgende måte. Den primærinvestering som foregår mellem t og t + dt foranlediger hvert v-te år en reinvestering av størrelse g(t) dt, altså pr. år $\frac{g(t)\,dt}{v}$. Dette uttrykk integreret op til tidspunktet T gir den gjennemsnittlige reinvestering på tidspunktet T. Kalles denne $b(T)$, så har man altså

$$b(T) = \frac{1}{v}\int_{t_0}^{T} g(t)\,dt = \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{T} g(t)\,dt$$

idet $\qquad g(t) = 0$ for $t < t_0$.

Sett at der er e n e n k e l t b ø l g e i primærinvesteringens forløp og at primærinvesteringen foran og efter denne bølge forløper nogenlunde konstant (som i fig. 5). I dette tilfelle vil der også ved repetisjonsfenomenet skje en dempning, nemlig i den forstand at den r e l a t i v e fluktuasjon i reinvesteringen utjevnes med tiden, idet nemlig nu

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\psi(T)}{b(T)} = 1.$$

Dempningen vil foregå desto raskere jo slakere primærinvesteringsbølgen er og jo mindre kapitalgjenstandenes varighet v er i forhold til primærinvesteringsbølgens bredde. Med primærinvesteringsbølgens bredde menes tidsavstanden mellem det punkt foran og efter bølgen fra hvilket primærinvesteringen forløper nogenlunde konstant. Dette er åbenbart ikke nogen presis definisjon av begrepet bølgebredde. Det er kun en geometrisk anskueliggjørelse av begrepet. Jeg tror imidlertid at denne er tilstrekkelig for de følgende betraktninger.

Fig. 5 og 6 gir et inntrykk av bølgebreddens betydning for fluktuasjonene i reinvesteringen og for disse fluktuasjoners dempning.

I fig. 5 utgjør bølgebredden kun en brøkdel av kapitalgjenstandenes varighet v. Resultatet er en fremtredende periodisitet

i reinvesteringen. Også sekularbevegelsen kommer tydelig tilsyne. Eftersom tiden går vil de relative fluktuasjoner, det vil si fluktuasjonene i forholdet $\frac{\psi(T)}{b(T)}$, bli dempet. Dette vilde kommet tydeligere tilsyne hvis reinvesteringskurven i fig. 5 hadde vært tegnet i logaritmisk skala.

I fig. 6 utgjør bølgebredden flere ganger kapitalgjenstandenes varighet. Bølgen er dertil slakere. Følgen er at dempningen i reinvesteringens fluktuasjoner inntrer praktisk talt straks. Til gjengjeld er sekularbevegelsen desto mer fremtredende.

Hvis bølgebredden avtar mot null samtidig som primærinvesteringen blir null utenfor bølgeområdet, fremkommer som grensetilfelle det fenomen der i innledningen blev kalt det rene repetisjonsfenomen.

5. Det generelle problem.

I de foregående avsnitt har jeg undersøkt på den ene side virkningen av en enkelt primærinvestering som foregår på et bestemt tidspunkt og som har en viss varighetsfordeling, på den annen side virkningen av en kontinuerlig stedfinnende primærinvestering av kapitalgjenstande med en og samme varighet. Det generelle problem består i å undersøke virkningen av en kontinuerlig stedfinnende primærinvestering som i hvert øieblikk har en viss varighetsfordeling der selv kan forandre sig med tiden.

I dette tilfelle blir variasjonene i reinvesteringen et sammensatt fenomen hvor både distribusjons- og repetisjonsfenomenet gjør sig gjeldende.

Jeg skal ikke analysere i detalj reinvesteringens fluktuasjoner i dette generelle tilfelle. Jeg skal nøie mig med å angi de fundamentale formler for sammenhengen mellem primærinvestering, reinvestering og kapitalmasse. Det vil neppe være mulig å trenge dypere inn i det generelle problem, teoretisk eller statistisk, uten å ta disse formler som utgangspunkt.

Ved distribusjonsfenomenet hvor det kun gjaldt å illustrere varighetsfordelingen av en enkelt primærinvestering som foregår på et bestemt tidspunkt, kunde primærinvesteringen fremstilles ved en massefordeling langs den rette l i n j e AB i fig. 2 (idet AB tenkes forlenget ad infinitum). Ved det sammensatte fenomen blir primærinvesteringen å fremstille ved en massefordeling i p l a n e t

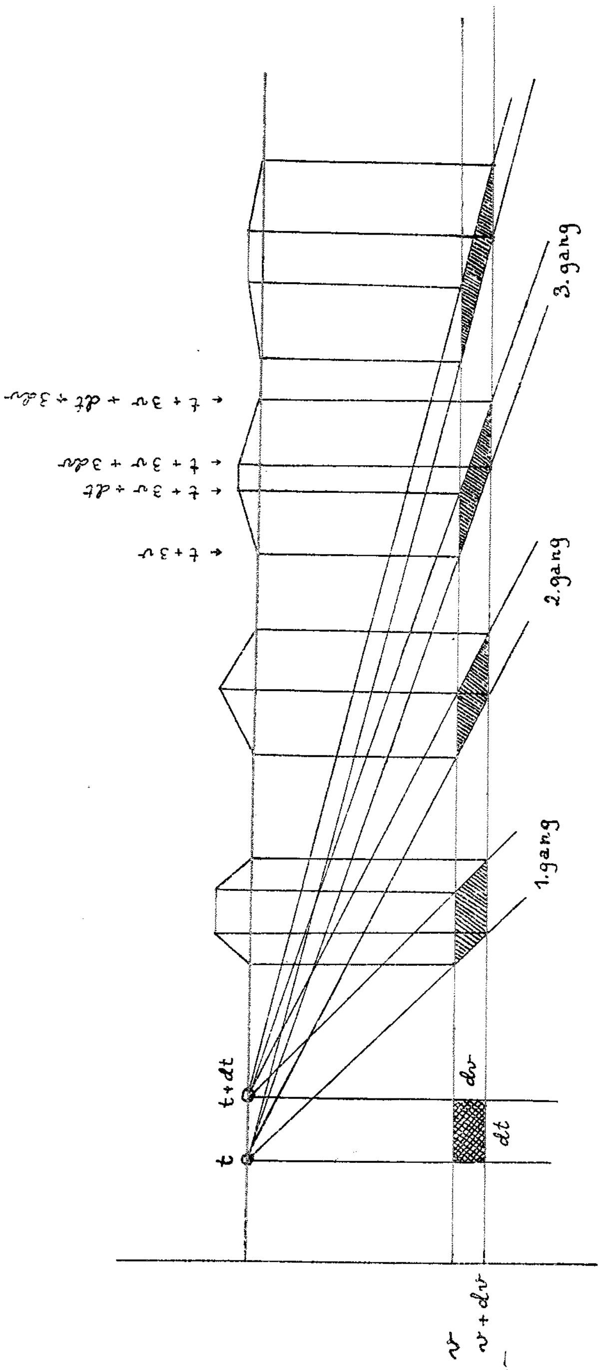


Fig. 7.

Dette er således å forstå: I ethvert punkt $(t\,v)$ i planet (fig. 7) er der en viss tetthet $P(t\,v)$. Vi forutsetter av $P(t\,v)$ er kontinuerlig således at massen i flateelementet $dt\,dv$ er $P(t\,v)\,dt\,dv$. Betydningen herav er den at der mellem tidspunktene t og $t + dt$ foregår en primærinvestering $P(t\,v)\,dt\,dv$ av kapitalgjenstande som har en varighet mellem v og $v + dv$.

Denne primærinvestering vil foranledige en første gangs reinvestering av samme størrelse $P(tv)\,dt\,dv$, men fordelt mellem tidspunktene $t + v$ og $t + v + dt + dv$, og en k-te gangs reinvestering av samme størrelse, men fordelt mellem tidspunktene $t + k\,v$ og $t + kv + dt + k\,dv$. Se fig. 7 hvor primærinvesteringen er dobbelt skravert, reinvesteringen enkelt skravert. Den måte hvorpå reinvesteringen er fordelt mellem $t + kv$ og $t + kv + dt + k\,dv$ er fremstillet ved de inntegnede trapezer i den del av figuren som ligger over tidsaksen. Denne del av planet er å opfatte som et vertikalplan nedklappet i figurens plan. I dette vertikalplan blir reinvesteringskurven å avbilde på samme måte som ved fig. 3, 5 og 6. Hvis vi et øieblikk betrakter dt og dv, ikke som infinitesimale, men som endelige størrelser og forutsetter at $P(tv)$ er konstant innenfor rektanglet $dt\,dv$, men null utenfor dette, så vil trapezene over tidsaksen tilsvare partialkurvene ved fig. 3, 5 og 6; fig. 7 gir da en fremstilling av den måte hvorpå reinvesteringen forløper når der mellem t og $t + dt$ foregår en konstant primærinvestering som i hvert øieblikk er kontinuerlig og jevnt fordelt over varighetene mellem v og $v + dv$. Dette er den simpleste form for det sammensatte fenomen.[1] Til å begynne med vil reinvesteringen opvise periodiske fluktuasjoner representert ved de inntegnede trapezer. Resultantkurven vil til å begynne med kun inneholde en partialkurve (et trapez). Efterhånden som tiden går dempes styrken av utslagene: trapezene blir flatere og mer langstrakte. Tilslutt vil dessuten trapezene begynne å gripe over i hverandre (resultantkurven vil komme til å inneholde flere partialkurver), hvilket yderligere bidrar til å dempe fluktuasjonen i den totale reinvestering. Trapezene begynner å gripe inn i hverandre desto tidligere jo større dv er i forhold til v.

Det er interessant å sammenligne det her betraktede sammensatte fenomen med distribusjonsfenomenet og repetisjonsfenomenet. Trapezene ligner partialkurvene ved distribusjonsfenomenet deri

[1] Dette eksempel skyldes dr. Schønheyder. Dr. Schønheyder har bl. a. fremhevet r[illegible]esteringsfigurenes rombiske form.

at de efterhånden blir mere flattrykte, men der er forskjell forsåvidt som partialkurvene ved distribusjonsfenomenet er rektangelkonturer når primærinvesteringen er jevnt fordelt mellem varighetene v og v + dv. Trapezene i fig. 7 ligner partialkurvene ved repetisjonsfenomenet kun deri at der er en viss overensstemmelse i tidsavstanden mellem to på hinannen følgende partialkurver (trapezer); i de andre henseender er der forskjell. Ved repetisjonsfenomenet vilde således partialkurvene blitt rektangelkonturer, og disse vilde ikke efterhånden blitt flattrykte. *Man kan derfor si at distribusjonsfenomenet i sterkere grad enn repetisjonsfenomenet bidrar til å prege det sammensatte fenomen.*

Jeg vender nu tilbake til å betrakte dt og dv som infinitesimale størrelser. Ovenfor (fig. 7) undersøkte jeg hvorledes virkningen av et primærinvesteringselement P(tv) dt dv forplantet sig fremover i tiden. For å opstille den generelle formel for sammenhengen mellem primærinvestering og reinvestering må man foreta den omvendte betraktning (fig. 8).

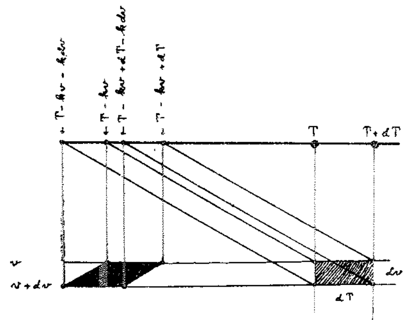


Fig. 8.

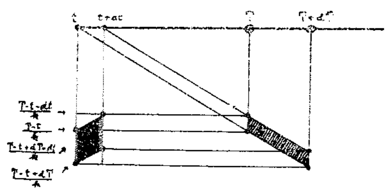


Fig. 9.

Mellem T og $T + dT$ reinvesteres for k-te gang en viss mengde kapitalgjenstande hvis varighet ligger mellem v og v + dv. Disse kapitalgjenstande blev primærinvestert mellem $T - kv - kdv$ og $T - kv + dT$. Se fig. 8 hvor fremdeles primærinvesteringen er dobbelt skravert, reinvesteringen enkelt skravert. Størrelsen av den betraktede reinvestering er følgelig lik $P(T - kv,\ v)\, dT\, dv$. Betegnes nu reinvesteringen av v-årige kapitalgjenstande på tidspunktet T med $R(Tv)$, således at der altså mellem T og $T + dT$ av kapitalgjenstande med varighet mellem v og v + dv blir reinvestert en mengde $R(Tv)\, dT\, dv$, så er følg ...

$$R(Tv) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T - kv,\ v). \tag{11}$$

Hvis primærinvesteringen begynner på tidspunkt t_0, har man å sette $P(tv) = 0$ for $t < t_0$.

Den samlede reinvestering på tidspunktet T av kapitalgjenstande av alle slags varigheter er

$$R(T) = \int_0^{\infty} R(Tv)\, dv = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(T - kv,\ v)\, dv. \tag{12}$$

Det samme uttrykk kan også finnes ved et annet resonnement (fig. 9). De kapitalgjenstande som er primærinvestert mellem t og t + dt og som mellem T og $T + dT$ blir reinvestert for k-te gang, har en varighet som ligger mellem $\frac{T - t - dt}{k}$ og $\frac{T - t + dT}{k}$. Mengden av disse kapitalgjenstande er $P\left(t,\ \frac{T - t}{k}\right)$ gange innholdet av det skraverte flateelement i fig. 9. Dette innhold er $\frac{dt\, dT}{k}$. Åbenbart det samme for flateelementet tilvenstre (primærinvesteringselementet) som for det tilhøire (reinvesteringselementet). Den betraktede kapitalmengde er derfor lik

$$\frac{1}{k} P\left(t,\ \frac{T - t}{k}\right) dt\, dT.$$

Den samlede kapitalmengde som er primærinvestert mellem t og t + dt og som reinvesteres mellem T og $T + dT$ er følgelig lik $dt\, dT \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P\left(t,\ \frac{T - t}{k}\right)$, altså den totale reinvestering på tidspunktet T

$$R(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{T} \frac{1}{k} P\left(t,\ \frac{T - t}{k}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(T - kv,\ v)\, dv \tag{13}$$

hvilket er det tidligere funne uttrykk.

Den gjennemsnitlige reinvestering defineres ved et resonnement analogt det tidligere benyttede. Primærinvesteringselementet P(tv) dt dv kommer igjen hvert v-te år, hvilket gir en gjennemsnitlig reinvestering pr. år av $\frac{P(tv)\, dt\, dv}{v}$. Dette uttrykk integreret for alle forekommende varigheter v og for alle primærinvesteringstidspunkter t op til T gir den gjennemsnitlige reinvestering pr. år på tidspunktet T. Betegnes denne $A(T)$, så er altså

$$A(T) = \int_{-\infty}^{T} dt \int_0^{\infty} dv\, \frac{P(tv)}{v}$$

Den totale kapitalmasse som eksisterer på tidspunktet T kan bestemmes slik. La $C(T\mathrm{v})\,d\mathrm{v}$ betegne mengden av de på tidspunktet T eksisterende kapitalgjenstande som har en varighet mellem v og $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$. Mengden av v-årige kapitalgjenstande på tidspunkt T er åbenbart summen av all primærinvestering av v-årige kapitalgjenstande som har foregått inntil tidspunkt T, ti efter forutsetningen skal de kapitalgjenstande som engang er kommet inn i massen senere bli holdt vedlike. Vi har altså

$$C(T\mathrm{v}) = \int_{-\infty}^{T} P(t\mathrm{v})\,dt \tag{14}$$

På den annen side skal mengden av de kapitalgjenstande der er bygget som v-årige og hvis a l d e r på tidspunkt T er τ, være lik den totale investering (primærinvestering plus reinvestering) av v-årige kapitalgjenstande, som fant sted på tidspunktet $T-\tau$, såsant $\tau \leqq \mathrm{v}$.

Betegnes den totale investering $Q(t\mathrm{v}) = P(t\mathrm{v}) + R(t\mathrm{v})$, så eksisterer altså på tidspunkt T en mengde $Q(T-\tau, \mathrm{v})\,d\mathrm{v}\,d\tau$ av kapitalgjenstande som er bygget med en varighet mellem v og $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ og hvis alder på tidspunkt T er mellem τ og $\tau + d\tau$ $(\tau \leqq \mathrm{v})$. Ialt er derfor på tidspunkt T mengden av kapitalgjenstande som er bygget med en varighet mellem v og $\mathrm{v}+d\mathrm{v}$ lik

$$d\mathrm{v} \int_{0}^{\mathrm{v}} Q(T-\tau, \mathrm{v})\,d\tau = d\mathrm{v} \int_{T-\mathrm{v}}^{T} Q(t\mathrm{v})\,dt$$

Vi har følgelig

$$C(T\mathrm{v}) = \int_{T-\mathrm{v}}^{T} Q(t\mathrm{v})\,dt = \int_{T-\mathrm{v}}^{T} P(t\mathrm{v})\,dt + \int_{T-\mathrm{v}}^{T} R(t\mathrm{v})\,dt \tag{15}$$

Sammenlignes denne formel med (14) så ses at vi skal ha

$$\int_{-\infty}^{T-\mathrm{v}} P(t\mathrm{v})\,dt = \int_{T-\mathrm{v}}^{T} R(t\mathrm{v})\,dt$$

Eller når T (som her er vilkårlig) erstattes med $T+\mathrm{v}$

$$\int_{-\infty}^{T} P(t\mathrm{v})\,dt = \int_{T}^{T+\mathrm{v}} R(t\mathrm{v})\,dt \tag{16}$$

Den samlede primærinvestering av v-årige kapitalgjenstander som har funnet sted inntil et vilkårlig tidspunkt T er altså lik den samlede reinvestering av v-årige kapitalgjenstande som finner sted fra tidspunkt T til $T+\mathrm{v}$. Riktigheten av formel (16) kan også innses direkte ved å bemerke at ethvert element av v-årige kapitalgjenstande som er primærinvestert inntil tidspunkt

T må komme igjen en og kun én gang mellem T og $T+\mathrm{v}$. Formelen følger forøvrig også av (11), idet

$$\int_{T}^{T+\mathrm{v}} R(t\mathrm{v})\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T}^{T+\mathrm{v}} P(t-k\mathrm{v}, \mathrm{v})\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T-k\mathrm{v}}^{T-(k-1)\mathrm{v}} P(t\mathrm{v})\,dt = \int_{-\infty}^{T} P(t\mathrm{v})\,dt$$

Av (16) følger igjen at kapitalmassen $C(T\mathrm{v})$ må bli lik

$$C(T\mathrm{v}) = \int_{T}^{T+\mathrm{v}} R(t\mathrm{v})\,dt \tag{17}$$

Den på tidspunkt T eksisterende mengde av v-årige kapitalgjenstande k a n a l t s å u t t r y k k e s p å t r e f o r s k j e l l i g e m å t e r: enten ved primærinvesteringen, eller ved reinvesteringen eller ved den totale investering. Den er for det første lik summen av all primærinvestering av v-årige kapitalgjenstande som har funnet sted inntil tidspunkt T (formel (14)), for det annet lik summen av den reinvestering av v-årige kapitalgjenstande som vil finne sted mellem tidspunktene T og $T+\mathrm{v}$ (formel (17)), for det tredje lik summen av den totalinvestering av v-årige kapitalgjenstande som har funnet sted mellem tidspunktene $T-\mathrm{v}$ og T (formel (15)).

Den på tidspunkt T eksisterende samlede mengde av kapitalgjenstande av alle varigheter kan analogt uttrykkes på følgende tre måter

$$C(T) = \int_{-\infty}^{T} dt \int_{0}^{\infty} d\mathrm{v}\, P(t\mathrm{v}) = \int_{T}^{T+\mathrm{v}} dt \int_{0}^{\infty} d\mathrm{v}\, R(t\mathrm{v}) = \int_{T-\mathrm{v}}^{T} dt \int_{0}^{\infty} d\mathrm{v}\, Q(t\mathrm{v}) \tag{18}$$

Jeg skal til slutning antyde hvorledes distribusjonsfenomenet og repetisjonsfenomenet hver på sin måte kan opfattes som et grensetilfelle av det sammensatte fenomen.

Massefordelingen i (tv) planet representerer primærinvesteringens fordeling i tid (vannrett) og efter varighet (loddrett). La oss tenke oss at hele massefordelingen skyves sammen vannrett (med bibehold av den loddrette fordeling) slik at hele massen blir konsentrert i stripen t_0 til $t_0 + dt$. Vi kan velge nullpunktet for tiden slik at $t_0 = 0$. Den betraktede stripe blir da stripen 0 til dt. Når massen er skjøvet sammen, blir tettheten innenfor stripen omvendt proporsjonal med stripens bredde. Innenfor stripen (d.v.s. for $0 \leqq t \leqq dt$) har vi altså

$$P(t\mathrm{v}) = \frac{f(\mathrm{v})}{dt} \quad \text{hvor } f(\mathrm{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{P}(t\mathrm{v})\,dt$$

og $\overline{P}(t\mathrm{v})$ er den oprinnelige tetthetsfordeling. Utenfor stripen har vi $P($ $) = 0$.

Innsettes dette i (13) så kommer

$$R(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{dt} \frac{1}{k} \frac{f\left(\frac{T-\xi}{k}\right)}{dt} d\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} f\left(\frac{T}{k}\right)$$

som nettop er distribusjonsfenomenets formel (3).

Tenker vi oss derimot massefordelingen i (tv) planet skjøvet sammen loddrett (med bibehold av den vannrette fordeling) så all masse konsentreres i stripen v til $v + dv$, så blir P(tw) innenfor stripen (altså for $v \overline{\overline{<}} w \overline{\overline{<}} v + dv$) lik $\frac{g(t)}{dv}$ hvor $g(t) = \int_0^{\infty} \bar{P}(tv)dv$.

Utenfor stripen blir $P(tw) = 0$.

Innsettes i (13) så kommer

$$R(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_v^{v+dv} \frac{g(T - kw)}{dv} dw = \sum_{k=1}^{\infty} g(T - kv)$$

som nettop er repetisjonsfenomenets formel (10).