Méthodes nouvelles

pour

mesurer l'utilité marginale

PAR

Jacques MORET et Ragnar FRISCH

Extrait de la *Revue d'Économie politique*,
n° 1, 1931.

LIBRAIRIE
DU
RECUEIL SIREY
(SOCIÉTÉ ANONYME)
22, Rue Soufflot, PARIS, 5e

1932

Méthodes nouvelles pour mesurer l'utilité marginale.

I

Depuis Jevons, l'idée de quantité d'utilité, ou, plus exactement, la notion d'une utilité plus ou moins grande, a donné lieu à bien des discussions et a fait l'objet de bon nombre de dissertations plus ou moins philosophiques.

La plupart des fondateurs des théories modernes de la valeur, basées sur le concept de l'utilité finale, ont posé en principe que l'utilité était une grandeur mesurable, tout en reconnaissant généralement que l'unité de mesure restait à découvrir.

L'un d'eux, au contraire, Vilfredo Pareto, a pensé faire faire un grand pas à la science en montrant que le mesurage de l'utilité était inutile à l'élaboration de l'économie pure, le repérage des degrés d'utilité étant amplement suffisant.

Cette manière d'esquiver la difficulté est, sans doute, très ingénieuse, élégante, diraient les mathématiciens, au point de vue théorique. Mais dans la pratique elle perd beaucoup de son intérêt, car, si l'on veut mettre la science en contact avec les faits, il importe peu que ce soit par une formule plutôt que par une autre, pourvu que des chiffres puissent, en dernière analyse, se substituer aux lettres.

Dans le domaine tout différent mais cependant analogue de la physique, il est évident que le repérage des températures qui ne peuvent pas être mesurées joue un rôle parallèle à celui du mesurage des quantités de chaleur, de même en électricité.

C'est pourquoi les économistes mathématiciens contemporains se sont appliqués à s'évader des considérations plus ou moins académiques aboutissant à des définitions axiomatiques de l'utilité pour les remplacer par des notions expérimentales permettant de donner une forme objective aux problèmes économiques.

En particulier, les fondateurs de l'Econometric Society, qui a pour but de rapprocher l'économie politique des sciences naturelles, se sont attachés à formuler les concepts quantitatifs de l'utilité, de manière à les rendre adéquats aux données de la pratique : statistiques, résultats d'enquêtes, d'interviews, etc. Ils ont voulu passer du domaine de la théorie de l'utilité à celui du calcul numérique des fonctions d'utilité.

Ce passage de la théorie à la pratique n'implique nullement une sorte de mépris pour les travaux purement scientifiques. Il marque, au contraire, le début d'une nouvelle étape qui n'aurait pas pu être abordée si la science pure ne fournissait pas les quelques formules devenues classiques qui lui servent de base. Mais il fait abstraction des lacunes que ces formules peuvent laisser subsister au point de vue strictement logique, de même que l'art de l'ingénieur ne s'attarde pas à attendre la solution mathématique de tous les problèmes de la théorie de l'élasticité.

A raison de l'importance fondamentale des procédés statistiques de mesure de l'utilité marginale, qui apparaissent ainsi comme devant constituer le trait d'union entre l'ancien domaine de l'économie politique et celui de l'économétrie, M. Ragnar Frisch, professeur à l'Université d'Oslo, a eu l'heureuse idée d'exposer à la première réunion européenne de l'Econometric Society les quatre méthodes qui sont actuellement offertes aux praticiens de l'économie politique.

C'est donc en résumant aussi fidèlement que possible sa brillante communication que nous allons essayer d'exposer brièvement ces méthodes.

Nous devons, toutefois, rappeler au préalable quelques définitions et formules, devenues classiques, qui nous seront nécessaires dans la suite.

Désignons par u l'utilité marginale du kilog. de la marchandise considérée, le sucre, par exemple, par p le prix en francs du kilog. de cette marchandise, du kilog. de sucre dans notre exemple, et par μ l'utilité marginale de la quantité de sucre qui peut être achetée pour 1 franc, c'est-à-dire de $\frac{1}{p}$ kilog.:

$$\mu = \frac{u}{p}. \tag{1}$$

Soit x la quantité de sucre consommée par unité de temps, et $\xi = x.p$ la dépense en sucre pendant cette unité. Si nous supposons que u est une fonction de x seulement, μ sera une fonction de ξ et de p, et nous aurons d'après (1) :

$$\mu(\xi, p) = \frac{u}{p} = \frac{1}{p}\, u\left(\frac{\xi}{p}\right). \tag{2}$$

Désignons de même par w l'utilité du revenu par unité de pouvoir d'achat réel, c'est-à-dire par unité du « bien général », suivant l'expression de M. Birck [1], par P le prix de la vie, et par ω l'utilité du revenu par franc. Nous aurons :

$$\omega = \frac{w}{\mathrm{P}} \tag{3}$$

Soit r le revenu réel, c'est-à-dire la quantité du bien général dont dispose l'individu par unité de temps, et $\rho = r.\mathrm{P}$ le revenu nominal pendant cette unité. Si nous supposons que w est une fonction de r seulement, ω sera une fonction de ρ et de r, et nous aurons :

$$\omega(\rho, \mathrm{P}) = \frac{w}{\mathrm{P}} = \frac{1}{\mathrm{P}}\, w\left(\frac{\rho}{\mathrm{P}}\right). \tag{4}$$

En partant de la notion de revenu réel r et en admettant que w est une fonction de r seulement, cette équation ramène l'étude de la fonction de deux variables $\omega(\rho, \mathrm{P})$ à celle de la fonction d'une seule variable $w(r)$. Les variations du prix de la vie, P, sont transformées en variations du revenu réel, et permettent ainsi d'étudier le phénomène qui se produit

1. *Laeren om Graensevaerdien*, Copenhague, 1917, édition anglaise : *The Theory of marginal value*, Londres, 1922.

lorsque le prix de la vie reste constant et que le revenu nominal varie.

C'est là le principe même des méthodes que M. Ragnar Frisch a employées pour déterminer la courbe $w(r)$ de l'utilité marginale du revenu, en donnant le nom de *flexibilité* du revenu à l'expression :

$$\overline{w}(x) = \frac{d \log w(r)}{d \log r}, \tag{5}$$

et celui de *flexibilité moyenne* dans l'intervalle r_1, r_2 à l'expression :

$$\overline{w}(r_1, r_2) = \frac{\log w(r_2) - \log w(r_1)}{\log r_2 - \log r_1} \tag{6}$$

Ces méthodes reposent sur la considération des « surfaces de consommation », auxquelles on est conduit de la manière suivante :

L'équilibre du marché exige évidemment que l'utilité du revenu par franc multiplié par le prix du sucre soit égale à l'utilité du sucre par kilog. C'est la formule classique de la proportionnalité des utilités. On a donc :

$$\omega . p = u. \tag{7}$$

En introduisant dans cette équation l'expression de ω, tirée de l'équation (4), et en désignant par α le prix réciproque du sucre $\frac{P}{p}$ on obtient :

$$w(r) = \alpha . u(x). \tag{8}$$

Or, cette dernière équation représente une surface en x, r et α et les courbes d'intersection par des plans parallèles aux plans des coordonnées présentent chacune un intérêt particulier.

1° Pour un revenu réel constant, les courbes en α, x ont la même signification que les courbes de demande ordinaire, dont elles ne diffèrent que par la substitution du prix réciproque α au prix p.

2° Pour un prix constant du bien considéré, le sucre, les courbes en x, r, constituent les *courbes d'Engel*, représentant la variation de la consommation du sucre avec le revenu réel.

3° pour une quantité consommée constante, les projections des courbes en α, r, qui ont reçu de M. Ragnar Frisch le nom d'*isoquantes*, se confondent, à un facteur constant près, avec la courbe d'utilité marginale du revenu.

L'équation :

$$w(r) = \alpha . u(x), \tag{8}$$

devient en effet pour x constant :

$$\alpha = C^{te}\, w(r),$$

ce qui montre, au surplus, que toutes les isoquantes dérivent de l'une d'entre elles par simple changement de l'unité de mesure le long de l'axe des α.

La surface de consommation est déterminée par les fonctions $w(r)$ et $u(x)$.

Inversement, si la surface de consommation est connue par la statistique, ces fonctions se trouvent déterminées à un facteur constant près.

En effet, si l'on désigne par $w(r)$ et $u(x)$ d'une part, et par $w_1(r)$ et $u_1(x)$ d'autre part, deux systèmes de fonctions répondant à cette même surface de consommation, on a :

$$\frac{w(r)}{u(x)} = \frac{w_1(r)}{u_1(x)} = \alpha$$

et par suite :

$$\frac{u_1(x)}{u(x)} = \frac{w_1(r)}{w(r)},$$

d'où il résulte que ces deux rapports sont constants, puisque le premier membre de l'équation est indépendant de r, et le second de x.

Cela étant, nous pouvons exposer maintenant les quatre méthodes actuelles de mesure de l'utilité marginale.

1° La méthode des isoquantes.

Cette méthode, imaginée par M. Ragnar Frisch, en 1923, a été publiée par lui en 1926 dans un mémoire intitulé : *Sur un problème d'économie pure*, dont il a été rendu compte, en 1926, aux lecteurs de la *Revue* (p. 1236).

Elle découle directement de l'exposé général ci-dessus et consiste à déterminer par interpolation et approximations successives la surface de consommation répondant à des données statistiques correspondant soit à un individu particulier, soit, mieux, à un groupe d'individus, étant bien entendu que, dans ce dernier cas, il ne s'agit pas d'assimiler les utilités appréciées par des individus différents, mais seulement de faire état de leur attitude moyenne concernant leurs revenus et leurs consommations.

M. Ragnar Frisch a appliqué la méthode des isoquantes aux données statistiques relatives au sucre à des époques différentes, fournies par l'Union des coopérateurs de la région parisienne, et il en a déduit la première courbe d'utilité marginale du revenu qui ait jamais été établie sur des bases pratiques.

2° La méthode d'Irving Fisher.

La méthode de M. I. Fisher est plus ancienne que celle de M. Ragnar Frisch, en ce sens que son auteur l'a exposée à son cours à l'Université Yale dès 1912, mais elle n'a été publiée qu'en 1927 dans les *Economic Essays contributed in honor of John Bates Clark* [1].

Cette méthode diffère de celle des isoquantes par une plus grande généralité. Elle consiste à considérer l'utilité ω du revenu nominal ρ comme une fonction non seulement de ρ mais aussi des prix $p_1, p_2 \ldots p_n$ de tous les biens figurant sur le marché, au lieu d'englober tous les prix dans le paramètre P, représentant le prix de la vie.

Elle comporte, en outre, deux biens de comparaison au lieu d'un seul.

Mais sa généralité même la rend pratiquement inapplicable lorsqu'on ne dispose que du matériel *actuel*. Elle implique, en effet, l'emploi de données statistiques où tous les prix seraient constants, puisque, en dehors de ce cas, l'hypothèse :

$$\omega = f(\rho, p_1, p_2 \ldots p_n),$$

1. Publication de l'*American Economic Association*, Macmillan, 1927.

ne conduirait pas à la représentation de l'utilité du revenu ω par une « courbe » en ρ, ce qui est le but même des méthodes en question.

Il est à souhaiter que les données statistiques, de plus en plus exactes et détaillées, qui se constituent, permettent, un jour, d'appliquer la méthode d'Irving Fisher et de vérifier ainsi que l'hypothèse introduite par M. R. Frisch dans l'équation (4) est suffisamment justifiée pour une première approximation.

3° La méthode de la variation de la quantité.

Les deux dernières méthodes de mesure de l'utilité marginale ont été imaginées tout récemment par M. Ragnar Frisch à l'occasion du cours qu'il a donné, en 1930, à l'Université Yale.

Elle a eu pour point de départ la constatation, par M. I. Fisher et M. R. Frisch, de l'impossibilité d'appliquer les deux premières méthodes aux données statistiques américaines, qui ne fournissaient pas d'indications concernant la comparaison des prix en des lieux différents à une même époque.

Au lieu de faire varier le prix, M. Ragnar Frisch a eu l'idée de faire varier la quantité et de prendre, par suite, en considération, non plus les isoquantes, courbes en α et r, mais les courbes d'Engel parallèles au plan des x, r.

Il est clair qu'une seule section x, r correspondant à une valeur α_1 de α, ne peut être d'aucun usage pour déterminer la courbe d'utilité marginale du revenu, mais, si l'on connaît deux sections correspondant aux valeurs α_1 et α_2 de α, la forme de la fonction $w(r)$ peut, pratiquement, être déterminée point par point.

Soit, en effet, $r = r_1(x)$ et $r = r_2(x)$ les courbes d'Engel données par les sections $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_2$, l'équation :

$$w(r) = \alpha . u(x), \tag{8}$$

devient :

$$w[r_1(x)] = \alpha_1 . u(x),$$

et :

$$w[r_2(x)] = \alpha_2 . u(x),$$

d'où :

$$w\,[r_2\,(x)] = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,w\,[r_1\,(x)] \tag{9}$$

$r_1\,(x)$ et $r_2\,(x)$ étant des fonctions données, cette dernière formule peut être considérée comme une équation fonctionnelle en $w\,(r)$.

Cette équation se réduirait, d'ailleurs, à une équation aux différences finies si l'on supposait que r_2 est une fonction linéaire de r_1.

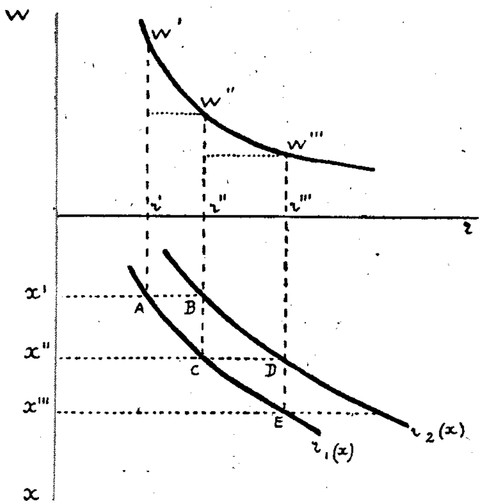

Fig. 1.

Mais une telle hypothèse ne saurait se justifier, et elle est d'ailleurs inutile pour obtenir graphiquement une solution pratiquement applicable aux données statistiques.

Tirons deux axes rectangulaires et portons les r en abscisses, les w en ordonnées au-dessus de l'axe des r, et les x en ordonnées en dessous de cet axe.

Traçons dans l'angle des r, w les deux courbes d'Engel correspondant à $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_2$ (fig. 1) :

Prenons maintenant une valeur x' de x et déterminons les points A et B d'abscisses $r' = r_1\,(x')$ et $r'' = r_2\,(x')$ qui y correspondent.

Choisissons, de plus, une valeur arbitraire, w', pour $w\,(r')$. L'équation (9) détermine alors l'ordonnée $w\,(r'')$ pourvu que la constante $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ soit connue. Cette ordonnée étant déterminée, revenons en C à la courbe d'Engel r_1 et déterminons ainsi la quantité x'' correspondant au revenu r''. Passons ensuite sur la seconde courbe d'Engel au point D, correspondant à la quantité x''.

Etant donné que $r'' = r_1\,(x'')$ et $r''' = r_2\,(x''')$, l'équation (9) donne :

$$w\,(r''') = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,w\,(r'')$$

En continuant ainsi de proche en proche, on peut déterminer autant de points de la courbe $w\,(r)$ qu'il est possible de tracer de zigzags entre les parties courbes r_1 et r_2, répondant aux données statistiques.

Dans le cas où le matériel fourni par l'observation des faits ne permettrait pas de tracer des zigzags, on pourrait avoir recours à la notion de flexibilité. Il peut être, en outre, avantageux de substituer les logarithmes aux données expérimentales.

Ainsi la méthode de la variation de la quantité permet de construire la courbe d'utilité marginale du revenu quand on connaît deux courbes d'Engel et le rapport des paramètres α correspondants.

Chaque courbe d'Engel se rapporte à des budgets de famille pour une localité donnée, et le rapport des paramètres α est déterminé quand on connaît le prix de la vie et le prix du bien de comparaison dans l'une de ces localités en fonction de ceux de l'autre.

Lorsque les données statistiques permettent de disposer de plus de deux courbes d'Engel, on peut construire plusieurs courbes d'utilité marginale du revenu, et il devient alors possible de contrôler si les résultats obtenus sont identiques.

4° La méthode de translation.

Pratiquement, les prix de comparaison peuvent faire défaut, au point de rendre inapplicable la méthode des variations de la quantité elle-même.

C'est pourquoi M. Ragnar Frisch a cru devoir reprendre le problème précédent d'une manière différente.

Les courbes d'Engel que les statistiques permettent de tracer sont, en réalité, des courbes de dépense exprimant les relations entre la dépense en sucre $\xi = x.p$, p étant le prix du sucre, et le revenu nominal $\rho = r.\mathrm{P}$, P étant le prix de la vie.

Pour passer de ces courbes de dépense aux courbes de quantité, il faut donc diviser les ordonnées par p, et les abscisses par P. Par suite, en remplaçant les abscisses et les ordonnées de la courbe de dépense par leurs logarithmes, on peut obtenir la courbe de quantité par une simple translation d'une longueur égale à log. p vers le bas et à log. P vers la droite.

Le problème de la détermination de la courbe de quantité revient donc à celui de l'évaluation des composantes log. p et log. P de la translation. En d'autres termes, la forme de la courbe étant connue, il ne s'agit plus que de fixer sa position.

Or, cette position résulte de la forme même des courbes d'Engel.

En supposant que l'on dispose de deux ou plusieurs courbes d'Engel, on peut tout d'abord observer comme première approximation que ces courbes doivent être arrangées de telle sorte qu'elles n'aient aucun point d'intersection, puisqu'elles représentent les lignes de niveau d'une surface de consommation dont l' « altitude » est représentée par α.

En traçant une « diagonale » inclinée à 45 degrés à travers le graphique log. ξ, log. ρ (fig. 2), on peut ensuite faire les observations suivantes :

Supposons que les courbes d'Engel, relatives à deux villes différentes, New-York et San-Francisco, par exemple, aient été mises en place, et désignons par m la « latitude »

de New-York par rapport à San-Francisco, en donnant ce nom à la distance des deux diagonales correspondantes, consi-

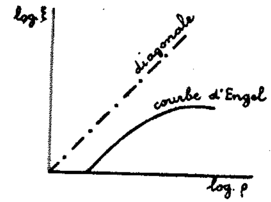

Fig. 2.

dérée comme positive si la seconde diagonale est au-dessus de la première, et négative dans le cas contraire.

Si les prix de New-York, sont exprimés par rapport à ceux de San-Francisco, la valeur d'α, pour New-York, est déterminée par :

$$\log. \alpha = \sqrt{2}\, m. \tag{10}$$

Si donc le prix de la vie est le même dans les deux villes, mais le prix de la marchandise considérée, le sucre, plus élevé dans la première, la courbe d'Engel, pour New-York, sera placée au-dessus de celle de San-Francisco, et, d'après la formule ci-dessus, il en sera de même pour les diagonales.

On peut, par suite, énoncer comme « premier principe de latitude » que l'ordre de succession des villes doit être le même quand cet ordre est déterminé par les courbes d'Engel ou par les diagonales.

D'autre part, en assimilant la surface de consommation à un plan dans le voisinage du point considéré, on peut regarder la différence d'altitude des courbes d'Engel (lignes de niveau) comme proportionnelle à leur écartement sur le plan où elles sont tracées (plan de la carte géographique). D'où, en utilisant la formule (10), le « second principe de latitude » : la distance entre les courbes d'Engel doit être proportionnelle à la distance entre les diagonales.

Enfin, il est permis de poser comme « troisième principe de latitude » que l'application du second principe est approximativement indépendante du point de la courbe considéré.

Par ailleurs, si l'on appelle A la distance horizontale de deux courbes de quantité, et D la distance verticale de leurs diagonales (fig. 3), et si l'on désigne par r_1 et r_2 les revenus

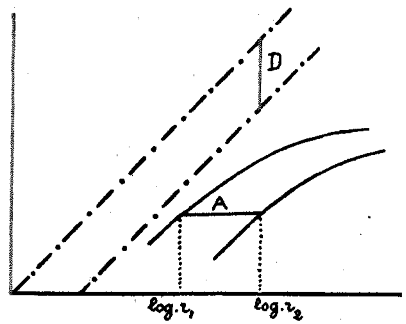

FIG. 3.

réels correspondant aux deux extrémités de l'intervalle A, et par w l'utilité de ces revenus, en vertu de l'équation :

$$(9) \qquad w[r_2(x)] = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\, w[r_1(x)]$$

on a :

$$(11) \quad \bar{w}(r_1, r_2) = \frac{\log w(r_2) - \log w(r_1)}{\log r_2 - \log r_1} = \frac{\log \alpha_2 - \log \alpha_1}{\log r_2 - \log r_1} = \frac{D}{A}$$

de telle sorte que $\frac{D}{A}$ apparaît comme l'expression de la flexibilité moyenne de la courbe d'utilité marginale du revenu dans l'intervalle A.

Dans les cas où les deux points r_1 et r_2 sont peu différents, cette expression peut être considérée comme celle de la flexibilité au milieu de l'intervalle, correspondant à $r = \sqrt{r_1 . r_2}$, et, la même construction pouvant être faite pour deux villes quelconques, il est permis de poser comme « quatrième principe » de translation que la flexibilité ainsi déterminée doit être indépendante de la paire de villes choisie.

Outre les principes ci-dessus, qui permettent de déterminer la translation d'une manière pratiquement univoque, on peut

aussi, en dernière analyse, appliquer la méthode des moindres carrés sans introduire cependant des fonctions analytiques particulières, mais c'est un point que M. Ragnar Frisch n'a pas développé à Lausanne.

L'application aux données américaines lui a procuré les résultats suivants. En prenant comme base San-Francisco, il a choisi neuf villes, pour lesquelles il a calculé P et p par la méthode de translation :

	Prix de la vie. — P	Prix des denrées alimentaires. — p
San-Francisco	1,00	1,00
Minneapolis	86	1,00
Houston (Texas)	99	1,10
New-York City	1,24	1,56
Savannah (Géorgie)	72	66
New-Orléans	89	78
Buffalo	1,04	1,24
Boston	1,20	1,63
Détroit	1,07	1,35

En partant de ces chiffres, il a construit par la méthode de la variation de la quantité la courbe de flexibilité du revenu, et a obtenu ainsi une flexibilité allant constamment en diminuant de 0,6 à 0,3 entre le début et la fin de l'intervalle correspondant aux données statistiques ci-dessus.

Il a en outre observé la concordance des résultats auxquels il est parvenu en utilisant des paires de villes différentes. D'une part, il a pu constater que tous les points qu'il a déterminés sont tombés dans une bande n'ayant qu'une largeur de 0,07 de part et d'autre de la courbe de flexibilité tracée au milieu d'eux, et d'autre part, pour chaque paire de villes, il a relevé une même diminution caractéristique de la flexibilité au fur et à mesure de l'augmentation du revenu.

Ce sont là des résultats qui montrent clairement que les méthodes ci-dessus font sortir l'économie politique du domaine de la spéculation pure pour le faire entrer dans celui de la réalité et que, sous la seule réserve d'un plus grand développement et surtout d'une plus grande cohérence des observations statistiques, la science économique est devenue une science « applicable ».

**

En dehors de la conférence de M. Ragnar Frisch, le programme de la réunion de Lausanne de l'Econometric Society comportait notamment un exposé de M. J. Marschak sur la détermination statistique des courbes d'offre et de demande.

Cet exposé a fait l'objet d'une certaine critique de la part de M. R. Frisch, qui a cru devoir reprendre cette question dans une communication sur l'impossibilité de construire des courbes de demande cournotéennes à partir d'une seule courbe de budget.

Nous sommes heureux de pouvoir reproduire ci-après cette communication, suivie d'une note inédite aussi importante qu'intéressante.

MORET.

II

Communication à la séance du matin de la troisième journée (24 septembre) de la réunion de la Société Econométrique, à Lausanne, 1931.

MESSIEURS.

Après une conversation prolongée avec M. Marschak, hier soir, concernant la question que nous avions discutée à la séance du matin, à savoir : la validité de la formule par laquelle M. Marschak dérive sa courbe de demande d'une courbe de budget, je suis devenu convaincu qu'il s'est glissé une erreur dans le développement de cette formule. La nature de cette erreur est telle que les courbes de demande obtenues par M. Marschak ne peuvent plus être interprétées comme des courbes de demande ordinaires dans le sens de Cournot (courbes de demande isolées, suivant la terminologie de M. Marschak), mais doivent être interprétées comme étant du type que M. Marschak a appelé les courbes de demande « parallèles ». Cela ne veut pas dire que les calculs de M. Marschak sont sans valeur. Je tiens à préciser qu'un intérêt réel s'attachera toujours aux courbes qu'il a obtenues, même si ces courbes doivent être interprétées comme des courbes « parallèles ».

Pour montrer en quoi consiste l'erreur en question, je poserai le problème d'une façon un peu plus générale que ne l'a fait M. Marschak.

Considérons d'un côté un bien spécial, par exemple le sucre, et d'un autre côté l'entité de tous les autres biens que consomme l'individu. Soit a la dépense pour le sucre et A la dépense pour les autres biens. S'il n'y a pas d'épargne ou si l'épargne est comprise dans les « autres choses », le revenu nominal sera :

$$\rho = a + A.$$

Soit p le prix du sucre, et P l'indice du prix des autres choses. Le rapport $\frac{a}{p}$ est alors la quantité de sucre consommé, et le rapport $\frac{A}{P}$ peut être considéré comme « la quantité » des autres choses. Si ces quantités sont désignées x et X respectivement, on a :

$$a = xp \qquad A = XP.$$

Faisons l'hypothèse que la quantité de sucre que l'individu demande est une fonction de ρ, p et P seulement. Soit :

$$x = g(\rho, p, P), \tag{1}$$

cette fonction. La fonction (1) doit satisfaire à l'équation de proportionnalité :

$$g(\lambda\rho, \lambda p, \lambda P) = g(\rho, p, P), \tag{2}$$

où λ est un facteur arbitraire. En effet, si l'on compte les prix et le revenu en centimes au lieu de les compter en francs, ceci ne devra pas avoir d'influence sur la quantité de sucre qu'achète l'individu.

Soit p_0 et P_0 des valeurs spéciales de p et P, et désignons par :

$$k(\rho) = g(\rho, p_0, P_0) \tag{3}$$

la fonction de ρ à laquelle g se réduit pour $p = p_0$ et $P = P_0$.

La fonction $k(\rho)$ représente une courbe de budget (« courbe d'Engel »). Cette courbe est donnée numériquement si l'on dispose des données statistiques de budgets de famille, associées à la situation des prix $p = p_0$, $P = P_0$.

La manière dont la fonction g dépend de p et P, ρ conservant une grandeur constante, peut être représentée par une surface élevée au-dessus du plan (p, P). Dans le plan (p, P), considérons en particulier le point (p_0, P_0). Voir figure 1.

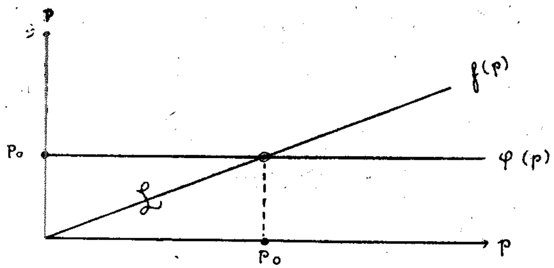

Fig. 1.

Menons une ligne droite L par l'origine et le point (p_0, P_0). Un mouvement le long de L représente un mouvement de prix proportionnel. Tout le long de la ligne L nous avons :

$$P = \frac{P_0}{p_0}\, p.$$

Nous pouvons donc considérer p comme un paramètre variable par lequel on fait engendrer la ligne L. Chaque point de L est caractérisé d'une façon univoque par la valeur correspondante de p, c'est-à-dire, le long de L, x peut être considéré comme une fonction de p :

$$x = f(p) = g\left(\rho, p, \frac{P_0}{p_0}\, p\right).$$

D'après sa définition, la fonction $f(p)$ dépend évidemment aussi de ρ, mais, pour l'objet que nous poursuivons, il n'est pas nécessaire de l'indiquer explicitement. La fonction $f(p)$ est la fonction de demande « parallèle » de M. Marschak. Comme M. Marschak l'a montré, cette fonction peut être déterminée par la courbe du budget. Dans la notation adoptée ici, la démonstration prend la forme que voici :

Faisons dans (2) :

$$P = \frac{P_0}{p_0}\, p \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{p_0}{p}.$$

Il vient :

$$g\left(\rho, p, \frac{P_0}{p_0}\, p\right) = g\left(\frac{p_0\rho}{p}, p_0, P_0\right)$$

c'est-à-dire d'après (3) :

$$g\left(\rho, p, \frac{P_0}{p_0}\, p\right) = k\left(\frac{\rho p_0}{p}\right)$$

d'où :

$$f(p) = k\left(\frac{\rho p_0}{p}\right). \tag{4}$$

Aussi le long de la ligne horizontale passant par (p_0, P_0) dans la figure 1, x peut être considéré comme une fonction de p :

$$x = \varphi(p) = g(\rho, p, P_0).$$

Cette fonction est la fonction de demande dans le sens ordinaire cournotéen. M. Marschak l'appelle fonction de demande « isolée ». En vertu de la définition des fonctions $f(p)$ et (p), on a évidemment :

$$\varphi(p_0) = f(p_0). \tag{5}$$

M. Marschak maintient que si la marchandise spéciale considérée joue *un rôle très petit* dans le budget, c'est-à-dire, si le rapport $\frac{a}{A}$ est très petit, on a alors approximativement :

$$\varphi(p) = f(p), \tag{6}$$

aussi pour les valeurs de p qui diffèrent de p_0, et c'est sur cette formule qu'est basée sa méthode de « Spiegelbildkonstruktion », c'est-à-dire la méthode consistant à construire les courbes de demande cournotéennes par la formule :

$$\varphi(p) = k\left(\frac{\rho p_0}{p}\right).$$

C'est la démonstration de la formule (6), chez M. Marschak, qui est en défaut. Voici son raisonnement exprimé dans notre notation. Considérons la différentielle de la dépense a par un mouvement le long de L, ρ gardant une grandeur constante.

Désignons par Δ des accroissements associés au mouvement sur L. Puisque sur L $a = pf(p)$ on a d'abord :

$$\Delta a = \frac{d}{dp}\,[pf(p)]\cdot\Delta p. \tag{7}$$

D'un autre côté, nous avons pour des variations de dp et $d\mathrm{P}$ quelconques :

$$da = \frac{\partial a}{\partial p}\,dp + \frac{\partial a}{\partial \mathrm{P}}\,d\mathrm{P}.$$

Introduisons $a = \rho - \mathrm{A}$, nous obtenons, puisque ρ est constante :

$$da = \frac{\partial a}{\partial p}\,dp - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{P}}\,d\mathrm{P}. \tag{8}$$

En particulier, pour un mouvement sur L, c'est-à-dire pour un mouvement dont les différentielles satisfont à la proportionnalité :

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}$$

la formule (8) donne :

$$\Delta a = \left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\mathrm{P}_0}{p_0}\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{P}}\right)\cdot\Delta p. \tag{9}$$

Comparons cette formule à la formule (7), on a donc en tout point sur L :

$$\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{d[pf(p)]}{dp} = \frac{\mathrm{P}_0}{p_0}\cdot\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{P}}. \tag{10}$$

Jusqu'ici, tout est correct; l'erreur intervient quand il s'agit de calculer l'expression $\frac{\partial a}{\partial p}$ qui figure dans (10).

Le raisonnement de M. Marschak est que, puisque $\frac{\partial a}{\partial p}$ est une dérivation par rapport à p, ρ et P étant constants, cette dérivation est égale à $\frac{d[p\varphi(p)]}{dp}$. Cela n'est correct que pour des points (p, P) qui se trouvent *sur la ligne horizontale passant par* (p_0, P_0). En effet, il n'y a que sur cette ligne-là qu'on a $a = p\varphi(p)$. Mais l'expression $\frac{\partial a}{\partial p}$ qui figure dans la formule (10) est une expression appartenant à un point (p, P) *qui se trouve sur* L. Il est vrai que P est constante pendant la dérivation $\frac{\partial a}{\partial p}$ mais cette constante n'est pas, en général, égale à P_0. Elle est égale à P_0 seulement si la variable p a la valeur spéciale $p = p_0$. Le raisonnement de M. Marschak n'est donc valable que pour le point spécial : $p = p_0$.

Pourtant, continuons le raisonnement et voyons à quel résultat il aboutit. Si l'on avait eu :

$$\frac{\partial a}{\partial p} = \frac{d[p\varphi(p)]}{dp}$$

pour p quelconque, on aurait obtenu de (10) :

$$\frac{d}{dp}\Big[p\,[\varphi(p) - f(p)]\Big] = \frac{\mathrm{P}_0}{p_0}\,\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{P}}. \tag{11}$$

Sur ce point, M. Marschak fait intervenir l'hypothèse de la petite importance, c'est-à-dire l'hypothèse que le rapport $\frac{a}{\mathrm{A}}$ est un nombre très petit pour toutes les situations des prix et du revenu considérés. M. Marschak pense que si l'on adopte l'hypothèse de la petite importance, le second membre de (11) est un nombre que l'on peut négliger par rapport aux termes du premier membre de (11). S'il en est ainsi, la fonction $p[(\varphi p) - f(p)]$ est alors approximativement une constante, et, en vertu de (5), cette constante doit être zéro, c'est-à-dire qu'on aura établi (6). Mais, en vertu de l'erreur commise, la démonstration n'est pas achevée.

Note ajoutée après la Conférence.

Nous avons vu que la formule (11) n'est pas correcte pour un p quelconque. Mais, d'après ce qui précède, elle est correcte pour $p = p_0$. En exécutant la dérivation nous trouvons donc en vertu de (5) :

$$\left(\frac{d \log \varphi}{d \log p}\right)_0 = \left(\frac{d \log f}{d \log p}\right)_0 + \left(\frac{P}{a} \frac{\partial A}{\partial P}\right)_0 \tag{12}$$

L'indice zéro indiquant que toutes les quantités doivent être prises au point $p = p_0$. Si l'hypothèse de la petite importance est suffisante pour rendre le dernier terme en (12) négligeable, comme le pense M. Marschak, (12) nous donne alors l'élasticité de la fonction de demande cournotéenne *au point* spécial $p = p_0$, c'est-à-dire correspondant au prix du bien observé dans le matériel de budget étudié. En effet, en vertu de (4), l'élasticité de la fonction $f(p)$ est connue pour toute une série de valeurs de p, et en particulier elle est connue au point $p = p_0$.

Cela veut dire : Il reste toujours impossible de construire les courbes cournotéennes de demande par le « Spiegelbild-methode » de M. Marschak, mais, si l'on pouvait négliger le dernier terme en (12), on aurait du moins un moyen de déterminer l'élasticité de la courbe cournotéenne au point $p = p_0$.

Malheureusement, même cette information-là est impossible à obtenir. *L'hypothèse de la petite importance est insuffisante pour rendre le dernier terme en* (12) *négligeable.* Ceci peut être démontré d'une façon très simple si l'on se sert de certaines règles fondamentales pour l'opération qu'on peut appeler la *dérivation élastique*, et qui est définie ainsi : Soit $u(x)$ une fonction de x, la dérivée élastique de u par rapport à x est la fonction :

$$\varepsilon u(x) = \check{u}(x) = \frac{d \log u(x)}{d \log x} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u}.$$

Ainsi, la dérivée élastique n'est qu'un autre nom de l'élasticité. Et l'opération qui consiste à prendre la dérivée élastique est désignée ε. Il existe certaines règles simples et très utiles pour l'application de la dérivation élastique. Je me permets d'en citer quelques-unes :

I. — La dérivée élastique d'un produit est égale à la somme des dérivées élastiques des facteurs. Si u et v sont des fonctions de x on a :

$$\varepsilon(uv) = \varepsilon u + \varepsilon v = \check{u} + \check{v}.$$

II. — La dérivée élastique d'une fraction est égale à la différence entre la dérivée élastique du numérateur et la dérivée élastique du dénominateur :

$$\varepsilon \frac{u}{v} = \varepsilon u - \varepsilon v = \check{u} - \check{v}.$$

III. — La dérivée élastique d'une somme est égale à la moyenne pondérée des dérivées élastiques des termes :

$$\varepsilon(u + v) = \frac{u \cdot \varepsilon u + v \cdot \varepsilon v}{u + v} = \frac{u\check{u} + v\check{v}}{u + v}.$$

IV. — La dérivée élastique d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivés élastiques :

$$\varepsilon_t \mathcal{F}[x(t)] = [\varepsilon_x \mathcal{F}(x)] \cdot [\varepsilon_t x(t)] = \check{\mathcal{F}} \cdot \check{x},$$

ε_t et ε_x désignant respectivement des dérivations élastiques par rapport à t et x. La formule considérée se généralise aisément à une fonction F de plusieurs variables.

V. — La dérivation élastique d'une puissance :

$$\varepsilon x^a = a \qquad (a \text{ constante}).$$

En particulier :

$$\varepsilon c = 0 \ (c = \text{constante} \neq 0), \quad \varepsilon x = 1, \quad \varepsilon \frac{1}{x} = -1.$$

VI. — Deux fonctions dont le rapport est constant ont la même dérivée élastique :

$$\varepsilon(cu) = \varepsilon u = \check{u}.$$

VII. — L'accroissement d'une fonction de plusieurs variables F $(x, y \ldots)$ exprimé en pourcentage :

$$\frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = \check{\mathcal{F}}_x \frac{dx}{x} + \check{\mathcal{F}}_y \frac{dy}{y} + \ldots$$

où $\check{\mathcal{F}}_x$, $\check{\mathcal{F}}_y$ ... désignent les dérivées élastiques de F prises par rapport à x, y ...

On voit que la dérivée élastique se comporte vis-à-vis de la multiplication d'une façon analogue à celle dont se comporte la dérivée ordinaire vis-à-vis de l'addition. Les formules précédentes sont facilement démontrées en appliquant les règles pour la dérivation ordinaire.

Pour calculer la quantité $\frac{P}{a}\frac{\partial A}{\partial P}$, on peut d'abord remarquer que A est la fonction suivante de ρ, p et P :

$$A = \rho - pg(\rho, p, P),$$

de façon que :

$$\frac{\partial A}{\partial P} = -p\,\frac{\partial g}{\partial P}$$

c'est-à-dire :

$$A_P = -\frac{a}{A}\,g_P, \tag{13}$$

où l'on a posé :

$$A_P = \frac{\partial A}{\partial P}\cdot\frac{P}{A}$$

$$g_P = \frac{\partial g}{\partial P}\cdot\frac{P}{g}$$

Pour trouver une expression de g_P, on peut partir de l'équation de la surface de consommation :

$$\frac{w(r)}{Q} = \frac{u(x)}{p}, \tag{14}$$

où $u\ (x)$ est la courbe d'utilité marginale du bien particulier considéré, $w\ (r)$ est l'utilité marginale du revenu, $r = \frac{\rho}{Q}$ étant le revenu réel, et Q l'indice général des prix. Nous supposons que Q est donné comme une fonction de p et P. Soit $Q\ (p, P)$ cette fonction. La fonction $g\ (\rho, p, P)$ n'est que la fonction de ρ, p, et P, que l'on obtient en résolvant (14) par rapport à x et en introduisant dans l'expression obtenue :

$$Q = Q(p,P) \quad \text{et} \quad r = \frac{\rho}{Q(p, P)}.$$

Posons :

$$Q_P = \frac{\partial Q}{\partial P}\cdot\frac{P}{Q}$$

$$\check{w} = \frac{dw}{dr}\cdot\frac{r}{w}$$

$$\check{u} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u}$$

$\check{w}$ et $\check{u}$ sont les flexibilités des fonctions w et u.

Pour les fonctions $\check{w}\ (r)$ et $\check{u}\ (x)$, j'emploie le terme flexibilité au lieu d'élasticité; ceci pour permettre d'employer le terme élasticité pour l'inverse de $\check{u}$, à savoir :

$$\check{x} = \frac{1}{\check{u}} = \frac{dx}{du}\cdot\frac{u}{x},$$

qui est l'élasticité du besoin pour la marchandise considérée.

Prenant la dérivée élastique de (14) par rapport à P en utilisant les règles ci-dessus, nous aurons :

$$-\check{w}\cdot Q_P - Q_P = \check{u}\cdot g_P,$$

c'est-à-dire :

$$g_P = -Q_P\,\check{x}\,[1 - (-\check{w})] \tag{15}$$

de façon que :

$$A_P = \frac{a}{A}\,Q_P\check{x}[1 - (-\check{w})] \tag{16}$$

Les expressions (15) et (16) montrent que la proportion dans laquelle change la dépense A quand le prix change est très petite si la fraction $\frac{a}{A}$ est très petite. *Pourtant cela ne veut nullement dire que le dernier terme en* (12) *peut être négligé*. En effet, l'expression $\frac{P}{a}\frac{\partial A}{\partial P}$ n'est pas l'élasticité

A_P elle-même, mais le *rapport* entre A_P et la petite fraction $\frac{a}{A}$, en d'autres termes, elle est égale à :

$$(17)\qquad \frac{P}{a}\frac{\partial A}{\partial P} = \frac{A_P}{(a/A)} = -\,g_P = Q_P\check{x}\,[1-(-\check{w})].$$

L'hypothèse de la petite importance n'est donc d'aucune façon suffisante pour qu'on puisse négliger le dernier terme en (12). *Bien au contraire* : s'il y a une situation où l'on peut négliger ce terme, ce sera justement la situation où le bien considéré joue un rôle absolument prépondérant. En effet, si « les autres choses » jouent un très petit rôle, Q_P sera alors très petit. Pourtant ce cas n'a pas d'intérêt réel. C'est là tout simplement le cas où presque tout le revenu est toujours employé à la marchandise considérée. En d'autres termes, c'est le cas où l'on peut dire *a priori* que la courbe de demande est presque une hyperbole équilatère, c'est-à-dire une courbe de la forme :

$$x = \frac{\rho}{p}.$$

Le cas où la marchandise joue un très grand rôle est donc justement le cas où on n'a pas besoin de consulter les statistiques pour déterminer la nature de la demande.

La formule (17) montre bien de quoi la grandeur du terme considéré dépend : elle est d'autant plus petite que la marchandise considérée satisfait à un besoin peu élastique et que la valeur absolue de flexibilité de l'utilité marginale du revenu s'approche de l'unité. D'une façon plus précise : si $\check{\varphi}$ et $\check{f}$ désignent l'élasticité cournotéenne et parallèle respectivement, on a $\check{\varphi}(1-R) = \check{f}$, où l'erreur relative R est égale à :

$$R = Q_P[1-(-\check{w})].$$

Dans le cas où le bien considéré joue un rôle très petit, on a approximativement : $Q_P = 1$. Dans ce cas, l'erreur relative est donc approximativement égale à la différence entre l'unité et la valeur absolue de la flexibilité de l'utilité marginale de la monnaie.

Les développements ci-dessus montrent que non seulement la démonstration de M. Marschak de sa formule d'approximation est incorrecte — comme je l'ai remarqué dans ma communication à la troisième journée de la réunion — mais encore la formule elle-même est fausse.

Les résultats obtenus ici sont bien d'accord avec le fait que j'ai mentionné dans ma communication à la première journée de la réunion, et qui est démontré d'une façon rigoureuse dans mon petit livre : *New Method of Measuring Marginal Utility* [1], à savoir qu'une *seule* courbe de budget ne peut déterminer ni la courbe d'utilité du bien considéré, ni la courbe d'utilité du revenu (mais *deux* courbes de budget déterminent la courbe d'utilité marginale du revenu).

Les développements qui précèdent ont été formés en vue de dégager la signification de quelques points de la méthode de M. Marschak. Si l'analyse n'avait pas eu un tel but spécial, tout le problème aurait pu être traité d'une manière plus simple et beaucoup plus générale. Voici comment on pouvait l'attaquer :

On prend pour point de départ la fonction $x = g(\rho, p, P)$. C'est là une fonction de demande de trois variables. Les élasticités partielles par rapport à ces trois variables sont :

$$x_\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho}\cdot\frac{\rho}{x} \qquad x_p = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{p}{x} \qquad x_P = \frac{\partial x}{\partial P}\cdot\frac{P}{x}$$

Dérivant (2) par rapport à λ et faisant ensuite $\lambda = 1$, nous obtenons :

$$(18)\qquad x_\rho + x_p + x_P = 0,$$

ce qui montre qu'une quelconque des élasticités x_ρ, x_p et x_P peut être exprimée par les autres.

De plus, si l'on considère une courbe C dans l'espace (ρ, p, P), définie par les trois équations :

$$(19)\qquad \frac{d\rho}{\rho} = a_\rho\frac{dt}{t} \qquad \frac{dp}{p} = a_p\frac{dt}{t} \qquad \frac{dP}{P} = a_P\frac{dt}{t},$$

1. Dans la série *Beiträge zur Œkonomischen Theorie*, édité par MM. Lederer et Schumpter.

t étant un paramètre par lequel la courbe C est engendrée, et a_ρ, a_p et a_P étant trois fonctions du point (ρ, p, P), ***tout le long de la courbe*** C on aura alors en vertu de la règle VII sur la dérivation élastique :

$$x_t = a_\rho x_\rho + a_p x_p + a_P x_P \tag{20}$$

où :

$$x_t = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{t}{x}$$

est l'élasticité de x par rapport à t, l'élasticité étant prise suivant la courbe C.

En introduisant dans (20) l'expression de x_ρ tirée de (18), nous obtenons :

$$x_t = (a_p - a_\rho)\, x_p + (a_P - a_\rho)\, x_P \tag{21}$$

En choisissant les fonctions a_ρ, a_p et a_P dans (19) d'une façon convenable, on peut faire en sorte que (19) est satisfait pour une courbe C donnée quelconque. En vertu de (21), nous avons donc la proposition :

L'élasticité de x le long d'une courbe quelconque C *dans l'espace* (ρ, p, P) *peut être exprimée linéairement par les deux élasticités* x_p et x_P.

La courbe C n'est pas donnée d'une façon univoque par les équations (19). Ce que les équations (19) déterminent, c'est un *réseau* de courbes C. D'une façon plus précise : pour chaque point il passe une, et une seule courbe du réseau, pourvu que les fonctions a_ρ, a_p et a_P soient des fonctions univoques du point (ρ, p, P). Supposons que nous avons déterminé *deux* réseaux de telles courbes, à savoir le réseau C défini par (19) et un réseau C' défini par :

$$\frac{d\rho}{\rho} = b_\rho \frac{ds}{s} \qquad \frac{dp}{p} = b_p \frac{ds}{s} \qquad \frac{dP}{P} = b_P \frac{ds}{s},$$

s étant un paramètre par lequel une courbe du réseau C' est engendrée, et b_ρ, b_p et b_P étant des fonctions du point (ρ, p, P). Introduisons l'élasticité :

$$x_s = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{s}{x},$$

nous voyons que nous avons le système d'équation :

$$(22)\quad \begin{aligned} x_t &= (a_p - a_\rho)\, x_p + (a_P - a_\rho)\, x_P \\ x_s &= (b_p - b_\rho)\, x_p + (b_P - b_\rho)\, x_P \end{aligned}$$

Si le déterminant :

$$D = (a_p - a_\rho)(b_P - b_\rho) - (b_p - b_\rho)(a_P - a_\rho)$$

du système est différent de zéro, le système peut être résolu par rapport à x_t et x_s, ce qui donne :

$$(23)\quad \begin{aligned} D \cdot x_p &= (b_P - b_\rho)\, x_t - (a_P - a_\rho)\, x_s \\ D \cdot x_P &= -(b_p - b_\rho)\, x_t + (a_p - a_\rho)\, x_s . \end{aligned}$$

Cela veut dire que si nous faisons correspondre à chaque point (ρ, p, P) deux directions *différentes*, l'une définie par les nombres a_ρ, a_p, a_P, et l'autre par les nombres b_ρ, b_p, b_P, les élasticités de x dans ces deux directions, à savoir les quantités x_t et x_s, s'expriment alors linéairement par les élasticités partielles x_p et x_P. Et inversement x_p et x_P s'expriment linéairement par x_t et x_s.

Les formules (22) et (23) sont d'une grande généralité et doivent avoir des applications intéressant l'étude de la demande des biens dépendants. En particulier, elles doivent avoir une application au genre d'études dont M. Fanno nous a parlé à la seconde journée de réunion.

Le cas étudié par M. Marschak est le cas spécial où l'on ne considère qu'une seule courbe C, à savoir la courbe simple définie par :

$$a_\rho = 0 \qquad a_p = 1 \qquad a_P = 1.$$

Dans ce cas, la courbe C est la ligne L de la figure 1, et l'équation (21) prend la forme :

$$x_p = x_t - x_P, \tag{24}$$

x_p étant l'élasticité cournotéenne, x_t l'élasticité « parallèle », dans le sens de M. Marschak, et x_P l'élasticité g_P déterminée par (15).

La formule (24), que l'on a ici obtenue d'une façon presque intuitive à partir de la formule générale (21), n'est que la formule (12). En effet, dans la formule (12), il ne reste, opérations faites, que les lettres p et P munies de l'indice 0. Et puisque les quantités p_0 et P_0 sont aussi des quantités quelconques, dans le sens que l'on peut considérer des courbes de budget appartenant à des situations de prix quelconques, on peut laisser tomber l'indice 0. Si on le fait, on tombe sur la formule (24). Le terme $-x_P$ dans (24) est donc le résidu dont la présence rend la formule de M. Marschak incorrecte.

Les formules (23) montrent que si, dans un point donné (ρ, p, P), on connaît les élasticités x_t et x_s prises *dans deux directions différentes quelconques*, les élasticités partielles x_p et x_P sont alors déterminées. De plus, la première des formules (23) montre que si nous connaissons l'élasticité x_t dans une direction telle que $a_P = a_\rho$, c'est-à-dire dans une direction *dans laquelle le revenu total augmente dans la même proportion que le prix* P *des « autres choses », p variant dans une proportion quelconque différant de la proportion dans laquelle* P varie, nous pouvons aussi déterminer l'élasticité cournotéenne. Dans ce cas, nous tirerons, en effet, de la première formule (23) :

$$x_p = \frac{x_t}{a_p - a_\rho} \tag{25}$$

Pour résumer, nous pouvons donc dire : A partir d'une seule courbe de budget, il est impossible de déterminer l'élasticité cournotéenne x_p. Mais il existe des directions dans l'espace (ρ, p, P) telles que la connaissance de l'élasticité dans une de ces directions est suffisante pour déterminer x_p. Et la connaissance des élasticités dans deux directions différentes quelconques est toujours suffisante pour la détermination de x_p.

Ragnar Frisch.

16.945. — Bordeaux, Imprimerie Cadoret, 3, place Saint-Christoly. — 1932.

REVUE D'ECONOMIE POLITIQUE

Fondateurs : Charles GIDE, Alfred JOURDAN †, Edmond VILLEY †

SOMMAIRE DU N° 1

16.945. — Bordeaux, Imprimerie Cadoret, 3, place Saint-Christoly, 3. — 1932.