ALGÈBRE. — *Sur le théorème des déterminants de M. Hadamard.* Note de M. RAGNAR FRISCH.

On doit à M. Hadamard l'important théorème suivant : *La valeur absolue d'un déterminant à éléments réels est au plus égale au produit des normes* (soit horizontales, soit verticales). Les normes horizontales d'une matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ sont définies comme les quantités $+\sqrt{\Sigma_j a_{ij}^2} (i=1, 2, \ldots, n)$, et une définition analogue s'applique aux normes verticales.

Dans un cas particulier assez important, l'évaluation fournie par le théorème de M. Hadamard peut être sensiblement précisée. Je vais démontrer le théorème que voici : *La valeur absolue d'un déterminant symétrique, défini, à éléments réels, est au plus égale au produit des valeurs absolues des quantités qui se trouvent dans la diagonale principale.* Nous entendons par déterminant (ou matrice) symétrique défini un déterminant (ou matrice) symétrique telle que la forme quadratique correspondante soit définie.

On peut supposer que la matrice symétrique définie en question $S=\begin{pmatrix} s_{11} \ldots s_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ s_{n1} \ldots s_{nn} \end{pmatrix}$ est définie positive, sans quoi on considérerait $-S$. Si le rang de S est inférieur à n, le théorème est banal. Soit donc S non singulière. Dans ce cas, le déterminant $S=|S|$ ainsi que tous ses mineurs principaux sont positifs, non nuls. En particulier, tous les s_{ii} sont positifs.

$E=\begin{pmatrix} 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$ désignant la matrice-unité, soit $F(\lambda)=|S-\lambda E|$ le polynome caractéristique de S. Évidemment $F(0)=S \neq 0$. D'après un théorème bien connu, on a $F(S)=0$. Puisqu'un polynome quelconque $F(\lambda)$ dont le terme constant est $\neq 0$, peut toujours être mis sous la forme $F=\frac{(G^2-\lambda)}{H}$ où G et H sont des polynomes en λ, la formule $F(S)=0$ suffit comme on le sait à démontrer l'existence de racines carrées, c'est-àdire l'existence de matrices $\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} r_{11} \ldots r_{1n} \\ \ldots\ldots \\ r_{n1} \ldots r_{nn} \end{pmatrix}$ telles que $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{S}$. En effet la matrice $\mathfrak{R} = G(\mathfrak{S})$ jouit de cette propriété. L'essentiel dans notre cas, c'est qu'il existe même des matrices $\mathfrak{R}$ à éléments réels, telles que $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{S}$.

En effet, si $\mathfrak{S}$ est positive définie, toutes les racines de $\mathcal{F}(\lambda) = 0$ sont positives. Et dans ce cas il est toujours possible de s'arranger de façon que tous les coefficients de $G(\lambda)$ soient réels. On s'en rend compte en construisant effectivement $G(\lambda)$. Tous les éléments de $\mathfrak{R} = G(\mathfrak{S})$ sont donc réels. De plus $\mathfrak{R}$, étant un polynome en une matrice symétrique, est elle-même symétrique, d'où $s_{ii} = \Sigma_j r_{ij}^2$.

Cela étant, j'applique le théorème de M. Hadamard au déterminant $R = |\mathfrak{R}|$, ce qui donne $R^2 \leqq s_{11} \ldots s_{nn}$. Mais $R^2 = S$, donc $S \leqq s_{11} \ldots s_{nn}$.

Observation de M. Hadamard *sur la Note précédente.*

L'intéressante proposition de M. Ragnar Frisch peut recevoir une autre démonstration, grâce à la condition (caractéristique, comme on sait, des formes définies positives) que *les mineurs principaux de tous ordres du déterminant sont positifs.*

Ceci étant noté, la démonstration primitive du théorème, telle qu'elle a été donnée en 1893, s'applique sans modification à la nouvelle limitation actuellement en jeu.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 185, p. 1244, séance du 5 décembre 1927.)