ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une formule générale de moyenne.*
Note de M. **Ragnar Frisch.**

Au cours d'une recherche sur l'approximation des intégrales définies, j'ai obtenu une formule de moyenne qui paraît susceptible d'une application assez générale dans le domaine des problèmes qui comportent l'évaluation d'un reste. La formule contient, par exemple, comme cas très particuliers, le théorème de Rolle, la formule de moyenne pour les différences divisées de Newton, etc.

Soit $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ une suite de fonctions réelles de la variable réelle x, possédant des dérivées jusqu'à l'ordre n, et telles que les quantités

$$\mathrm{H}_k(x)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ a'_0 & a'_1 & \dots & a'_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(k)} & a_1^{(k)} & \dots & a_k^{(k)} \end{vmatrix} \qquad \text{où} \qquad a_h^{(k)}=\frac{d^k a_h}{dx^k} \qquad (k=0,1,\dots,n)$$

ne s'annulent pas dans un certain intervalle (i). Soit $f(x)$ une fonction possédant des dérivées jusqu'à l'ordre n dans (i). Enfin, soit x_0, x_1, ..., x_n un système de $(n+1)$ valeurs de x dans (i). Il existe au moins une valeur $x=\xi$ dans l'intervalle (i) telle que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{\begin{vmatrix} a_0(x_0) & a_1(x_0) & \dots & a_{n-1}(x_0) & f(x_0) \\ a_0(x_1) & a_1(x_1) & \dots & a_{n-1}(x_1) & f(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(x_n) & a_1(x_n) & \dots & a_{n-1}(x_n) & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0(x_0) & a_1(x_0) & \dots & a_{n-1}(x_0) & a_n(x_0) \\ a_0(x_1) & a_1(x_1) & \dots & a_{n-1}(x_1) & a_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(x_n) & a_1(x_n) & \dots & a_{n-1}(x_n) & a_n(x_n) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & f \\ a'_0 & a'_1 & \dots & a'_{n-1} & f' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & \dots & a_{n-1}^{(n)} & f^{(n)} \end{vmatrix}(\xi)}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a'_0 & a'_1 & \dots & a'_{n-1} & a'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & \dots & a_{n-1}^{(n)} & a_n^{(n)} \end{vmatrix}(\xi)}$$

Le dénominateur du premier membre de (1) est différent de zéro tant que les valeurs x_0, ..., x_n sont distinctes.

Pour la démonstration, posons

$$\alpha_{k+1}(x)=\mathrm{D}_k\frac{a_{k+1}}{a_0}, \qquad \varphi_k(x)=\mathrm{D}_k\frac{f}{a_0},$$

D_k désignant l'opération $D_k = \frac{d}{d\alpha_k}\frac{d}{d\alpha_{k-1}}\cdots\frac{d}{d\alpha_1}$. A l'aide du théorème de Sylvester relatif aux mineurs d'une matrice on démontre par récurrence la formule explicite

$$\alpha_{k-1}(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_{k+1} \\ a'_0 & a'_1 & \dots & a'_{k-1} & a'_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^k & a_1^k & \dots & a_{k-1}^k & a_{k+1}^k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ a'_0 & a'_1 & \dots & a'_{k-1} & a'_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^k & a_1^k & \dots & a_{k-1}^k & a_k^k \end{vmatrix}.$$

La formule explicite pour φ_k s'en déduit en remplaçant a_{k+1} par f. A l'aide du même théorème, on démontre aussi la formule

$$\alpha'_{k+1} = \frac{d\alpha_{k+1}}{dx} = \frac{H_{k+1}H_{k-1}}{H_k^2} \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Les dérivées α'_{k+1} sont donc finies et différentes de zéro dans l'intervalle (i). Posons encore

$$A_{n-k}(y_0 y_1 \dots y_{n-k}) = \begin{vmatrix} \left(D_k \frac{a_k}{a_0}\right)_{y_0} & \left(D_k \frac{a_{k+1}}{a_0}\right)_{y_0} & \dots & \left(D_k \frac{a_n}{a_0}\right)_{y_0} \\ \left(D_k \frac{a_k}{a_0}\right)_{y_1} & \left(D_k \frac{a_{k-1}}{a_0}\right)_{y_1} & \dots & \left(D_k \frac{a_n}{a_0}\right)_{y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(D_k \frac{a_k}{a_0}\right)_{y_{n-k}} & \left(D_k \frac{a_{k-1}}{a_0}\right)_{y_{n-k}} & \dots & \left(D_k \frac{a_n}{a_0}\right)_{y_{n-k}} \end{vmatrix}.$$

D'une façon analogue, désignons par $F_{n-k}(y_0 \dots y_{n-k})$ le déterminant obtenu en remplaçant a_n par f dans A_{n-k}.

S'il existe un système de $(n-k+1)$ valeurs distinctes $y_0, \dots, y_{n-k}$ dans (i) tel que $A_{n-k}(y_0 \dots y_{n-k}) = 0$, il existe aussi au moins un système de n valeurs distinctes $\eta_0, \dots, \eta_{n-k-1}$ dans (i) tel que $A_{n-k-1}(\eta_0 \dots \eta_{n-k-1}) = 0$. Cette proposition est démontrée par une application répétée de la formule classique de la moyenne, combinée avec un procédé de division par les quantités α'_{k+1} pour des valeurs de x convenablement choisies.

Puisque $A_0(y_0) = D_n \frac{a_n}{a_0} = \frac{d\alpha_n}{d\alpha_n} = 1$, nous voyons que toutes les fonctions $A_{n-k}(k = 0, 1, \dots, n-1)$ sont toujours différentes de zéro tant que les arguments qui y figurent sont distincts.

Cela étant, considérons le rapport $F_{n-k}(y_0 \dots y_{n-k}) : A_{n-k}(y_0 \dots y_{n-k})$. Si les $(n-k+1)$ arguments $y_0 \dots y_{n-k}$ dans (i) sont distincts, il existe un système de $(n-k)$ arguments distincts $\eta_0 \dots \eta_{n-k-1}$ tel que

$$F_{n-k}(y_0 \dots) : A_{n-k}(y_0 \dots) = F_{n-k-1}(\eta_0 \dots) : A_{n-k-1}(\eta_0 \dots).$$

La démonstration repose sur une modification du procédé ci-dessus.

Dans le cas où les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont distinctes, nous trouvons ainsi de proche en proche

$$\frac{F_n(x_0 \ldots x_n)}{A_n(x_0 \ldots x_n)} = \frac{F_0(\xi)}{A_0(\xi)} = \left(D_n \frac{f}{a_0}\right)_\xi = \varphi_n(\xi).$$

La formule (1) est donc exacte dans le cas où les valeurs $x_0, \ldots, x_n$ sont distinctes; et l'on conclut par un passage à la limite qu'elle l'est encore si quelques-uns des x_k viennent à coïncider.

La formule (1) peut être prise comme point de départ d'un développement de la fonction $f(x)$ suivant le système de fonctions données a_0, $a_1, \ldots$.

Soit $B_n(x_0 \ldots x_n)$ l'expression obtenue en remplaçant dans $A_n(x_0 \ldots x_n)$ les fonctions $a_0, a_1, \ldots$ par une nouvelle suite de fonctions $b_0, b_1, \ldots$. Considérant la fonction $A_n(x_0 \ldots).B_n(y_0 \ldots) - A_n(y_0 \ldots).B_n(x_0 \ldots)$ on démontre par une simple application de la formule classique de la moyenne que le rapport $A_n(x_0 \ldots) : B_n(x_0 \ldots)$ satisfait à une formule de moyenne où figurent $(n+1)$ valeurs $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Cette formule contient comme cas particulier la formule de Schwarz [1]. Le point essentiel de la formule (1) est qu'il suffit de considérer une seule valeur ξ.

---

[1] H. A. Schwarz, *Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes* (*Ges. Math. Abh.*, **2**, 1880, p. 301).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **188**, p. 1081, séance du 22 avril 1929.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
86586-29 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.