

RAGNAR FRISCH

Professore ordinario di Economia all'Università di Oslo

**NUOVI METODI DI MISURA
DELL'UTILITÀ MARGINALE**

Con 20 grafici.

Dal vol. IV: *Economia pura della Nuova Collana di Economisti*
diretta da GIUSEPPE BOTTAI e CELESTINO ARENA
(Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1937-xv).

RAGNAR FRISCH

Professore ordinario di Economia all'Università di Oslo

NUOVI METODI DI MISURA
DELL'UTILITÀ MARGINALE

Con 20 grafici.

INDICE

I. Introduzione	<i>Pag.</i> 387
II. Utilità della moneta e utilità delle merci	» 393
III. La superficie di consumo	» 400
IV. Il metodo degli isoquanti	» 411
V. Il metodo di variazione della quantità	» 416
VI. Il metodo di traslazione	» 424
VII. Applicazione del metodo di traslazione ai dati dei bilanci familiari degli Stati Uniti	» 439
VIII. L'equazione generale della flessibilità	» 445
IX. L'utilità della moneta e il problema dei numeri indici	» 450
X. L'utilità della moneta e la curva dell'offerta di lavoro	» 459
XI. L'utilità della moneta e l'imposta sul reddito	» 486
XII. Altri problemi	» 507

I. — INTRODUZIONE

L'utilità marginale è essa una quantità misurabile, oppur no? Delle molte discussioni metafisiche che si sono svolte su questo argomento una o due generazioni fa, ci giunge ancor oggi qualche tarda eco, la quale mostra quanto tempo sia occorso perchè in questa parte della teoria economica penetrasse quell'efficace e rigoroso metodo logico, che già da lungo tempo domina nel campo delle scienze naturali ed è uno dei fattori principali del reale progresso di qualsiasi dottrina.

Il DUPUIT e gli economisti della Scuola austriaca ponevano a base di molta parte delle loro considerazioni una concezione più o meno quantitativa dell'utilità. Ma il JEVONS è probabilmente il primo che abbia discusso con una certa ampiezza la questione della misura statistica di essa. La sua analisi è, sotto molteplici aspetti, del più grande interesse, sebbene nella discussione delle basi logiche della definizione quantitativa di utilità egli non vada molto a fondo, e non si sia mai spinto alla elaborazione di un metodo per la misura effettiva dell'utilità stessa.

Il vero pioniere in questo campo è stato IRVING FISHER. La sua dissertazione di laurea, pubblicata nel 1892, costituisce un energico tentativo di introdurre uno spirito nuovo nelle discussioni sul valore. Egli dice: « La verità è che molti, senza eccettuare alcuni economisti veri, si accontentano di nozioni molto vaghe. Quanti studenti di letteratura e di storia conservano dai loro studi di meccanica una nozione soddisfacente del concetto di forza? L'esperienza muscolare ne fornisce un'idea concreta e pratica, ma non mette affatto in evidenza complicate dipendenze di spazio, tempo e massa. Il che può essere fatto soltanto dalla paziente analisi matematica. Questa naturale avversione alla ricerca faticosa e complicata esiste anche in economia, e soprattutto nella teoria del valore. I fondamenti stessi della questione esigono nuova analisi e nuova definizione ».

La parte più importante della dissertazione del FISHER è costituita, a mio avviso, dal tentativo di dare dell'utilità una definizione rigorosa e quantitativa. Sebbene questo autore non si serva dell'espressione « teoria della scelta » (*theory of choice*), egli è il vero fondatore di essa; le idee essenziali della teoria, almeno nella formulazione statica, sono in realtà contenute tutte nella dissertazione del FISHER. Così, ad esempio, egli discute specificamente il grado di indeterminazione inerente alla funzione di utilità totale.

Più tardi il PARETO sviluppò con maggiore ampiezza queste idee e, senza dubbio, mutò alquanto la forma della presentazione di esse; soprattutto egli fece grandi sforzi per mettere in rilievo la differenza fondamentale che sosteneva esistere fra la trattazione del problema in base al concetto della utilità marginale e la trattazione che egli stesso ne aveva data; ma chi voglia vedere l'organica connessione fra le idee delle varie epoche, considererà la trattazione del PARETO come un saggio di elaborazione più precisa della teoria dell'utilità marginale piuttosto che come un tentativo di costruzione di una nuova teoria, in opposizione a quella dell'utilità. Il PARETO dette il nome di *ofelimità* a ciò che il FISHER aveva chiamato *utilità*.

Oltre che le speculazioni astratte sulla definizione di utilità esposte nella sua dissertazione, il FISHER elaborò in questa anche un metodo per giungere alla misura effettiva dell'utilità, con l'impiego di dati statistici. Suo scopo non era soltanto di dare una dimostrazione logica della possibilità di misurare l'utilità, ma anche di dare di tale possibilità la dimostrazione pratica e decisiva che poteva venire da un esempio di misura effettiva. Disgraziatamente la descrizione del metodo fu pubblicata solo molto più tardi. Essa comparve per la prima volta per le stampe nel saggio *A statistical Method for Measuring 'Marginal Utility' and Testing the Justice of Progressive Income Tax* (1). Molto tempo prima, tuttavia, il FISHER aveva esposto il metodo nei suoi corsi all'Università di Yale; ed una esposizione in veste poligrafata era stata anche privatamente distribuita. Il FISHER stesso spiega in una nota che accompagna la ristampa della pubblicazione sopra citata, la ragione per cui non aveva consentita la stampa del suo lavoro ad una data anteriore: egli desiderava di essere in grado di dare, insieme con la descrizione del metodo, risultati plausibili di misure effettivamente compiute; ed i risultati che aveva ottenuti fino allora non erano soddisfacenti.

Io incominciai ad occuparmi del problema della misura dell'utilità nel 1923, durante un soggiorno a Parigi; ed avevo di mira tre scopi:

1° mettere in evidenza gli assiomi della scelta che sono impliciti nella considerazione dell'utilità come quantità, e definire l'utilità in modo rigoroso partendo da un certo gruppo di tali assiomi;

2° elaborare un metodo per la misura statistica dell'utilità;

3° applicare il metodo a dati sperimentali.

I risultati del mio studio, condotto su questo programma, sono esposti nella memoria *Sur un Problème d'Economie Pure*, pubblicata nella *Series Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, serie I, n. 16, 1926. In questa memoria è sviluppata tutta la parte assiomatica della teoria, per quel che riguarda il concetto di utilità inteso in senso statico. Il metodo di misura elaborato è il *metodo degli isoquantì*, che è pure esposto nel Capi-

(1) In *Economic Essays Contributed in Honour of John Bates Clark*, 1927.

tolo IV del presente lavoro. I dati statistici ai quali esso fu applicato furono quelli delle vendite e dei prezzi raccolti dalla *Union des Coopérateurs Parisiens*. In base a questi dati io costruii quella che ritengo possa essere considerata come la curva dell'utilità marginale della moneta per un componente « medio » del gruppo di persone costituenti i clienti della *Union*. Per quel che ne so, questa fu la prima curva di utilità marginale della moneta che sia stata pubblicata.

Una caratteristica essenziale dei risultati ottenuti fu che la *flessibilità* della curva risultò *negativa* (in conformità dell'ipotesi della decrescenza dell'utilità marginale). La flessibilità si dimostrò poi *decreciente in valore assoluto* al crescere del reddito. In via di approssimazione, la flessibilità della curva di utilità marginale della moneta può essere definita come rapporto tra una piccola variazione percentuale dell'utilità marginale e la corrispondente variazione percentuale del reddito. Per una definizione completa, vedi appresso, la formula (2, 14).

Di più, per le classi di reddito comprese nel materiale a mia disposizione, il valore assoluto della flessibilità risultò *maggiore dell'unità*. In una memoria (in norvegese) pubblicata in *Stats økonomik Tidsskrift*, Oslo, 1926, avanzai l'ipotesi che la situazione riguardo alla flessibilità della moneta potesse risultare diversa negli Stati Uniti e che la flessibilità fosse qui in valore assoluto minore dell'unità per le classi di reddito nelle quali rientrano gli operai ordinari.

A questo lavoro sulla misura dell'utilità ero stato fortemente spinto dallo studio della dissertazione di laurea del FISHER; ma non conoscevo il suo metodo di misura che, come ho detto sopra, fu pubblicato dopo il mio articolo. Il fatto è che il metodo del FISHER ed il mio metodo degli isoquanti hanno caratteri piuttosto diversi. Il FISHER considera l'utilità della moneta (cioè l'utilità marginale della moneta) come dipendente dalla situazione dei prezzi nel suo complesso. Ciò significa che la sua curva di utilità della moneta deve essere considerata valida soltanto per una determinata situazione di prezzi. In altri termini, se ρ indica il reddito nominale misurato in dollari per unità di tempo (il quale coincide con la somma spesa, quando non ha luogo risparmio) e p_1, p_2, \dots, p_n sono i prezzi delle varie merci, il FISHER concepisce l'utilità della moneta ω come funzione:

$$(1, 1) \quad \omega = \omega(\rho, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

delle variabili $\rho, p_1, p_2, \dots, p_n$. Questa funzione può essere rappresentata mediante una curva piana nelle coordinate (ω, ρ) , se i singoli prezzi p_1, p_2, \dots, p_n sono costanti.

Io partii da una ipotesi diversa: che cioè, in prima approssimazione, si possa tener conto sufficiente delle variazioni dei prezzi introducendo, oltre il reddito, una sola variabile: il prezzo della vita P . In altri termini, io studiai l'utilità della moneta ω come funzione

$$(1, 2) \quad \omega = \omega(\rho, P)$$

delle due variabili ρ e P . L'idea di considerare l'utilità marginale della moneta come funzione di queste due variabili mi fu suggerita dallo studio della nozione di « merce generale » che il Prof. L. V. BIRCK ha sviluppata nel suo libro *Laeren om Graensevaerdiën* (1).

Uso di proposito per P l'espressione « prezzo della vita » anzichè « costo della vita ». Quest'ultimo è un termine ambiguo. Esso è usato a volte nel vero senso di *prezzo* del vivere, a volte nel senso di *spesa* per vivere. L'idea di spesa dipende nello stesso tempo dal prezzo del vivere e dall'essere il consumo mantenuto ad un livello alto o basso. In qualunque tentativo di misura dell'utilità marginale, è invece essenziale che queste due nozioni siano tenute completamente distinte.

Se si adotta l'ipotesi (1, 2), ne segue, come ora mostreremo, che deve aversi:

$$(1, 3) \quad \omega(\rho, P) = \frac{1}{P} w\left(\frac{\rho}{P}\right)$$

Nel caso che $w(\rho) = \omega(\rho, 1)$ sia funzione di una sola variabile, questa relazione esprime come l'utilità della moneta vari al variare del reddito quando il prezzo della vita è eguale ad 1. In altre parole, invece di studiare la funzione di due variabili $\omega(\rho, P)$, possiamo studiare la funzione di una sola variabile $w(\rho)$. Questo è uno dei fatti fondamentali sui quali è basato il metodo degli isoquanti per la misura dell'utilità.

È ovvio che l'ipotesi (1, 2), sulla quale si fonda il metodo degli isoquanti, non è altrettanto generale che l'ipotesi (1, 1) del FISHER; ma la (1, 2) sembra essere abbastanza plausibile come prima approssimazione ed ha il grande vantaggio di offrire nuove possibilità per la misura effettiva. L'adozione di essa porta che osservazioni relative a *situazioni di prezzi diverse* possano essere utilizzate per determinare punti sulla *medesima curva di utilità*. Le fluttuazioni del prezzo della vita sono, per così dire, trasformate in fluttuazioni del reddito reale. Quindi, oscillazioni violente e frequenti dei prezzi non annullano la possibilità di valersi del materiale relativo per misure di utilità. Simili fluttuazioni debbono anzi essere considerate come un elemento favorevole, poichè tendono a produrre la necessaria ampiezza nella distribuzione del reddito reale offerta dal materiale di cui si dispone. Per l'applicazione del metodo del FISHER occorre avere una serie di dati relativi alla medesima situazione di prezzi, e naturalmente ciò limita in modo considerevole la possibilità di ottenere effettivamente materiale sufficiente.

Vi è anche fra i due metodi, un'altra differenza importante. Il metodo degli isoquanti presuppone soltanto una merce di paragone (ad esempio, il vitto), mentre il metodo del FISHER implica che si abbiano dati per due merci

(1) Edizione inglese *The Theory of Marginal Value*, Londra, 1922.

(ad esempio, il vitto ed il vestiario). Questo è, dal punto di vista dell'applicazione, un altro vantaggio del metodo degli isoquanti, poichè in pratica è spesso difficile ottenere dati comparabili per diverse merci.

D'altra parte però, se fosse possibile ottenere i dati necessari, il metodo del FISHER sarebbe il più generale; e qualora, valendosi di esso, fosse possibile effettuare misure che avessero un significato, si sarebbe in grado di verificare se le particolari ipotesi poste a base del metodo degli isoquanti siano valide oppure no.

Al principio del 1930, per iniziativa del FISHER, fui invitato all'Università di Yale in qualità di *Visiting Professor*, e naturalmente si iniziò tra noi una collaborazione nell'intento di far progredire lo studio della misura dell'utilità. Il nostro primo tentativo fu quello di applicare il metodo del FISHER e il metodo degli isoquanti a materiale americano. Ma non riuscimmo, e per una ragione imprevedibile e strana. La difficoltà si presentò dove meno l'attendevamo: cioè nella mancanza di materiale statistico adatto e sufficiente relativo ai prezzi. Lo *United States Budget Study* del 1918-19, forniva del materiale eccellente relativo alle spese per vitto ed anche ad altri gruppi di spese; ma non fummo in grado di procurarci dati attendibili che ci permettessero di fare i confronti *geografici* dei prezzi, necessari per il nostro studio. Esisteva naturalmente una gran quantità di serie storiche di prezzi per ciascuna delle diverse località, ma mancava la possibilità di stabilire quei confronti dei prezzi in diverse località, in un determinato momento, di cui avevamo bisogno. Così il nostro lavoro andò più o meno languendo, tanto che pensavamo di limitarci a stendere delle considerazioni generali sul problema e sulla impostazione di esso.

Tuttavia non potevo distogliere la mia mente dalla questione, e mentre mi arrovellavo ancora su di essa, una nuova idea prese gradualmente forma. Sarebbe stato possibile dedurre dai dati dei bilanci familiari gli indici dei prezzi che ci mancavano? A prima vista, l'idea sembra assurda perchè il materiale dei bilanci familiari contiene soltanto *dati sulle spese* e non fornisce informazione alcuna riguardo ai prezzi. Ad un esame più approfondito tuttavia, l'idea si dimostrò buona, sia in teoria che in pratica.

Il metodo che ne derivò è il metodo di traslazione, esposto nel Capitolo VI del presente lavoro; l'applicazione effettiva di esso a dati sperimentali per gli Stati Uniti è descritta nel Capitolo VII. Questo lavoro mi è stato possibile per gli incoraggiamenti e la generosità del Prof. FISHER che ha liberalmente posto a mia disposizione il personale necessario all'esecuzione dei calcoli, dei grafici, ecc., e ne ha seguiti i progressi col più vivo interesse. Per tutto ciò gli esprimo qui la mia viva riconoscenza.

Allo scopo di dare un quadro, il più possibile chiaro, della natura del metodo di traslazione e dei procedimenti di cui esso si serve, mi è sembrato opportuno incominciare, non con una discussione delle formule più generali, ma con una breve illustrazione della superficie di consumo e dell'uso che di essa è fatto nel mio primo modo di trattazione del problema (metodo degli

isoquanti); di procedere poi per gradi fino al metodo di traslazione, per giungere infine alla equazione generale della flessibilità. Quest'ultima equazione, discussa nel Capitolo VIII del presente lavoro, è uno strumento di natura ancora più generale che il metodo di traslazione.

Il punto di vista che informa il presente studio è essenzialmente statico. Il problema dinamico dell'utilità è stato da me affrontato per la prima volta nella memoria *Statikk og Dynamikk i den økonomiske Teori* (1). Una ulteriore elaborazione in questo senso, con particolare riferimento al problema di dare una definizione quantitativa rigorosa dell'utilità, applicabile non solo in una trattazione statica, ma anche in una trattazione dinamica, sarà pubblicata fra breve negli « Atti dell'Accademia Norvegese delle Scienze ».

Nei Capitoli IX-XII della presente monografia sono studiate talune questioni per le quali la nozione di flessibilità della moneta e la determinazione numerica di essa hanno speciale importanza.

(1) *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, København, pagg. 321-379.

II. — UTILITÀ DELLA MONETA E UTILITÀ DELLE MERCI

Consideriamo una certa merce, ben definita, fisicamente misurabile, come, ad esempio, lo zucchero. Consideriamo inoltre un individuo che consumi una quantità x di questa merce per unità di tempo. Per ragioni che appariranno ovvie fra un momento, possiamo assumere la merce stessa come *merce di paragone*. Per brevità, invece di servirci della espressione generale « merce di paragone », parleremo spesso nel seguito di « zucchero », indicheremo con x il consumo di zucchero dell'individuo considerato, ci riferiremo ad una unità fisica della merce di paragone — una « libbra » ad esempio — ecc. Useremo a volte il termine « vitto » invece del termine zucchero. Tuttavia il ragionamento ha una perfetta generalità e si applica a qualsiasi merce di paragone.

Non entrerò qui in lunghe discussioni sulla possibilità di dare una definizione rigorosa e quantitativa della nozione di utilità marginale della merce di paragone. A tale riguardo, rimando il lettore alla *Mathematical Investigation* del Prof. FISHER, alla mia memoria *Sur un Problème d'Economie Pure*, al mio saggio di prossima pubblicazione negli « Atti dell'Accademia Norvegese », al quale ho già accennato, e mi limito a richiamare l'attenzione sul fatto che l'utilità marginale della merce di paragone può essere definita in due modi: 1° come *utilità misurata per libbra*, oppure: 2° come *utilità misurata per valore in dollari* della merce. Considereremo dapprima l'utilità marginale misurata per libbra.

L'utilità marginale misurata per libbra, che indicheremo con u , dipende dalla grandezza del consumo annuo x . Verosimilmente essa può anche dipendere da altri fattori, ma qui non ci occuperemo di tali casi. In altre parole, ammettiamo che u sia funzione della sola x e scriviamo:

$$(2, 1) \quad u = u(x).$$

Questa ipotesi implica fra l'altro, che la merce di paragone sia indipendente da altri beni.

Va rilevato che nella (2, 1) u è usato con due diversi significati. Nel primo membro dell'equazione esso sta ad indicare una *grandezza*, mentre nel secondo membro diventa *segno di funzione*. Avremmo potuto usare a tale scopo una lettera diversa, per esempio f , cioè la (2, 1) avrebbe potuto essere scritta nella forma $u = f(x)$. Ma, a causa della grande quantità di simboli che si rendono necessari quando la teoria dell'utilità marginale viene studiata nel quadro della teoria generale dell'equilibrio, sembra opportuno limitare il più possibile l'impiego di lettere differenti. Di più, nell'usare la medesima lettera per indicare una certa grandezza e la funzione che esprime in qual modo essa dipenda da una o più altre, vi è un grande vantaggio mnemotecnico. Potremmo anche evidentemente usare lettere minuscole per le

grandezze e le corrispondenti maiuscole pei segni di funzione; cioè potremmo scrivere la (2, 1) sotto la forma $u = U(x)$, ma ciò non appare consigliabile in vista della opportunità di usare lettere maiuscole per designare certe grandezze che derivano dalla integrazione di altre, indicate con le corrispondenti lettere minuscole. Questo simbolismo è particolarmente utile nella teoria dinamica; ed è perciò che abbiamo ritenuto opportuno preferire la notazione della (2, 1).

Sia p il prezzo dello zucchero (o di qualsiasi altra merce di paragone), e sia $\xi = xp$ la spesa per questa merce in dollari, per unità di tempo. Introducendo le nozioni di prezzo e spesa possiamo giungere al secondo modo di definizione della utilità marginale connessa con lo zucchero, cioè l'*utilità marginale μ misurata per dollaro di valore di zucchero*. Secondo la terminologia del PARETO, μ è l'«ofelimità ponderata». La distinzione fra u e μ non è una distinzione fra l'utilità di una quantità *comprata* e l'utilità di una quantità *effettivamente consumata*. In tutto il corso della presente analisi ammetteremo che la quantità di zucchero acquistata dall'individuo per unità di tempo sia eguale al suo consumo di zucchero per unità di tempo, sicchè non vi sia *stock* accumulato del quale si debba tener conto. La sola differenza tra u e μ è che μ è misurato in termini di una unità p volte minore della unità in base alla quale è misurato u . Abbiamo quindi semplicemente:

$$(2, 2) \qquad u = \mu p.$$

La (2, 2) non esprime che l'utilità di una spesa di p dollari si determina moltiplicando μ per p ; u è cioè, non l'utilità totale di p dollari, ma l'utilità marginale misurata *in termini* della quantità che può essere acquistata con p dollari. Il concetto può forse essere chiarito con un esempio. Se è vero che ad un certo istante un treno si muove con una velocità di 20 metri al secondo, è egualmente vero che, in quel momento, esso si muove con una velocità di 72.000 metri all'ora. Ma può darsi perfettamente che un'ora sia un intervallo di tempo così lungo che non sarebbe corretto ammettere — neppure in via approssimata — che il treno copra in un'ora una distanza di 72.000 metri. Questa è tuttavia una questione diversa, la quale non ha nulla a che vedere col fatto che, ad un dato momento, la velocità del treno possa essere espressa altrettanto bene *per ora* che *per secondo*: la velocità oraria è semplicemente eguale a 3600 volte la velocità misurata per secondo. Può sembrare che questa sia una osservazione banale; ed invece è indispensabile porre la differenza in modo chiaro, perchè la mancanza di chiarezza su questo punto ha dato a volte origine ad errate obiezioni contro quelle considerazioni sull'utilità marginale che hanno la loro espressione sintetica in formule del tipo (2, 2). La condizione dell'equilibrio statico nello scambio di due (o più) merci si esprimerà sempre eguagliando l'utilità marginale della prima merce al prodotto dell'utilità marginale della seconda per la

ragione di cambio fra le due merci. La validità di una simile condizione è indipendente dal fatto che una delle unità per le quali l'utilità marginale è espressa possa essere oppur no considerata come un incremento infinitesimale. La condizione perchè l'analisi dell'incremento marginale sia applicabile è, non che l'unità per la quale l'utilità marginale è espressa possa essere considerata come « piccola » in un problema particolare, ma che sussista effettivamente la possibilità di eseguire « piccoli » spostamenti nel campo considerato.

Nè nel caso di u nè nel caso di μ si parla di utilità per unità di tempo. In entrambi i casi l'utilità marginale è considerata come una utilità per unità assoluta: u non esprime l'utilità per libbra per unità di tempo, ma semplicemente l'utilità per libbra, e μ esprime non l'utilità per dollaro di valore per unità di tempo, ma semplicemente l'utilità per dollaro di valore. Come abbiamo visto, u dipende da una grandezza misurata in libbre per unità di tempo, e vedremo ora che μ dipende da una grandezza che è misurata in dollari di valore per unità di tempo; ma questa è una questione del tutto diversa.

L'utilità marginale dello zucchero misurata per dollaro di valore, μ , dipende evidentemente da due variabili, cioè ξ e p . Possiamo scrivere:

$$(2, 3) \quad \mu = \mu(\xi, p).$$

Consideriamo in particolare la funzione μ che si ottiene ponendo il prezzo p eguale all'unità, ossia la funzione di una sola variabile $\mu(\xi, 1)$. Ma questa funzione che indica come l'utilità dello zucchero misurata per dollaro di valore varii al variare della spesa per zucchero, quando il prezzo sia eguale all'unità, coincide evidentemente con la funzione che dà le variazioni della utilità dello zucchero per unità di peso al variare del consumo di zucchero. Abbiamo cioè:

$$(2, 4) \quad u(\xi) = \mu(\xi, 1)$$

che possiamo scrivere anche sotto la forma:

$$(2, 5) \quad u(x) = \mu(x, 1).$$

Dal punto di vista algebrico, non vi è fra queste due formule differenza alcuna, poichè esse definiscono soltanto un rapporto fra due funzioni; il significato della formula non dipende quindi affatto dalla lettera usata per indicare la variabile in questione, sia essa ξ o x , o qualsiasi altra. Una lieve differenza tra le due formule sorge soltanto quando ad x e ξ assegnamo rispettivamente il significato di *quantità in peso* (per anno) e di *valore in dollari* (per anno). Ma anche in questo caso possiamo riconoscere che la (2, 4) e la (2, 5) esprimono sostanzialmente la medesima cosa: quando il prezzo è eguale all'unità, la spesa ξ è ovviamente eguale alla quantità consumata x .

Anche se il prezzo p non è eguale all'unità, le funzioni μ ed u sono tuttavia legate dalla relazione seguente:

$$(2, 6) \quad \mu(\xi, p) = \frac{1}{p} u\left(\frac{\xi}{p}\right).$$

Questa formula è una conseguenza della (2, 2). È evidente infatti che, stabilendo un confronto tra μ ed u , supponiamo che la spesa ξ dalla quale dipende μ , sia esattamente la spesa corrispondente al consumo fisico x , dal quale dipende u . Abbiamo cioè $x = \frac{\xi}{p}$. In conseguenza, se $\mu(\xi, p)$ è una funzione che esprime in qual modo l'utilità marginale dello zucchero misurata per dollaro di valore dipenda dalla spesa per zucchero e dal prezzo dello zucchero, e se $u(x)$ è la funzione che esprime in qual modo l'utilità marginale dello zucchero misurata per libbra, dipenda dalla quantità di zucchero consumata, dobbiamo avere, in conseguenza della (2, 2) la relazione espressa dalla (2, 6).

Alla (2, 6) può essere data anche un'altra interpretazione. Incominciamo col considerare l'utilità marginale della spesa per zucchero, cioè l'utilità marginale dello zucchero misurata per dollaro di valore, come una funzione $\mu(\xi, p)$ delle due variabili ξ e p . È facile riconoscere che questa funzione deve essere di una specie particolare; deve soddisfare alla seguente equazione di proporzionalità:

$$(2, 7) \quad \lambda \mu(\lambda \xi, \lambda p) = \mu(\xi, p).$$

dove λ è un fattore arbitrario, positivo. La (2, 7) esprime semplicemente il fatto che, se il prezzo dello zucchero è raddoppiato (triplicato, ecc.), e lo stesso accade contemporaneamente della spesa per zucchero, di modo che il consumo misurato in libbre rimanga costante, l'utilità marginale dello zucchero misurata per dollaro di valore, deve ridursi a metà (ad un terzo, ecc.). Ma la (2, 7) costituisce soltanto una diversa forma di espressione della (2, 6). È facile dimostrare che le due relazioni possono essere dedotte reciprocamente l'una dall'altra. Infatti, se la (2, 6) è soddisfatta, abbiamo:

$$\lambda \mu(\lambda \xi, \lambda p) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda p} u\left(\frac{\lambda \xi}{\lambda p}\right) = \frac{1}{p} u\left(\frac{\xi}{p}\right) = \mu(\xi, p).$$

Ed inversamente, se è soddisfatta la (2, 7), basta porre $\lambda = \frac{1}{p}$, tenendo conto della (2, 5), per ottenere la (2, 6).

Vedremo ora come l'utilità marginale della *moneta* possa essere oggetto di una analisi dello stesso genere. Il reddito nominale ρ è analogo alla spesa annua per zucchero ξ , ed il reddito $r = \frac{\rho}{P}$ (P essendo il prezzo della vita)

è analogo al consumo fisico annuo dello zucchero x . La sola differenza è che ρ ed r si riferiscono alla merce generale che chiamiamo reddito, mentre ξ ed x si riferiscono ad una merce particolare.

Allo stesso modo che ammettiamo due diverse nozioni di utilità marginale per la merce speciale zucchero, cioè l'utilità marginale misurata per dollaro di valore e l'utilità marginale misurata per libbra di peso, ammetteremo ora due definizioni per l'utilità marginale della moneta, cioè l'utilità marginale della moneta misurata per dollaro e l'utilità marginale della moneta misurata per unità di potere di acquisto effettivo. In analogia con le notazioni μ ed u , usate per la merce speciale, designeremo la prima con ω la seconda con w ; ω e w saranno dette rispettivamente utilità *nominale* e utilità *reale* (*deflated*) della moneta. Comprendremo entrambi questi concetti nella designazione generica di utilità della moneta.

Nè ω nè w importano la specificazione « pro unità di tempo ». Esse non sono definite come utilità per unità di *reddito* (nominale o reale), ma come utilità per unità di *somma assoluta di denaro* (nominale o reale). È questa la ragione per cui abbiamo adottata per questi concetti la denominazione di utilità della moneta piuttosto che quella di utilità del reddito. Vedremo ora che ω e w *dipendono* dal reddito (misurato per unità di tempo); ma — come prima, a proposito delle merci — questa è una questione diversa. Possiamo verosimilmente ammettere che ω e w dipendano anche dal residuo in contanti che l'individuo possiede, o meglio, dalla quantità di fondi in capitale da lui posseduti. La presenza di tali fondi è un elemento di sicurezza per il futuro, e quindi può influire sul valore presente dell'utilità della moneta. Questa questione ha una connessione evidente con quella del risparmio. Tuttavia nel presente studio prescindiamo dalla discussione di tale argomento.

Poichè la sola differenza tra w ed ω è che w è misurata in termini di una unità P volte maggiore della unità in base alla quale è misurata ω , dobbiamo avere:

$$(2, 8) \quad w = \omega P,$$

formula analoga alla (2, 2). Quindi anche in relazione alla (2, 8) sarà opportuno stare in guardia contro il genere di malinteso indicato a proposito della (2, 2).

In una analisi della utilità della moneta in cui non si studi l'effetto delle variazioni dei prezzi, ma si ammetta che questi siano costanti, la distinzione tra utilità nominale e reale della moneta è inessenziale: il solo concetto di cui abbiamo bisogno in questo caso è quello di utilità della moneta. La distinzione tra utilità nominale e reale della moneta diviene essenziale quando si operino delle variazioni nel sistema dei prezzi.

Allo stesso modo che abbiamo considerato l'utilità marginale dello zucchero misurata per dollaro di valore, come funzione di ξ e di p , possiamo

considerare l'utilità della moneta ω , cioè l'utilità marginale della moneta misurata per dollaro, come funzione di ρ e di P :

$$(2, 9) \quad \omega = \omega(\rho, P).$$

Ammettendo l'ipotesi che l'utilità nominale della moneta ω , sia funzione di ρ e di P , è facile dimostrare che l'utilità reale della moneta w , cioè l'utilità della moneta misurata per unità di effettivo potere di acquisto, deve essere funzione del reddito effettivo $r = \frac{\rho}{P}$. E la $w(r)$ non è altro che la particolare funzione di una sola variabile che si ottiene dalla $\omega(\rho, P)$ ponendo $P = 1$; si ha cioè:

$$(2, 10) \quad w(\rho) = \omega(\rho, 1)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$(2, 11) \quad w(r) = \omega(r, 1).$$

In fatto, la relazione $w = \omega P$ è sempre valida, e w può quindi essere considerata come il valore che ω assume quando $P = 1$. Ma discende dalla (2, 9) che questo valore è funzione di una sola variabile ρ , che si eguaglia ad r quando $P = 1$; w è dunque una funzione $w(r)$ della variabile r , che può essere espressa in termini della funzione $\omega(\rho, P)$, in conseguenza della equazione (2, 10) o della equivalente (2, 11). Dalle (2, 8) e (2, 11) segue che è:

$$(2, 12) \quad \omega(\rho, P) = \frac{1}{P} w\left(\frac{\rho}{P}\right).$$

Come abbiamo detto nella introduzione, questa è una delle equazioni fondamentali sulle quali si basano i metodi di misura dell'utilità marginale esposti nel presente studio. L'analogia tra la (2, 12) e la (2, 6) è evidente.

Grazie alla (2, 12) è facile riconoscere che sussiste l'equazione di *proporzionalità*:

$$(2, 13) \quad \lambda\omega(\lambda\rho, \lambda P) = \omega(r, P).$$

E viceversa, se l'equazione di proporzionalità (2, 13) è soddisfatta, deve valere anche la (2, 12). L'equazione di proporzionalità (2, 13) è analoga alla (2, 7); essa può anche essere messa in rapporto con l'ipotesi che è alla base della teoria statica dell'equilibrio dei prezzi; ma non entro qui nella discussione di questo argomento (1).

(1) Questa questione è un po' più ampiamente sviluppata nella mia memoria *Der Einfluss der Veränderungen der Preisniveaus auf den Grenznutzen des Geldes*, in « Zeitschrift f. Nationalökonomie », Wien, 1931.

Diamo il nome di *flessibilità dell'utilità marginale della moneta*, o più brevemente, di *flessibilità della moneta*, alla misura relativa delle variazioni di $w(r)$ corrispondenti a piccoli incrementi di r . La indichiamo con \check{w} , cioè poniamo:

$$(2, 14) \quad \check{w} = \check{w}(r) = \frac{dw(r)}{dr} \cdot \frac{r}{w(r)} = \frac{d \log w(r)}{d \log r}.$$

Dalla (2, 12) ricaviamo che la flessibilità della moneta può anche essere considerata come saggio *parziale* di variazione dell'utilità nominale della moneta, in rapporto ad una variazione del reddito nominale, il prezzo della vita essendo tenuto costante. Abbiamo cioè:

$$(2, 15) \quad \check{w} = \frac{\partial \omega(\rho, P)}{\partial \rho} \cdot \frac{\rho}{\omega(\rho, P)}.$$

In alcuni casi è interessante anche considerare il saggio parziale di variazione dell'utilità nominale della moneta in rapporto ad una variazione del prezzo della vita, quando il reddito nominale sia mantenuto costante. Denoteremo questa quantità con $\check{\omega}$, porremo cioè:

$$(2, 16) \quad \check{\omega} = \frac{\partial \omega(\rho, P)}{\partial P} \cdot \frac{P}{\omega(\rho, P)}.$$

Differenziando l'equazione di proporzionalità (2, 13) rispetto a λ ed eguagliando poi all'unità, si vede che è per tutti i valori di ρ e di P :

$$(2, 17) \quad \check{w} + \check{\omega} = -1.$$

III. — LA SUPERFICIE DI CONSUMO

Secondo la teoria dell'equilibrio statico, le diverse variabili che abbiamo considerate nel capitolo precedente, u , w , ecc. non sono indipendenti. Esiste fra esse una certa relazione, e precisamente questa: nel punto di equilibrio il nostro individuo avrà distribuita la sua spesa fra le diverse voci del suo bilancio in modo che, per la merce particolare di cui ci occupiamo, ad esempio, il vitto, il prodotto dell'utilità nominale della moneta per il prezzo della merce risulti eguale all'utilità marginale della merce di paragone, misurata per unità fisica. Deve essere cioè:

$$(3, 1) \quad \omega(\rho, P) \cdot p = u(x).$$

Se nella (3, 1) introduciamo l'espressione di $\omega(\rho, P)$ data dalla (2, 12), essa assume la forma:

$$(3, 2) \quad w\left(\frac{\rho}{P}\right) = \frac{P}{p} u(x);$$

ponendo ancora:

$$(3, 3) \quad \alpha = \frac{P}{p},$$

rapporto che chiameremo *inversa del prezzo relativo del vitto*, otteniamo la equazione:

$$(3, 4) \quad w(r) = \alpha u(x).$$

A questa espressione daremo il nome di *equazione di equilibrio*. Essa è una equazione fra le tre variabili α , x , r ; definisce quindi nello spazio a tre dimensione (α , x , r) una superficie che indicheremo come *superficie di consumo*. Il significato di questa può essere descritto al modo seguente: supponiamo di avere un certo numero di osservazioni del nostro individuo, in diverse situazioni di prezzi e di reddito; ciascuna di esse comprenderà tre numeri, tre valori α , x ed r e potrà quindi essere rappresentata da un punto nello spazio (α , x , r). Un certo numero di tali osservazioni sarà rappresentato da una serie di punti nello spazio stesso. Se la composizione dei bisogni del nostro individuo non mutasse, questi punti di osservazione non sarebbero disseminati arbitrariamente nello spazio (α , x , r), ma giacerebbero su una certa superficie, che è appunto la superficie di consumo. L'equazione (3, 4) non è altro che una definizione implicita di essa.

La fig. 1 è la fotografia del modello di una tale superficie di consumo, costruito in base ai risultati numerici effettivi ottenuti col metodo di traslazione (vedi Capitolo VII). Il modello appartiene al prof. FISHER, che lo

ha fatto costruire per il suo corso sulla teoria del prezzo e mi ha gentilmente concesso di riprodurlo qui.

Lungo un asse orizzontale del modello, a partire dal vertice anteriore e andando verso destra, sono segnati i valori del reddito (reale) r ; lungo l'altro asse orizzontale a partire dal vertice anteriore e andando verso sinistra, sono segnati i valori dell'inversa del prezzo relativo, della merce α . È special-

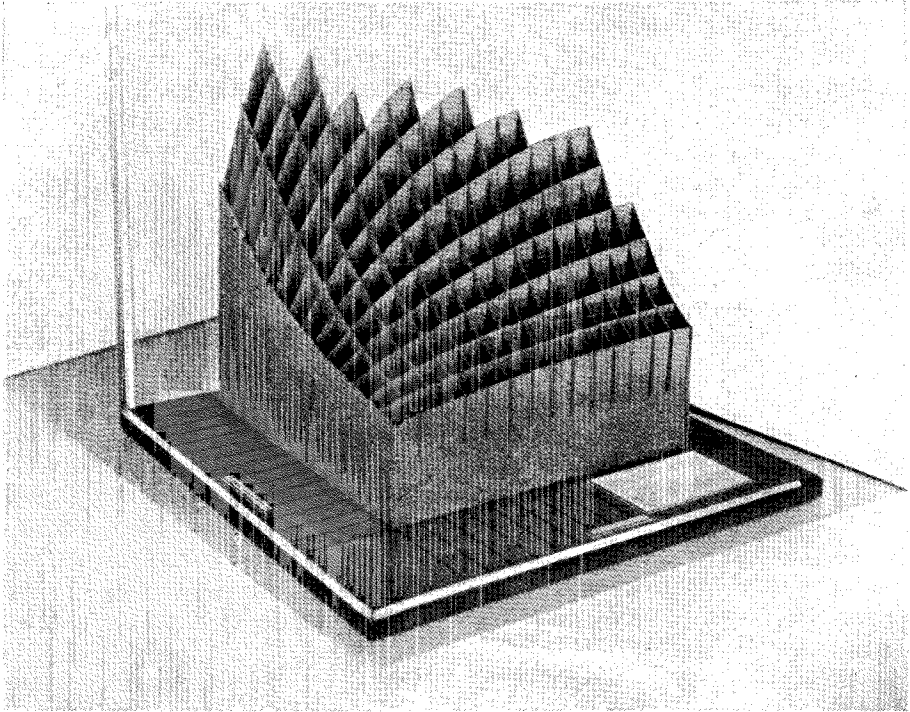


Fig. 1.

mente interessante studiare le curve che si ottengono intersecando la superficie con i tre seguenti sistemi di piani:

- 1° piani verticali paralleli agli assi (α, x) ;
- 2° piani verticali paralleli agli assi (x, r) ;
- 3° piani orizzontali paralleli agli assi (α, r) .

Ciascuno di queste tre fasci di piani definisce una famiglia di curve di intersezione fra la superficie e i piani della serie; e ciascuna delle tre famiglie di curve ha un significato preciso che diviene chiaro quando si faccia riferimento all'equazione di equilibrio.

Una curva qualunque della prima famiglia rappresenta in qual modo la quantità consumata x vari in funzione dell'inversa del prezzo relativo

del vitto, quando il reddito reale r sia mantenuto costante. Ad una tale curva, proiettata sul piano tra l'asse α e l'asse x , daremo il nome di *curva invertita di domanda*. Essa non è altro che un'ordinaria curva di domanda, tranne il fatto che su uno degli assi sono riportati, anziché i prezzi della merce, le loro inverse. La curva ha quindi un andamento ascendente invece che discendente. Per ogni valore del reddito si ha una di tali curve invertite di domanda. La famiglia di esse, quali appaiono quando sono proiettate sul piano (α, x) , è rappresentata nella fig. 2 a. Le curve della fig. 2 a sono effettivamente proiezioni delle curve ottenute dal modello rappresentato nella fig. 1.

Alle curve della seconda famiglia possiamo dare il nome di « curve di ENGEL ». Esse rappresentano la legge di ENGEL, esprimono cioè in qual modo il consumo della merce in questione aumenti all'aumentare del reddito (reale), quando il prezzo di essa sia mantenuto costante. In realtà, la legge di ENGEL, nella sua forma originale, fu stabilita in termini delle variazioni che la *spesa percentuale* per una data merce (o gruppo di merci) subisce quando il reddito varia, mentre le nostre curve nelle coordinate (x, r) , danno la *quantità consumata* in funzione del reddito. Ma le curve dei due tipi forniscono informazioni su fenomeni analoghi e, se il prezzo della merce è noto, le une possono facilmente essere trasformate nelle altre. Nel seguito ci si presenterà qualche volta la necessità di considerare nello stesso tempo le curve che esprimono in qual modo la spesa per la merce di paragone varii in funzione del reddito, e le curve che esprimono in qual modo la quantità consumata varii in funzione del reddito. Chiameremo le prime *curve di spesa* (o, più precisamente, curve di spesa e reddito); le seconde *curve di quantità* (o, più precisamente, curve di quantità e reddito). Così, parleremo di curve di spesa per vitto, di curve di quantità di vitto, di curve di spesa per zucchero, ecc. La fig. 2 b mostra le curve della quantità di vitto ricavate dal modello.

La terza famiglia di curve ottenute dalla superficie di consumo è forse la più importante di tutte. Le curve rappresentano le linee al contorno, per le diverse « altitudini » della superficie di consumo sul piano orizzontale, cioè sul piano (α, r) . A queste linee al contorno daremo il nome di *isoquanti*, volendo esprimere con questa denominazione che una qualsiasi di esse rappresenta le variazioni concomitanti che α ed r subiscono, nell'ipotesi che la quantità consumata sia mantenuta costante. Sono rappresentate nella fig. 2 c. A parte un *fattore di estensione lungo l'asse x* , uno qualunque degli *isoquanti* è semplicemente una rappresentazione della *curva di utilità marginale della moneta* $w = w(r)$. Dalla equazione di equilibrio deduciamo infatti:

$$\alpha = \frac{1}{u(x)} w(r).$$

Quindi, se x è costante, il che significa che è costante $u(x)$, abbiamo:

$$(3, 5) \quad \alpha = w(r) \cdot \text{una costante.}$$

Ma, a parte il fattore costante, questa non è altro che l'equazione di utilità della moneta $w = w(r)$.

Ciò mostra che tutti gli isoquanti debbono essere simili, nel senso che ciascuno di essi può essere ottenuto da uno qualsiasi degli altri semplicemente moltiplicando l'ordinata per una costante. Ne consegue che, se per

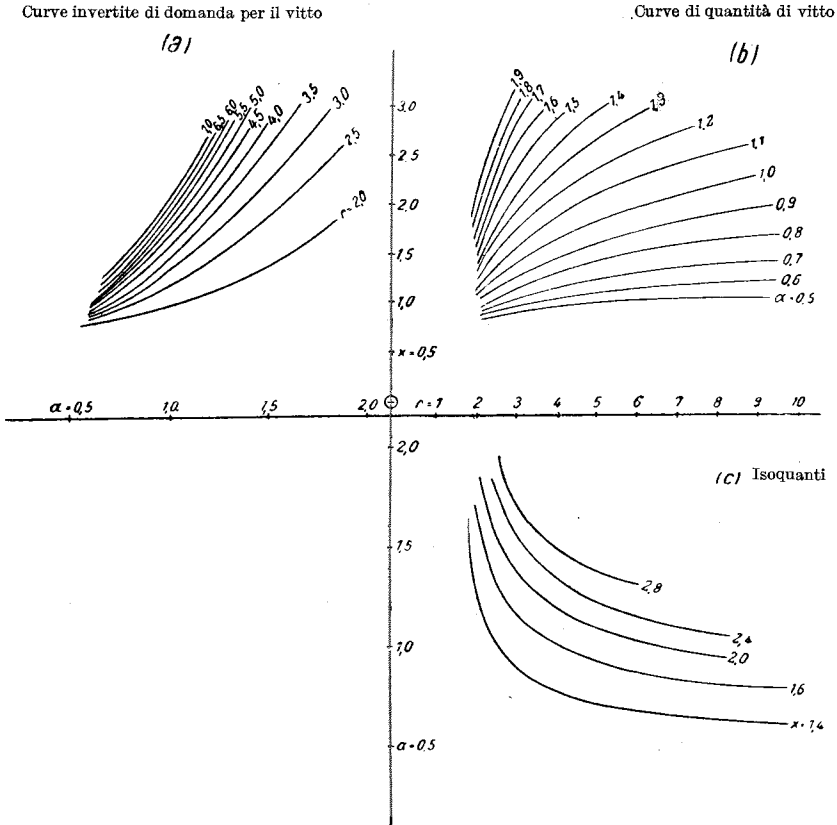


Fig. 2.

la rappresentazione degli isoquanti si assume lungo l'asse α una scala logaritmica, essi dovranno avere tutti la medesima forma e differire soltanto per uno spostamento nella direzione dell'asse α . Ciò costituisce naturalmente un aiuto notevole quando si passi alla effettiva esecuzione del lavoro statistico.

È ovvio che, date le due funzioni $w(r)$ ed $u(x)$, la superficie di consumo è univocamente determinata. L'equazione di essa sarà data allora dalla (3, 4). Ci si può chiedere se, reciprocamente, l'assegnazione della forma della superficie sia sufficiente a determinare le due funzioni $w(r)$ ed $u(x)$. È facile vedere che l'assegnazione della forma della superficie non basta a deter-

minare assolutamente ed univocamente le due funzioni $w(r)$ ed $u(x)$. Senza infatti mutare la forma della superficie, possiamo moltiplicare ambo i membri della (3, 4) per un fattore comune. È ovvio quindi che le due funzioni $w(r)$ ed $u(x)$ possono essere determinate soltanto a meno di un fattore costante arbitrario, identico per entrambe. Mostriamo ora che in questo fattore costante è la sola arbitrarietà che sia lasciata per le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$. Più precisamente: se la forma della superficie è tale che questa possa essere definita da una equazione del tipo (3, 4), la forma stessa è sufficiente a determinare le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$, univocamente, a meno di un fattore costante arbitrario, identico per entrambe.

Infatti, siano $w(r)$ ed $u(x)$ due funzioni qualsiasi, tali che la (3, 4) dia una definizione implicita della superficie di consumo. Se $\bar{w}(r)$ ed $\bar{u}(x)$ sono altre due funzioni che determinano la medesima superficie, dovremo avere identicamente in x e in r :

$$\frac{w(r)}{u(x)} = \frac{\bar{w}(r)}{\bar{u}(x)}$$

e quindi:

$$\frac{\bar{w}(r)}{w(r)} = \frac{\bar{u}(x)}{u(x)}.$$

In questa equazione, il primo membro è indipendente da x e il secondo è indipendente da r . Il valore comune dei due rapporti, espresso dalla (3, 6), deve quindi essere una costante c , indipendente sia da x che da r . Dobbiamo avere cioè:

$$(3, 7) \quad \begin{aligned} \bar{u}(x) &= c u(x) \\ \bar{w}(r) &= c w(r) \end{aligned}$$

relazioni che mostrano come la sola arbitrarietà, nelle funzioni $w(r)$ ed $u(x)$, che definiscono la superficie di consumo, sia quella del fattore di proporzionalità.

L'arbitrarietà di questo fattore può essere considerata come espressione del fatto che nei criteri obbiettivi di giudizio, dei quali la presente analisi si serve, non vi è nulla che renda possibile il confrontare le utilità relative ad un individuo (o famiglia) con le utilità relative ad un altro individuo (o famiglia). Ciò non esclude che un giorno possa essere determinato un metodo che consenta effettivamente i confronti delle utilità relative a individui (o famiglie) diversi. Ma finora questo metodo non è stato trovato, e debbo convenire che dubito molto che esso possa essere trovato mai.

L'essere le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$ affette da un fattore costante di proporzionalità, diverso per diversi individui, non significa che la medesima indeterminatezza esista per la forma della superficie di consumo. Tale forma è indipendente dal fattore arbitrario in questione. *Un tentativo di costruire statisticamente una superficie di consumo non implica quindi alcun confronto*

fra utilità afferenti ad individui diversi. La forma della superficie è un dato perfettamente oggettivo, ed è su questo appunto che sono basati i metodi della presente indagine.

Dal fatto che le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$ sono affette da un fattore arbitrario di proporzionalità, diverso pei diversi individui, mentre la forma della superficie di consumo è esente da tale arbitrarietà, si può dedurre che, in linea di principio, è possibile fare qualsiasi specie di confronto tra le forme delle superficie di consumo relative a due o più individui diversi. Ma una sola particolare specie di confronti può essere fatta tra le funzioni di utilità della moneta ${}_1w(r)$ e ${}_2w(r)$ relative a due diversi individui: precisamente il confronto sui risultati del quale non può influire il fatto che le due funzioni ${}_1w(r)$ e ${}_2w(r)$ siano moltiplicate rispettivamente per due fattori costanti arbitrari (indipendenti da r). Un confronto possibile è, ad esempio, quello tra la misura relativa delle variazioni delle due funzioni ${}_1w(r)$ e ${}_2w(r)$, cioè il confronto tra le flessibilità della moneta ${}_1\check{w}$ e ${}_2\check{w}$ per il primo e per il secondo individuo. Una osservazione dello stesso genere si applica naturalmente al confronto tra due funzioni $u(x)$ relative ad un primo e ad un secondo individuo.

Nel tentativo di determinare per via statistica la forma della superficie di consumo, sarà di rado sufficiente seguire il comportamento di un singolo individuo o di una singola famiglia. Più spesso sarà necessario ricorrere a dati per tutto un gruppo di individui o di famiglie. Invece di studiare la relazione funzionale fra i valori di x e di r relativi ad un singolo individuo, dovremo spesso studiare la relazione funzionale tra il consumo medio del gruppo, \bar{x} , ed il reddito medio del gruppo, \bar{r} . Sorge quindi la questione se questa relazione funzionale tra le medie \bar{x} ed \bar{r} sarà realmente della stessa specie che la relazione tra i valori x ed r relativi ad un individuo singolo; o se invece non possa accadere che, ad esempio, una particolare forma della distribuzione dei redditi determini delle alterazioni nella relazione tra \bar{x} ed \bar{r} . Più precisamente, supposto che la relazione tra x ed r sia la medesima per tutti gli individui del gruppo, è possibile che la relazione risultante tra \bar{x} ed \bar{r} sia di una specie diversa?

Prima di procedere alla discussione della determinazione statistica delle curve di utilità, sarà opportuno sottoporre questa questione ad una analisi più minuziosa. Ed a questo scopo dimostreremo innanzi tutto un lemma sulle medie indirette.

Lemma sulla media indiretta di una variabile statistica.

Consideriamo due variabili x ed r legate fra loro da una relazione funzionale. La relazione può essere definita in due modi: ad esempio, esprimendo x in funzione di r ; e sia $x = h(r)$ questa funzione. La medesima relazione può naturalmente essere definita esprimendo r come funzione di x ; e sia $r = k(x)$ questa funzione. Poichè le due funzioni $h(r)$ e $k(x)$ esprimono entrambe la medesima relazione, deve esservi evidentemente fra esse una intima

connessione. Più precisamente: in base ad ipotesi molto generali, sarà possibile ricavare $k(x)$ quando sia data $h(r)$, e viceversa. $k(x)$ è perciò chiamata funzione inversa di $h(r)$, ed analogamente, $h(r)$ è detta funzione inversa di $k(x)$. Questo tipo di mutua relazione tra funzioni viene denotato con un simbolo particolare; il simbolo: $h^{-1}(x)$, è usato per esprimere la funzione inversa di $h(r)$. Si pone cioè: $k(x) = h^{-1}(x)$. Diamo qui di seguito qualche semplice esempio di funzioni inverse.

Se $h(r) = a + br$, cioè se $x = a + br$, a e b essendo delle costanti, avremo:

$$r = \frac{x - a}{b},$$

cioè:

$$h^{-1}(x) = \frac{x - a}{b}.$$

Se $h(r) = r^2$, cioè se $x = r^2$, avremo $r = \sqrt{x}$, ossia $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Negli esempi precedenti $h(r)$ è un polinomio di grado basso in r , e la funzione inversa può essere espressa come semplice combinazione di moltiplicazioni e divisioni di polinomi, estrazioni di radice quadrata e simili. Se $h(r)$ è una funzione più complicata, può accadere che $h^{-1}(x)$ non possa essere espressa in modo così elementare; ma questa è una circostanza secondaria per l'argomento che ci occupa.

Vi sono altri mezzi per effettuare l'inversione delle funzioni: per esempio, lo sviluppo in serie, o una semplice analisi grafica, ecc.

Il fatto importante che ci interessa qui è, non di sapere se esista la possibilità di esprimere $h^{-1}(x)$ in forma esplicita semplice, ma di sapere se — con un mezzo o con un altro — vi sia la possibilità di determinare la forma di $h^{-1}(x)$ quando sia data la forma di $h(r)$.

Può accadere anche che $h^{-1}(x)$ non sia una funzione monodroma, anche se $h(r)$ lo è. Ma questa difficoltà può ancora essere superata grazie ad alcune convenzioni sul ramo della funzione inversa di $h(r)$ che si deve intendere col simbolo $h^{-1}(x)$. Una condizione necessaria e sufficiente perchè l'inversa di $h(r)$ sia una funzione monodroma in un certo intervallo di x è evidentemente che $h(r)$ sia una funzione monotona nel corrispondente intervallo di r .

Sia data ora una distribuzione di frequenze $\varphi(r)$ dei valori di r ; ossia ammettiamo di avere un certo numero di elementi, ciascuno dei quali sia caratterizzato da un determinato valore di r collegato con esso, gli elementi essendo distribuiti con una densità tale che fra r ed $r + dr$ ve ne siano $\varphi(r) dr$. Il valore:

$$(3, 8) \quad \bar{r} = \frac{\int r \varphi(r) dr}{\int \varphi(r) dr}$$

rappresenta allora la media di r . Nella (3, 8) l'integrazione deve essere estesa a tutto l'intervallo di r nel quale esistono elementi. Evidentemente non porterebbe nessun inconveniente il supporre l'integrazione estesa da $-\infty$ a $+\infty$, poichè la funzione integranda $\varphi(r)$ sarà nulla dovunque non vi siano elementi. Il valore:

$$(3, 9) \quad \bar{x} = \frac{\int x \varphi(r) dr}{\int \varphi(r) dr} = \frac{\int h(r) \varphi(r) dr}{\int \varphi(r) dr}$$

è la media di x . Più precisamente, \bar{x} è la media diretta di x . Ma esiste la possibilità di considerare anche una media indiretta di x , cioè la media di x definita attraverso la funzione $h(r)$. Il procedimento più naturale per costruire tale media indiretta di x sarebbe quello di prendere la media diretta di r e chiedersi quale valore di x corrisponde ad essa. Si verrebbe così a definire la media indiretta $\bar{\bar{x}}$ di x mediante la relazione:

$$(3, 10) \quad \bar{\bar{x}} = h(\bar{r}).$$

Analogamente si potrebbe definire la media indiretta di r mediante una relazione della forma:

$$(3, 11) \quad \bar{r} = h^{-1}(\bar{x}).$$

Sorge ora la questione se vi sia tra la media diretta e la media indiretta una differenza importante. La risposta è data dalla formula che segue (1):

$$(3, 12) \quad \bar{x} - h(\bar{r}) = \frac{1}{2} h''(\xi) \sigma^2$$

dove $h''(\xi)$ indica la derivata seconda di $h(r)$ presa in un punto ξ del campo di integrazione e σ^2 è il quadrato dello scarto quadratico medio della distribuzione $\varphi(r)$, e cioè:

$$(3, 13) \quad \sigma^2 = \frac{\int (r - \bar{r})^2 \varphi(r) dr}{\int \varphi(r) dr}.$$

La dimostrazione è facile. Abbiamo semplicemente:

$$\begin{aligned} [\bar{x} - h(\bar{r})] \cdot \int \varphi(r) dr &= \int [h(r) - h(\bar{r})] \varphi(r) dr = \\ &= \int (r - \bar{r}) h'(\bar{r}) \varphi(r) dr + \frac{1}{2} \int (r - \bar{r})^2 h''(\xi_r) \varphi(r) dr \end{aligned}$$

(1) Questa formula è soltanto un caso particolare della teoria delle funzioni convesse di HÖLDER-JENSEN. Piuttosto che rimandare il lettore alla teoria generale, ho preferito dare la dimostrazione indipendente riportata nel testo, della proposizione

dove ξ_r è un valore intermedio fra \bar{r} ed r . Il primo integrale del secondo membro dell'ultima formula è nullo, e poichè $(r - \bar{r})^2$ è una quantità non negativa, l'ultimo integrale è eguale ad $\frac{1}{2} h''(\xi) \sigma^2 \int \varphi(r) dr$, dove ξ è un valore di r preso in tutto il campo di integrazione. Ciò dimostra la (3, 12), poichè $\int \varphi(r) dr$ è diverso da zero.

Dalla (3, 12) deduciamo in particolare che, se $h(r)$ è una funzione lineare, la media diretta e la media indiretta di x si eguagliano. Se $h(r) = \frac{1}{r}$, ed r assume soltanto valori positivi, $h''(r)$ è positiva in tutto il campo di variabilità di r , sicchè $\bar{x} > \bar{\bar{x}}$, il che costituisce una dimostrazione del fatto ben noto che la media aritmetica di una variabile positiva è maggiore della media armonica della variabile stessa. Prendendo $h(r) = \log r$, si trova che la media aritmetica è maggiore della media geometrica; e così di seguito.

Dalla (3, 12) risulta inoltre che se la distribuzione $\varphi(r)$ è molto concentrata, cioè se σ è piccolo, la differenza tra media diretta e media indiretta diviene molto piccola, *qualunque sia la forma della funzione $h(r)$* .

* * *

Applichiamo ora queste considerazioni alla superficie di consumo. Supponiamo di avere un gran numero di individui (famiglie) aventi tutti la medesima superficie di consumo. Sia $x = h(\alpha, r)$ la funzione che esprime in qual modo il consumo individuale (il consumo delle famiglie) dipenda da α e da r . Sia inoltre $\varphi(r)$ la distribuzione di frequenza degli individui (famiglie) in relazione al reddito effettivo r ; sia ancora:

$$(3, 14) \quad \bar{r} = \frac{\int_0^{\infty} r \varphi(r) dr}{\int_0^{\infty} \varphi(r) dr}$$

il reddito medio della popolazione, e sia infine:

$$(3, 15) \quad \bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} h(\alpha, r) \varphi(r) dr}{\int_0^{\infty} \varphi(r) dr}$$

il consumo medio. Se gli individui (famiglie) si comportano in armonia con le nostre ipotesi, il consumo medio \bar{x} definito dalla (3, 15) è evidentemente

semplice di cui avevo bisogno qui. Mi sembra che la formula (3, 12), malgrado la sua estrema semplicità sia abbastanza espressiva della natura essenziale della relazione tra medie dirette e indirette. Vedi anche: DARMOIS, *Statistique Mathématique*, Paris, 1928, pag. 32.

eguale al consumo totale del gruppo diviso per il numero degli individui (famiglie).

La prima questione da risolvere è ora per noi la seguente. Se la distribuzione dei redditi $\varphi(r)$ (e per conseguenza anche il reddito medio \bar{r}) rimane invariata, e varia l'inversa del prezzo relativo α , come varierà il consumo medio \bar{x} ? Varierà, al variare di α , approssimativamente nello stesso modo che se, per ogni situazione di prezzi, esso fosse stato semplicemente computato come valore della funzione $h(\alpha, \bar{r})$? Ora, soltanto quando questa condizione è soddisfatta, l'osservazione della covariazione tra \bar{x} ed α può rivelare la natura della funzione $h(\alpha, \bar{r})$. La questione qui posta si identifica con l'altra: se la media diretta di x , cioè \bar{x} , sarà approssimativamente eguale alla media indiretta $\bar{x} = h(\alpha, \bar{r})$, per tutti i valori considerati di α . Come abbiamo rilevato dalla (3, 12), una condizione sotto la quale ciò si verifica è la $h(\alpha, r)$, considerata come funzione di r , sia quasi lineare nel tratto dell'intervallo di variazione di r nel quale si trova la maggior parte degli individui. Quanto più concentrata è la distribuzione dei redditi, tanto più, naturalmente, $h(\alpha, r)$ si avvicinerà ad una linea retta interpolata nella distribuzione.

Queste condizioni possono non essere soddisfatte se consideriamo una popolazione numerosa nel suo complesso, ma lo saranno generalmente abbastanza bene se la popolazione è suddivisa secondo classi di reddito n. 1, 2, 3... ed il reddito medio ed il consumo medio sono separatamente considerati entro ciascuna classe. Ciò fornisce nello stesso tempo la possibilità di determinare empiricamente, in qual modo la funzione $h(\alpha, r)$ dipenda da r . Il procedimento in questione sarebbe quello di definire il reddito medio \bar{r} ed il consumo medio \bar{x} delle singole classi mediante le formule:

$$(3, 16) \quad \bar{r}_1 = \frac{\int_{r_{i-1}}^{r_i} r \varphi(r) dr}{\int_{r_{i-1}}^{r_i} \varphi(r) dr}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_{r_{i-1}}^{r_i} h(\alpha, r) \varphi(r) dr}{\int_{r_{i-1}}^{r_i} \varphi(r) dr}$$

e considerare poi la covariazione tra α , \bar{r} ed \bar{x} . Se le classi di reddito sono sufficientemente ristrette, la covariazione sarà tale che approssimativamente $\bar{x}_i = h(\alpha, \bar{r}_i)$. E ciò varrebbe anche se la distribuzione dei redditi $\varphi(r)$ fosse mutata, ferma restando soltanto la condizione che le classi di reddito fossero abbastanza ristrette per rendere plausibile l'ipotesi che, *entro ciascuna classe*, la funzione $h(\alpha, r)$ possa essere considerata come approssimativamente lineare in r . Di una approssimazione di questa natura ci si vale nell'applicazione del metodo di traslazione ai dati americani, applicazione che è descritta nel Capitolo VII del presente lavoro.

Se si considera soltanto una classe di reddito, e le necessarie variazioni del reddito medio sono ottenute osservando la classe medesima durante

un certo intervallo di tempo, è necessario che in essa la ripartizione dei redditi sia il più possibile stretta e densa, sicchè la variazione storica nella distribuzione dei redditi sia costituita essenzialmente da una variazione nel reddito medio, la maggior parte degli individui essendo sempre più concentrati intorno alla media. Su una approssimazione di questa natura è fondata l'applicazione del metodo degli isoquantici ai dati di Parigi, descritta nel Capitolo IV del presente lavoro.

Anche se le condizioni precedenti non sono rigorosamente soddisfatte, è senza dubbio possibile trasformare la relazione approssimata sopra studiata in una relazione esatta. Potremmo semplicemente studiare, invece che la relazione tra \bar{x} ed \bar{r} , la relazione tra \bar{x} e la media indiretta $\bar{r} = h^{-1}(\alpha, \bar{x})$. La funzione $h^{-1}(\alpha, x)$ è l'inversa della funzione $h(\alpha, r)$, presa rispetto ad x , α essendo considerato, nel procedimento di inversione come un parametro costante. La relazione tra \bar{x} ed \bar{r} dà anzi la vera rappresentazione della funzione $h(\alpha, r)$, poichè si ha sempre esattamente $\bar{x} = h(\alpha, \bar{r})$. Analogamente otterremo una relazione esatta considerando la covariazione tra la media indiretta \bar{x} e la media diretta \bar{r} . In realtà la media indiretta di x è definita semplicemente a mezzo della relazione $\bar{x} = h(\alpha, \bar{r})$. Ma la possibilità di stabilire fra il reddito medio ed il consumo medio una relazione esatta, introducendo per una delle variabili considerate la media *indiretta* invece che la diretta, ha un interesse piuttosto teorico che statistico, poichè, per definire la media indiretta \bar{r} o la media indiretta \bar{x} , è necessario conoscere *a priori* la funzione $h(\alpha, r)$ la determinazione della quale costituisce appunto lo scopo dell'analisi statistica.

IV. — IL METODO DEGLI ISOQUANTI

Il mezzo più semplice per giungere alla determinazione effettiva della funzione $w(r)$, è di costruire uno degli isoquanti della superficie di consumo. Se i dati sono sufficientemente abbondanti, il procedimento può essere ripetuto più volte, il che offre il mezzo di controllare il risultato: di stabilire cioè se gli isoquanti costruiti siano compatibili, ossia se ciascuno di essi possa essere ottenuto da uno qualsiasi degli altri a mezzo di moltiplicazione per un fattore che porti una estensione nel senso dell'asse delle α . Se ciò avviene, possiamo scegliere uno qualsiasi degli isoquanti così determinati, sostituire lungo tale asse la notazione w alla notazione α , ed assumere la curva risultante come curva di utilità marginale della moneta $w = w(r)$. Ciò implica naturalmente una scelta dell'unità di misura per l'utilità. Se in seguito si presenta il bisogno di costruire anche la curva di utilità marginale per la merce di confronto, $u = u(x)$, e si vuol costruirla in modo che i valori delle ordinate per essa, siano comparabili con quelli per la curva w , occorre tener presente che l'unità di misura per l'utilità è già stata scelta, in vista della costruzione della curva di utilità della moneta, e quindi la scala da usare lungo l'asse delle u non è più arbitraria. Allo scopo di stabilire quale essa debba essere, possiamo semplicemente scegliere un particolare punto di osservazione — sia (α_1, x_1, r_1) — e determinare la scala di u in modo che sia:

$$u(x_1) = \frac{w(r_1)}{\alpha_1}.$$

Se le curve $w(r)$ ed $u(x)$ non debbono essere considerate insieme, l'unità di misura lungo l'asse delle ordinate può naturalmente essere scelta per ciascuna di esse in modo indipendente.

Quando i dati a disposizione siano costituiti da serie storiche di valori delle quantità α, x, r , per un dato gruppo di individui, gli isoquanti possono essere costruiti col seguente procedimento di interpolazione. Si segnano innanzi tutto le tre serie storiche che indicano le variazioni di α, x ed r . La scala deve essere abbastanza grande perchè sia possibile l'interpolazione col metodo grafico. Se i valori di α, x ed r sono dati per intervalli mensili, si può — in caso di necessità — applicare la perequazione meccanica, ad esempio, una media mobile per trimestri. Segnate le serie storiche α, x ed r , si traccia una retta orizzontale rappresentante $x = \text{cost.} = x_1$ e si contrassegnano i valori del tempo per cui tale retta orizzontale interseca la serie storica x ed anche i punti delle curve α ed r corrispondenti ai valori stessi. Così ciascuno degli istanti di tempo considerati determina un valore di α ed un valore di r , ossia un punto in un diagramma (α, r) . Il luogo dei punti così ottenuti for-

nisce una determinazione numerica di uno degli isoquanti, precisamente l'isoquanto che corrisponde al valore x_1 di x .

È ovvio che sarebbe possibile anche scegliere per le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$ determinate forme analitiche ed adattarle col metodo dei minimi quadrati o con qualche altro metodo di perequazione. In generale tuttavia, sarebbe consigliabile usare come base principale dell'analisi il procedimento di interpolazione storica, poichè esso è indipendente da ipotesi arbitrarie sulla forma delle funzioni analitiche da usare nel processo di adattamento. Il risultato del procedimento di interpolazione dovrebbe essere assoggettato ad un controllo per stabilire se i punti di osservazione determinati a mezzo della interpolazione nel tempo si aggruppano abbastanza bene intorno agli isoquanti determinati con la perequazione analitica.

Il metodo degli isoquanti fu applicato al materiale di Parigi, di cui è stato fatto cenno. Non posso qui entrare in particolari circa il lavoro preliminare consistente nel confronto delle diverse serie statistiche a disposizione, e nella eliminazione di quelle che non potevano essere considerate adatte per l'analisi. Nè posso dare tutti i dettagli riguardanti i calcoli numerici. Mi limiterò alla enumerazione dei risultati principali.

I dati furono forniti dall'Ufficio statistico della *Union des Coopérateurs Parisiens*. Di essi furono usate le serie seguenti:

1° quantità di zucchero vendute per ogni mese nei negozi appartenenti al sistema cooperativo a catena nella regione di Parigi;

2° prezzo dello zucchero in questi negozi;

3° totale delle vendite (per tutte le merci) della Società Cooperativa, per mese (*chiffres d'affaires*);

4° numero dei membri al principio del mese;

5° indici del prezzo della vita computati dall'Ufficio statistico della Società.

Tutti questi erano dati mensili, e furono presi per il periodo dal giugno 1920 al dicembre 1922, comprese queste due date.

Dopo avere eliminate dalla serie del totale delle vendite le fluttuazioni stagionali col metodo dei *link relatives* furono presi come indici delle nostre tre variabili α , x , r i rapporti seguenti (1):

α = rapporto fra gli indici del prezzo della vita ed il prezzo dello zucchero;

x = rapporto fra la quantità di zucchero venduta ogni mese ed il numero dei membri della Società (per interpolazione fu calcolato il numero dei membri alla metà di ciascun mese);

r = rapporto fra il totale delle vendite e l'indice del prezzo della vita.

(1) La notazione usata nella mia memoria *Sur un problème d'économie pure* è leggermente differente da quella adottata qui.

La Tavola I dà i risultati di questi calcoli:

Tavola I. — MATERIALE: SOCIETÀ COOPERATIVE DI PARIGI.

		Inversa del prezzo relativo dello zucchero α	Quantità di zucchero consumata x	Reddito effettivo r
1920	Giugno	756	2710	376
	Luglio	749	1750	374
	Agosto	742	2976	385
	Settembre	794	2015	307
	Ottobre	837	1115	273
	Novembre	1018	1164	252
	Dicembre	1266	928	226
1921	Gennaio	1223	940	232
	Febbraio	1162	710	226
	Marzo	1100	850	240
	Aprile	978	1223	253
	Maggio	975	1181	277
	Giugno	1081	1510	262
	Luglio	953	1971	269
	Agosto	944	1602	254
	Settembre	1040	1266	237
	Ottobre	1228	1832	245
	Novembre	1208	1905	254
	Dicembre	1196	2000	258
1922	Gennaio	1221	1652	255
	Febbraio	1200	1728	268
	Marzo	1130	1870	281
	Aprile	1125	1710	273
	Maggio	1218	1780	259
	Giugno	1178	1962	243
	Luglio	1117	1749	252
	Agosto	1070	1823	252
	Settembre	1096	1778	263
	Ottobre	1197	1900	253
	Novembre	1160	1945	259
	Dicembre	1092	1955	273

Da questi dati, gli isoquanti corrispondenti a $x = 1550$, $x = 1750$, $x = 1950$ furono determinati a mezzo di una interpolazione storica, dopo aver applicato a ciascuna delle serie α , x , r una perequazione con la media mobile trimestrale. Gli isoquanti furono calcolati anche con metodo analitico, usando come espressione della utilità della moneta la funzione seguente:

$$(4, 1) \quad w(r) = \frac{c}{\log r - \log a}$$

dove c ed a sono delle costanti; la costante a indica il minimo di esistenza. Questa è una fra le più semplici funzioni per cui siano soddisfatte un certo numero di condizioni che sembra plausibile imporre alla funzione esprimente l'utilità della moneta. Tali condizioni sono discusse nel mio articolo « *Sur un Problème d'Économie Pure* » sopra ricordato. Esse portano, ad esempio, ad escludere tutte le funzioni tali che la flessibilità della moneta $\check{w}(r)$, definita dalla (2, 14) sia della forma:

$$\check{w}(r) = Re^Q$$

dove R e Q sono funzioni razionali di r ; ed escludono *a fortiori* tutte le funzioni $w(r)$ che sono esse stesse della forma:

$$w(r) = Re^Q.$$

È esclusa fra le altre la funzione:

$$w(r) = \frac{c}{r - a}$$

che fu suggerita da DANIELE BERNOULLI. Mi sembra che il posto che la funzione di BERNOULLI ha preso nelle discussioni della misura e della misurabilità dell'utilità, sia del tutto immeritato. La funzione di BERNOULLI ha, fra le altre proprietà, quella di dare un valore assoluto della flessibilità della moneta che è maggiore dell'unità per tutti i redditi (al disopra del minimo di esistenza) e che si avvicina all'unità soltanto quando il reddito tende all' ∞ . È assolutamente da escludere che una funzione simile possa dare una buona approssimazione della legge di variazione dell'utilità della moneta. Le condizioni sopra ricordate, riguardanti la funzione dell'utilità della moneta sono tali che non è possibile prendere in considerazione neppure la funzione:

$$w(r) = \frac{c}{(r - a)^2}$$

che fu suggerita da CHARLES JORDAN (1).

Gli isoquanti determinati per il materiale di Parigi, con adattamento analitico effettuato a mezzo della formula (4, 1), hanno dato un risultato che concorda assai bene con quello ottenuto a mezzo dell'interpolazione storica. I punti determinati con quest'ultima si aggruppano strettamente intorno agli isoquanti corrispondenti, determinati con procedimento analitico. Le variazioni dell'utilità della moneta ottenute con questi metodi sono date nella Tavola II.

(1) « The American Mathematical Monthly », vol. XXXI, n. 4 (1924).

Tavola II. — MATERIALE DI PARIGI: 1920-1922.

Reddito effettivo <i>r</i>	Utilità marginale della moneta <i>w</i>	Valore assoluto della flessibilità della curva di utilità della moneta \bar{w}
(75%)	(284%)	(6,40)
(80%)	(201%)	(4,52)
85%	158%	3,55
90%	131%	2,96
95%	113%	2,55
100%	100%	2,25
105%	90,4%	2,03
110%	82,3%	1,85
115%	76,1%	1,71
120%	70,8%	1,59
125%	66,6%	1,50
130%	62,7%	1,41
135%	59,7%	1,34
140%	56,8%	1,28
(145%)	(54,3%)	(1,22)
(150%)	(52,3%)	(1,18)

(Le cifre in parentesi sono estrapolate oltre la serie delle osservazioni).

V. — IL METODO DI VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ

Nel metodo degli isoquanti, l'elemento variabile, a mezzo del quale viene generata la curva dell'utilità della moneta, è il reciproco del prezzo relativo della merce di confronto α . Ogni situazione di prezzi (col valore costante assunto per x) fornisce un punto soltanto della curva di utilità della moneta. Otteniamo quindi tanti punti isolati di questa curva quante sono, nel materiale di osservazione, le situazioni di prezzi diverse (col valore costante scelto per x). Se abbiamo una sola di tali situazioni di prezzi, otteniamo un solo punto della curva, il quale naturalmente non può fornirci alcuna indicazione sulla forma di questa. La ragione per cui il materiale di Parigi ha consentito la costruzione di diversi punti sulla stessa curva di utilità della moneta è che esso consisteva in *serie storiche*, con variazioni notevoli nel prezzo relativo dello zucchero.

Se il materiale è costituito da dati sui bilanci familiari, la situazione è diversa. Ogni indagine sui bilanci familiari riguarda in genere un particolare luogo e tempo, e fornisce quindi notizie su una sola situazione di prezzi. Si possono avere a disposizione una o più di tali indagini su bilanci familiari, relative a luoghi o tempi che presentano diverse situazioni di prezzi, ma in genere non si avrà a disposizione un numero di indagini sufficiente perchè l'intervallo di variazione dei prezzi fra esse sia tale che la variazione possa essere assunta come variabile indipendente per la generazione dei punti della curva di utilità della moneta. Sorge quindi la questione: invece che assumere x costante, ed osservare le corrispondenti covariazioni di α ed r , come si fa nel metodo degli isoquanti, è possibile mantenere costante α , osservare le corrispondenti covariazioni tra x ed r ed usare questo mezzo per determinare la forma della curva di utilità della moneta? In altre parole: può la curva di utilità della moneta essere determinata segnando la superficie di consumo con un piano (x, r) invece che con un piano (α, r) ? La risposta è che la forma della curva di utilità della moneta non può essere determinata a mezzo della sezione con un solo piano (x, r) , ma che può esserlo a mezzo di sezioni con due (o più) di tali piani. Daremo il nome di metodo di variazione della quantità al metodo di costruzione della curva di utilità della moneta che si basa su questo principio; in esso infatti, la variabile mediante la quale viene generata la curva di utilità della moneta è la quantità consumata x .

Mostreremo innanzi tutto che è impossibile determinare la forma della curva di utilità della moneta a mezzo di una sola sezione con un piano (x, r) . Infatti, supponiamo di segare la superficie di consumo con un piano (x, r) corrispondente al particolare valore α_1 di α , e costruiamo un diagramma a due dimensioni nel quale le ordinate misurino l'utilità marginale e le ascisse la quantità consumata x . Su una scala funzionale secondaria lungo l'asse delle

ascisse, segniamo i valori del reddito effettivo r che, sulla « curva di quantità e reddito » associata al valore α_1 di α , corrispondono ai successivi valori di x .

Ora, senza incorrere nella più lieve discordanza con i dati di osservazione di cui disponiamo, possiamo tracciare nel diagramma descritto una qualsiasi curva, ed assumerla come curva della utilità marginale $u(x)$ della merce di paragone. Dovremo poi soltanto adottare quella medesima curva come curva di utilità marginale della moneta, tenendo presente che per questa i valori delle ascisse saranno dati dalla scala funzionale di r , e i valori delle ordinate saranno dati dalle ordinate di $u(x)$ moltiplicate per α . Quindi le ipotesi o congetture che si possono fare sulla forma della curva $u(x)$ determinano in certo modo la forma della curva $w(r)$, ed inversamente. Ed il fare delle ipotesi sulla forma di una di tali curve è altrettanto legittimo che il farle sulla forma dell'altra. Il materiale preso per sè stesso, non determina quindi in modo preciso la forma dell'una o dell'altra delle curve. Senza dubbio, fatte alcune ipotesi specifiche riguardo alla natura dell'una delle due curve — supposto, ad esempio, che la flessibilità della moneta sia costantemente eguale all'unità, in valore assoluto; o supposto che la curva di utilità della moneta abbia una particolare forma analitica — sarà possibile determinare i parametri di questa funzione in base al materiale relativo ad un solo prezzo. Ciò mostra soltanto quanto sia pericoloso applicare al presente problema un procedimento di perequazione.

Una curva di utilità della moneta determinata in questo modo dal materiale relativo ad un solo prezzo avrebbe assai scarso significato. Ma se si dispone del materiale relativo a due differenti sezioni (x, r) sulla superficie di consumo, la funzione $w(r)$, come la funzione $u(x)$, possono essere statisticamente determinate.

Infatti sia:

$$(5, 1) \quad r = r(\alpha, x)$$

l'espressione esplicita di r ottenuta risolvendo rispetto ad r l'equazione dell'equilibrio (3, 4). Se α si mantiene costante, $r = r(\alpha, x)$ è semplicemente una relazione tra r ed x la quale è data statisticamente dalla curva di quantità e reddito corrispondente alla particolare situazione di prezzi α che viene considerata. Possiamo quindi riguardare la funzione $r = r(\alpha, x)$ come statisticamente determinata, almeno per alcuni valori particolari di α .

Introducendo l'espressione (5, 1) in (3, 4), otteniamo l'equazione:

$$(5, 2) \quad w[r(\alpha, x)] = \alpha u(x).$$

Dal modo in cui la funzione $r(\alpha, x)$ è definita segue che la (5, 2) è una identità. Essa è verificata per qualsiasi α e per qualsiasi x . Quindi, ponendo prima $\alpha = \alpha_1$ poi $\alpha = \alpha_2$, ed eliminando la funzione $u(x)$, si ottiene:

$$(5, 3) \quad \log w[r(\alpha_1, x)] - \log w[r(\alpha_2, x)] = \log \alpha_1 - \log \alpha_2$$

equazione che è soddisfatta per qualsiasi x .

Adottiamo per brevità la notazione:

$$(5, 4) \quad r_1(x) = r(\alpha_1, x) \quad r_2(x) = r(\alpha_2, x);$$

$r_1(x)$ ed $r_2(x)$ sono allora le funzioni che esprimono in qual modo il reddito effettivo dipende dalla quantità consumata della merce di paragone, rispettivamente nel primo e nel secondo gruppo di bilanci familiari. Introducendo queste espressioni nella (5, 3) e dividendo per $\log r_1(x) - \log r_2(x)$, si ottiene:

$$(5, 5) \quad \frac{\log w[r_1(x)] - \log w[r_2(x)]}{\log r_1(x) - \log r_2(x)} = \frac{\log \alpha_1 - \log \alpha_2}{\log r_1(x) - \log r_2(x)}.$$

Ma il primo membro della (5, 5) non è altro che una espressione della flessibilità media della moneta nell'intervallo di reddito da r_1 a r_2 .

In virtù della (2, 14), per un intervallo infinitesimo in prossimità del valore r del reddito, la flessibilità della moneta è quindi definita da:

$$\check{w}(r) = \frac{d \log w(r)}{d \log r}.$$

L'espressione:

$$(5, 6) \quad \check{w}(r_1, r_2) = \frac{\log w(r_1) - \log w(r_2)}{\log r_1 - \log r_2}$$

dà perciò una definizione plausibile della flessibilità media della moneta. Essa coincide col primo membro della (5, 5); la sola differenza sta in ciò: che nella definizione (5, 6) r_1 ed r_2 sono variabili indipendenti, mentre nella definizione (5, 5) le variazioni di r_1 ed r_2 sono determinate dal fatto che entrambe queste quantità dipendono da una e medesima variabile, cioè x . Introducendo nella (5, 5) la flessibilità $\check{w}(r_1, r_2)$, essa assume la forma:

$$(5, 7) \quad \check{w}(r_1, r_2) = \frac{\log \alpha_1 - \log \alpha_2}{\log r_1(x) - \log r_2(x)}.$$

Questa formula è valida per *qualsiasi* valore di x ; la sua forma consente di applicarla direttamente al materiale di bilanci familiari fornito dall'osservazione, purchè da questo possano essere dedotte informazioni sulle funzioni $r_1(x)$, $r_2(x)$ ed anche sulle costanti α_1 , α_2 . Per ogni intervallo di reddito (r_1, r_2) che può essere ricavato da due gruppi di bilanci familiari attribuendo ad x un determinato valore, la formula (5, 7) dà una determinazione della flessibilità media della moneta $\check{w}(r_1, r_2)$.

Se l'intervallo di reddito così determinato non è troppo ampio, questo valore della flessibilità media della moneta $\check{w}(r_1, r_2)$ può essere assunto come espressione approssimata della flessibilità $\check{w}(r)$, in un punto, cioè nel punto $r = \sqrt{r_1 r_2}$, dato dalla media logaritmica dell'intervallo. Nella maggior parte dei casi pratici questa approssimazione sarà sufficiente. Di regola non sarà di nessuna utilità lavorare con una approssimazione maggiore, perchè

l'errore che si commette ponendo, come si è detto, $\check{w}(r_1, r_2) = \check{w}(r)$ è molto minore di quello determinato da altri fattori, come le variazioni casuali o altre cause di perturbazione nel materiale. Quindi, se gli intervalli di reddito determinati facendo variare x ed osservando i valori $r_1(x)$, $r_2(x)$ che corrispondono ad ogni valore di x , non sono troppo ampi, otteniamo attraverso tale variazione di x un'ottima rappresentazione della forma della funzione di flessibilità $\check{w}(r)$ per quella parte della distribuzione dei redditi che è coperta dai dati relativi ai due gruppi di bilanci familiari esaminati.

Determinata che sia la funzione di flessibilità $\check{w}(r)$, è facile ricavare la funzione di utilità della moneta $w(r)$. Abbiamo:

$$(5, 8) \quad \log w(r) = \log w(r_0) - \int_{s=r_0}^r [-\check{w}(s)] d \log s.$$

Non ha importanza che nella (5, 8) la funzione \log venga interpretata come $\log \text{nat}$ o come \log_{10} , o che il \log sia preso in qualsiasi altro sistema. Ma in un caso reale, è ovvio che l'integrazione della (5, 8) dovrà essere effettuata numericamente. Poichè $\check{w}(r)$ è una quantità negativa, abbiamo, per convenienza, espresso la formula (5, 8) in termini di $[-\check{w}(r)]$. Il procedimento consistente nel determinare prima la curva di flessibilità direttamente dal materiale statistico e nel derivare la curva stessa di utilità della moneta indirettamente, attraverso la (5, 8), apparirà di regola il più conveniente in pratica, quando si usi il metodo di variazione della quantità.

In linea di principio, tuttavia, sarebbe stato possibile cercare di determinare direttamente la curva di utilità della moneta. Se gli intervalli di reddito (r_1, r_2) definiti dalla variazione di x sono molto ampi, il procedimento diretto presenterà anche un certo vantaggio perchè esso non implica l'approssimazione consistente nel sostituire $\check{w}(r_1, r_2)$ con $w(\sqrt{r_1 r_2})$. Per mostrar ciò direttamente, ritorniamo all'equazione (5, 3). Ponendo per brevità:

$$(5, 9) \quad \delta = \log \alpha_1 - \log_2 \alpha$$

l'equazione (5, 3) può essere scritta:

$$(5, 10) \quad \log w[r_1(x)] - \log w[r_2(x)] = \delta.$$

Consideriamo per un momento la (5, 10) come equazione funzionale mediante la quale sia definita la funzione $\log w(r)$. Vista sotto questo aspetto, essa acquista una certa rassomiglianza con una equazione alle differenze finite: consideriamo infatti come variabile indipendente r_1 invece che x . Allora r_2 diviene una funzione di r_1 che indichiamo con $r_2 = R(r_1)$. Il modo di definizione della $R(r_1)$ potrebbe essere presso a poco il seguente: si sceglie un certo valore di r_1 , si determina nel gruppo di bilanci familiari il valore di x che corrisponde a questo r_1 e si cerca successivamente quale reddito cor-

risponda a questo valore di x nel secondo gruppo di bilanci familiari. Questo ultimo valore è appunto r_2 e dal procedimento descritto risulta chiaro come esso sia funzione di r_1 .

Poichè r_1 è considerato ora come variabile indipendente, per brevità aboliremo l'indice; l'equazione (5, 10) assumerà così la forma:

$$(5, 11) \quad \log w(r) - \log w[R(r)] = \delta$$

dove r è la variabile indipendente ed $R(r)$, come abbiamo sopra illustrato, è una funzione esprime il reddito che nel secondo gruppo di bilanci familiari dà luogo allo stesso consumo di beni che il reddito r nel primo gruppo.

Se la funzione $R(r)$ fosse stata di un tipo particolarmente semplice, cioè:

$$(5, 12) \quad R(r) = r + k,$$

dove k è una costante, la (5, 11) sarebbe stata una vera equazione alle differenze del primo ordine nella funzione $\log w(r)$. La soluzione di questa equazione sarebbe stata ottenuta semplicemente partendo da un qualunque valore iniziale di r (per esempio r') attribuendo a $\log w(r')$ un valore arbitrario, ricavando $\log w(r' + k)$ come differenza tra $\log w(r')$ e la quantità nota δ , calcolando poi $\log w(r' + 2k)$ per sottrazione di δ da $\log w(r' + k)$, e così di seguito. Ciò avrebbe determinato la funzione $\log w(r)$ in una serie di punti *equidistanti* le cui ascisse differiscono l'una dall'altra di k unità; ma negli intervalli fra questi punti la funzione $\log w(r)$ non sarebbe determinata dall'equazione funzionale. O più precisamente, senza toccare l'equazione funzionale, avremmo potuto scegliere una forma arbitraria della funzione $\log w(r)$ in un intervallo di ampiezza k . Ciò fatto, il valore di $\log w(r)$ in qualsiasi altro punto, sarebbe stato univocamente determinato a mezzo dell'equazione funzionale. Senza dubbio l'indeterminazione a cui abbiamo accennato è soltanto teorica. In pratica si potrebbe imporre l'ulteriore condizione che $\log w(r)$ abbia un andamento *regolare e continuo*, e ciò eliminerebbe quasi completamente l'arbitrarietà della forma della funzione nell'intervallo di ampiezza k , purchè soltanto k sia sufficientemente piccolo. La sola arbitrarietà sarebbe quindi nella scelta del valore di $\log w(r)$ nel punto iniziale r' .

Se $R(r)$ non è la funzione lineare semplice (5, 12), i punti nei quali i valori di $\log w(r)$ sono determinati a mezzo dell'equazione funzionale (5, 11) non sono più equidistanti; ma, quanto al resto, il procedimento di risoluzione dell'equazione funzionale rimane nella sostanza immutato: si sceglie prima un punto iniziale di ascissa r' e si attribuisce a $\log w(r')$ un valore arbitrario. Si passa poi al nuovo punto di ascissa $r'' = R(r')$ cioè si trova il reddito r'' che nel secondo gruppo di bilanci familiari dà luogo allo stesso consumo di beni che il reddito r' nel primo gruppo. Dalla equazione funzionale (5, 11) sappiamo che nel punto avente questa nuova ascissa $\log w(r)$ dovrà differire in meno, di δ dal valore che ha nel punto di ascissa r' ; dovrà essere cioè:

$\log w(r'') = \log w(r') - \delta$. Da r'' passiamo al successivo punto di ascissa $r''' = R(r'')$, cioè consideriamo r'' come un reddito del primo gruppo di bilanci familiari e chiediamo quale sia il reddito r''' del secondo gruppo che dà luogo in questo allo stesso consumo di merci che r'' nel primo gruppo.

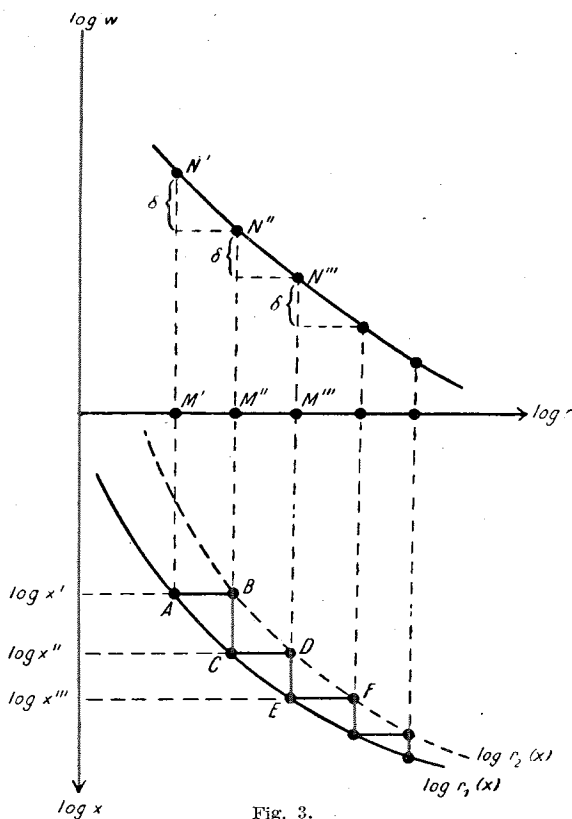


Fig. 3.

Essendo così determinato il punto di ascissa r''' , il valore della funzione $\log w(r)$ in questo punto è, per l'equazione funzionale,

$$\log w(r''') = \log w(r'') - \delta = \log w(r') - 2\delta.$$

Potremmo così continuare e determinare una serie di punti $r^{(n)}$ in ciascuno dei quali il valore della funzione $\log w(r)$ sarebbe dato da:

$$(5, 13) \quad \log w(r^{(n)}) = \log w(r') - (n - 1)\delta.$$

Del procedimento è data una rappresentazione grafica nella fig. 3. La prima cosa da fare è quella di segnare in un sistema di assi coordinati ($\log x$, $\log r$) i punti osservati della curva di quantità e reddito per il primo

gruppo di bilanci familiari (cioè per il materiale di osservazione per cui $\alpha = \alpha_1$). Tali punti dovrebbero essere perequati preferibilmente con una perequazione grafica, in modo da ottenere una curva continua. Nel procedimento di perequazione non dovrebbero essere introdotte formule analitiche. Sia la $A C E \dots$ della fig. 3 la curva tracciata. Per comodità, l'asse $\log x$ in questa figura è preso verticalmente e col verso positivo rivolto in basso. Analogamente dovrà essere tracciata la curva di quantità e reddito per il secondo gruppo di bilanci familiari. Sia essa la $B D F \dots$ della fig. 3, nella quale è raffigurata una situazione plausibile quando sia $\alpha_1 > \alpha_2$.

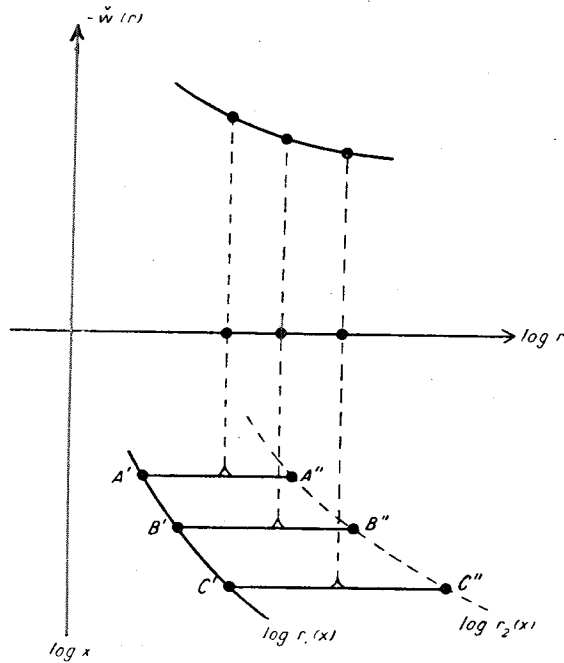


Fig. 4.

Ciò fatto, occorre scegliere un punto iniziale $\log x'$ sull'asse $\log x$ e tracciare la linea a zig-zag $A B C D E F \dots$. I segmenti $A B, C D, \dots$ sono tratti di rette orizzontali; ed i segmenti $B C, D E \dots$ sono tratti di rette verticali. La costruzione della curva di utilità marginale della moneta in base ai punti determinati dalla linea a zig-zag può essere fatta al modo seguente.

Il punto A (in cui la quantità consumata è x') è assunto come punto di partenza. Segnamo il punto corrispondente M' sull'asse delle ascisse e fissiamo per un punto della curva $\log w$, una ordinata iniziale arbitraria $M'N'$. L'asse $\log w$ è tracciato verticalmente e col verso positivo rivolto in alto. Viene così ad essere fissato il punto N' sulla curva $\log w$. Ritorniamo ora al punto A e muoviamoci da A a B segnando sull'asse delle ascisse il punto M''

corrispondente a B . Durante il movimento da A a B , x si è mantenuto costantemente eguale ad x' . Poichè A rappresenta un punto sulla curva $r_1(x)$, e B un punto sulla curva $r_2(x)$, la differenza tra i corrispondenti valori dell'ordinata $\log w$ è, per la (5, 11) eguale alla costante δ . Il punto N'' sulla curva $\log w$ è così determinato. Muoviamoci poi da B a C , cioè troviamo quale valore x sulla curva $r_1(x)$ corrisponda al valore x' sulla curva $r_2(x)$; sia x'' questo nuovo valore di x . Muovendoci ora da C a D otteniamo sull'asse delle ascisse il punto M''' ; la variazione dell'ordinata $\log w$ quando $\log r$ si muove da M'' a M''' , è ancora eguale alla costante δ , considerazione questa, che conduce a stabilire il punto N''' sulla curva $\log w$. Così continuando si possono determinare tanti punti della curva $\log w$ quanti sono i vertici della linea a zig-zag tra le curve $\log r_1$ e $\log r_2$.

Della determinazione della flessibilità basata sulla equazione (5, 7) può essere data anche una interpretazione geometrica. Basta tracciare una serie di rette orizzontali $A A'$, $B B'$..., come è indicato nella fig. 4. Misuriamo sulla prima di esse la distanza orizzontale tra i punti A' ed A'' in cui la retta interseca le curve $\log r_1(x)$, $\log r_2(x)$; dividiamo δ per tale valore e , a partire dall'asse delle ascisse, riportiamo il rapporto ottenuto sulla verticale tracciata per il punto medio del segmento $A' A''$. Ciò fornisce un punto della curva di flessibilità — $\check{w}(r)$. Su questa curva non vi sono elementi arbitrari da scegliere perchè la flessibilità è un puro numero, determinato unicamente sulla base di dati statistici. Analogamente, il valore del rapporto tra δ e la lunghezza $B' B''$, riportato a partire dall'asse delle ascisse sulla verticale tracciata per il punto medio del segmento $B' B''$, fornirà un secondo punto della curva di flessibilità. E così di seguito. Questa specie di costruzione potrebbe essere eseguita anche se le due curve $\log r_1(x)$, $\log r_2(x)$ fossero tali che nessun vertice della linea a zig-zag cadesse entro il campo di osservazione.

VI. — IL METODO DI TRASLAZIONE

Il metodo di variazione della quantità, descritto nel Capitolo V, dà il modo di costruire la curva di utilità della moneta quando siano note due curve di quantità di vitto (o due altre curve di quantità di merci) corrispondenti a due valori di α (supposti distinti). Di regola le curve di quantità di vitto non sono date direttamente nel materiale statistico relativo ai bilanci familiari. Sono date invece le curve esprimenti la spesa per il vitto, cioè le curve esprimenti il rapporto tra la spesa per il vitto ξ ed il reddito nominale ρ . Ma le curve della quantità di vitto possono essere ricavate, se si conoscono nel materiale afferente al primo gruppo di bilanci familiari, il prezzo del vitto p ed il prezzo della vita P i quali corrispondono a questi medesimi valori nel materiale relativo al secondo gruppo, di bilanci. Per convenzione, i valori di p e di P per il materiale afferente al secondo gruppo di bilanci, possono essere presi eguali all'unità; sarà quindi necessario avere soltanto i valori di p e di P per il materiale afferente al primo gruppo di bilanci. Se in questo p e P sono dati, dobbiamo semplicemente — in ogni punto della curva di spesa per il vitto — dividere la coordinata ξ per p e la coordinata ρ per P . La curva così ottenuta è la curva della quantità di vitto nel materiale afferente al primo gruppo di bilanci, cioè la curva che dà la relazione tra x ed r in questo materiale. Se nel materiale afferente al secondo gruppo di bilanci p e P sono fatti eguali all'unità, la curva della quantità di vitto viene ad identificarsi con la curva della spesa per il vitto. Note che siano le due curve di quantità di vitto, la curva della utilità della moneta può essere costruita in base ad esse secondo il metodo esposto nel Capitolo V.

Considereremo ora la situazione che si verifica quando non si hanno a disposizione dati riguardanti i prezzi p e P . In questo caso le curve di quantità di vitto sono ignote, ma sono note le curve di spesa per vitto. Scopo della discussione di questo capitolo è di mostrare come, dalla conoscenza della forma delle curve date di spesa per vitto, sia possibile dedurre elementi che consentono di trarre conclusioni sui prezzi p e P e di ottenere così i dati necessari per determinare la curva di utilità della moneta. Per ragioni che appariranno chiare fra un momento, questo metodo sarà chiamato *metodo di traslazione* per la misura dell'utilità.

Ogni curva di quantità di vitto rappresenta un determinato valore di α che domina sulla piazza in questione. Qui e nel seguito parleremo di « piazze » alle quali si riferisce il materiale dato, relativo ai bilanci. Ma le stesse considerazioni possono naturalmente essere applicate altrettanto bene nel caso che alle variazioni nello spazio si sostituiscano variazioni nel tempo. Due piazze per le quali il valore di α è il medesimo, dovrebbero avere anche le medesime curve di quantità di vitto, nell'ipotesi che le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$

siano per entrambe le stesse. Ed una delle ipotesi che sono alla base del presente tentativo di misura dell'utilità è appunto che le funzioni $w(r)$ ed $u(x)$ siano le medesime per tutte le piazze considerate. Può darsi che l'intervallo al quale si riferiscono le curve di quantità di vitto sia differente nelle due piazze, sicchè una delle due curve sporga al di fuori dell'altra, anche se esse si riferiscono al medesimo valore di α . Ma nell'intervallo in cui le due curve si trovano l'una sull'altra, esse debbono essere identiche. Va notato che soltanto le due curve di *quantità* di vitto divengono identiche in due piazze alle quali corrisponde il medesimo valore di α , mentre questa circostanza non importa necessariamente che siano identiche le curve di

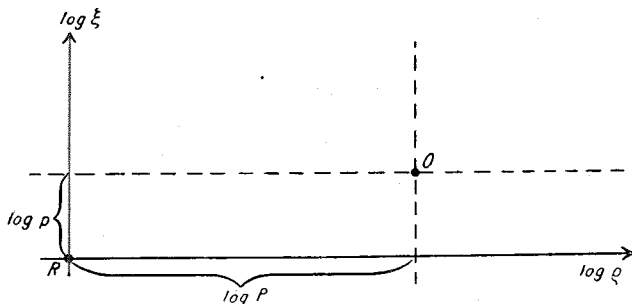


Fig. 5.

spesa per vitto. Ma se p e P , separatamente considerati, sono eguali nelle due piazze, allora divengono identiche anche le due curve di spesa.

Dal modo in cui le curve di quantità di vitto sono dedotte dalle curve di spesa per vitto segue che, se tutte le curve fossero tracciate in scala logaritmica, per ciascuna piazza, la curva ignota della quantità di vitto, sarebbe identica, *quanto alla forma*, alla curva nota della spesa per vitto. La differenza sarebbe costituita soltanto da una *traslazione*. In fatto, sul diagramma logaritmico la curva di quantità è ottenuta semplicemente muovendo la curva di spesa per un certo tratto, eguale a $\log p$, nel senso negativo dell'asse ξ ; e per un certo tratto, eguale a $\log P$, nel senso negativo dell'asse ρ . Una tale traslazione può essere considerata come una traslazione *rispetto* ad una posizione base arbitrariamente scelta, che rimane fissa. Le coordinate $(-\log P, -\log p)$ della traslazione considerata possono essere rappresentate graficamente, come nella fig. 5.

Supponiamo che le rette tratteggiate della fig. 5 rappresentino gli assi della posizione base, e le linee a tracciato continuo rappresentino gli assi della posizione raggiunta con la traslazione. L'origine di questa posizione, che coincideva prima con l'origine O della posizione base, viene a trovarsi, a traslazione compiuta, in un punto R che può appartenere ad uno qualsiasi dei quattro quadranti intorno ad O . Le posizioni relative di O e di R danno una indicazione sui valori di $\log P$, $\log p$. Sotto questo rapporto, è molto

conveniente considerare O come un punto nel sistema di riferimento della posizione traslata R . I due valori $\log p$ e $\log P$ sono semplicemente l'ordinata e l'ascissa dell'origine O della posizione base considerata come un punto nel sistema di riferimento della posizione traslata R . Nell'esempio dato nella fig. 5 la situazione è tale che tanto $\log p$ quanto $\log P$ sono positivi.

Vediamo così che il problema che ci siamo proposto può essere formulato nei termini seguenti. Le curve di spesa per il vitto (in scala logaritmica) per due o più situazioni di bilanci familiari («piazze»), sono note. Per convenzione, possiamo considerare una di queste curve come una curva di quantità di vitto. Quali sono le componenti ($-\log P$, $-\log p$) della traslazione che deve essere compiuta sulle altre curve di spesa per trasformarle in curve di quantità? Passeremo ora alla discussione di questo problema.

Il primo principio della latitudine.

Supponiamo, date diverse curve di spesa, ciascuna relativa ad una determinata piazza (cioè ad una determinata situazione di prezzi); vi sono alcune qualità intrinseche di esse che consentono di fare delle induzioni circa la traslazione necessaria per trasformarle in curve di quantità. Una di queste qualità è, ad esempio, che le curve (a traslazione compiuta) non debbono avere fra loro punti di intersezione, il che è una semplice conseguenza del fatto che le curve di quantità sono linee al contorno della superficie di consumo. Questa proprietà offre una informazione utile, ma — come è naturale — non è per sè stessa sufficiente a condurre alla determinazione univoca della traslazione che ciascuna delle curve di spesa deve subire; determinazione alla quale si può giungere però attraverso una considerazione più approfondita della proprietà della superficie di consumo, ossia di altre proprietà intrinseche delle curve di quantità di vitto.

Per stabilire tali proprietà ci varremo di una rappresentazione grafica. Nella fig. 6, R è l'origine della posizione traslata (cioè il punto R rappresenta la particolare spesa $\log \xi = 0$ ed il particolare reddito $\log \rho = 0$, in questa situazione di bilancio). Invece di tracciare soltanto un asse orizzontale ed un asse verticale, tracciamo un intero quadrato con le sue diagonali e riferiamolo alla piazza considerata: è il quadrato a tracciato continuo della fig. 6. Chiameremo *diagonale longitudinale* quella che va dal vertice in basso a sinistra al vertice in alto a destra, e daremo invece il nome di *diagonale di latitudine* a quella che va dal vertice in alto a sinistra al vertice in basso a destra. Questa forma del sistema di riferimento aiuta ad interpretare il diagramma quando le traslazioni siano compiute. Il diagramma della posizione traslata, cioè il diagramma la cui origine è nel punto R , sarà chiamato per brevità, diagramma R .

Nella fig. 6 sono tracciati sia il sistema di riferimento del diagramma R , sia il sistema di riferimento del diagramma della posizione base; questo ultimo con tracciato tratteggiato. A traslazione compiuta la diagonale di

longitudine del diagramma R sarà in generale spostata in confronto della diagonale di longitudine del diagramma nella posizione base. Lo spostamento può essere misurato lungo la diagonale di latitudine del diagramma R : nella fig. 6 esso è indicato con m . A questa lunghezza possiamo attribuire il nome e il significato di *latitudine* del diagramma R in confronto del diagramma della posizione base. Essa è contata positivamente o negativamente secondo che

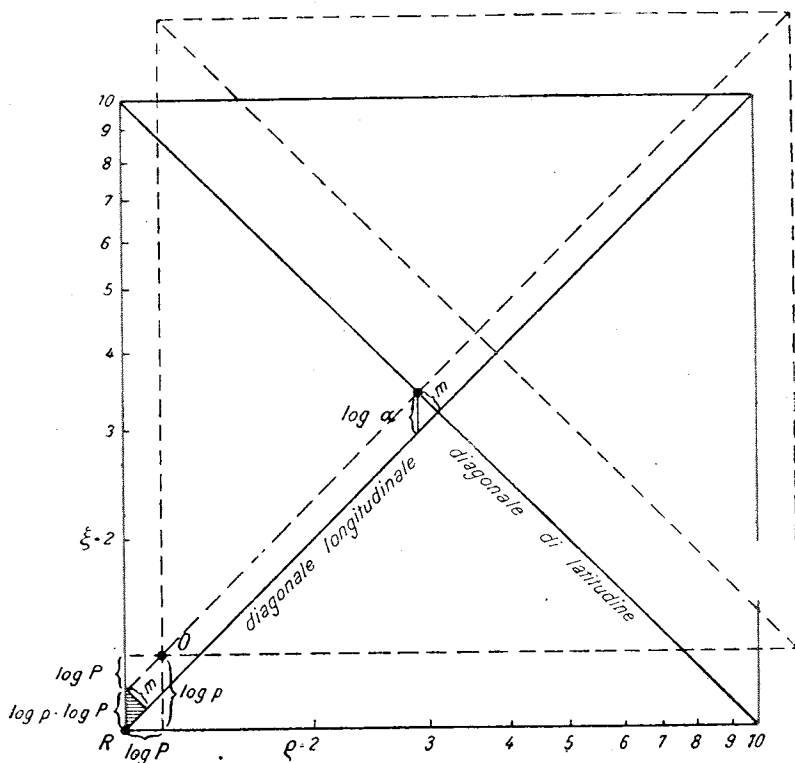


Fig. 6.

la diagonale di longitudine della posizione conseguente alla traslazione si trova al disopra o al disotto della diagonale di longitudine della posizione base. Nella situazione indicata dalla fig. 6, m è negativo. Considerando nella figura il triangoletto tratteggiato, si è condotti a stabilire la relazione:

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\log P - \log p),$$

la $\sqrt{2}$ essendo presa col segno positivo. Si ha cioè:

$$(6, 1) \quad \log \alpha = \sqrt{2} m.$$

Questa relazione esprime che la latitudine m è proporzionale alla differenza di *altitudine* tra la posizione base e la posizione a traslazione avvenuta, nell'ipotesi che la superficie di consumo sia rappresentata in un sistema logaritmico nel quale le ordinate siano i valori di $\log \alpha$.

Essa esprime in particolare che qualsiasi spostamento del diagramma R lungo la sua diagonale di longitudine significa un aumento (o una dimi-

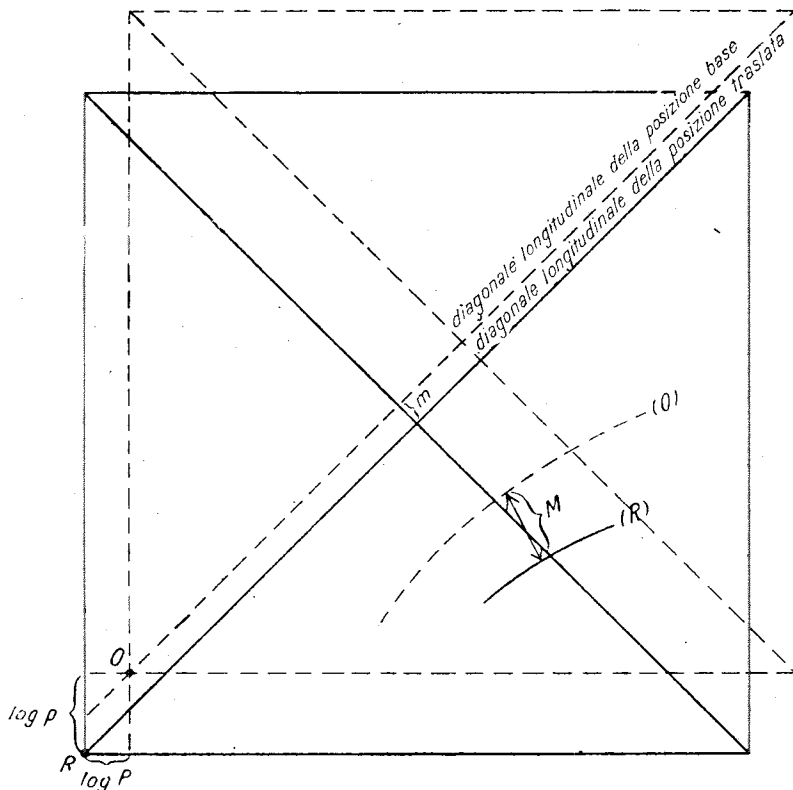


Fig. 7.

nuzione) simultaneo e proporzionale sia del prezzo del vitto che del prezzo della vita, cioè un mutamento di situazione che non altera il rapporto tra il prezzo del vitto ed il prezzo della vita. Una variazione nel valore di tale rapporto è invece indicata da uno spostamento ortogonale alla diagonale di longitudine; e, più esattamente, la misura di essa è data dalla lunghezza di m .

Esiste dunque una relazione semplice e definita tra la distanza « a pelo d'acqua » che il diagramma R ha percorso durante la traslazione e l'*altitudine* α relativa alla posizione finale di esso. In virtù di questa proprietà avremo, a traslazione compiuta, una situazione simile a quella indicata nella fig. 7.

Questa offre la rappresentazione di una situazione realmente osservata nel materiale di bilanci studiato: presenta un confronto fra la città di Detroit (posizione R nella figura) e la città di S. Francisco, che funge da posizione base. Secondo, il principio qui considerato, *se la diagonale di longitudine della posizione R si trova al disotto della diagonale di longitudine della posizione base, la curva del vitto della posizione R deve pure trovarsi al disotto della curva del vitto della posizione base*, e viceversa. In fatto, come abbiamo visto, se m ha un valore negativo, $\log \alpha$ deve avere corrispondentemente un valore negativo: cioè, il prezzo relativo del vitto deve essere più elevato nella posizione R che nella posizione base. E se il prezzo relativo del vitto *si eleva*, si deve avere in corrispondenza un *abbassamento* della curva della quantità di vitto, e viceversa. Indicheremo questo col nome di *primo principio della latitudine*.

Il secondo principio della latitudine.

Se le curve (O), (R) della fig. 7 non sono troppo distanziate l'una dall'altra, si può ammettere in prima approssimazione che la differenza di altitudine, $\log \alpha$, sia misurata dalla *distanza* fra esse. Definiamo una misura della *distanza* fra le due curve, ad esempio, tracciando a mano libera un segmento approssimativamente perpendicolare ad entrambe in una posizione abbastanza vicina al punto medio di esse (ad esempio, il segmento M della fig. 7), e giudichiamo ad occhio della lunghezza di M . Momentaneamente non ci occorre per la distanza fra le due curve (O), (R) una definizione più precisa. Ci riferiremo a questa definizione approssimata di distanza indicandola col nome di *distanza stimata* fra le due curve.

Introducendo questo concetto possiamo stabilire la regola seguente. Date tre o più curve di spesa per il vitto, la traslazione da applicarsi ad esse per dedurne le curve di quantità di vitto dovrebbe essere tale che, ad operazione compiuta, le distanze stimate fra esse siano approssimativamente proporzionali alle distanze ortogonali fra le loro diagonali di longitudine. In altre parole: i valori m dovranno essere proporzionali ai valori M . Daremo a questo principio il nome di *secondo principio della latitudine*. I due primi principii della latitudine insieme col criterio che due curve di quantità di vitto non debbono mai intersecarsi, offrono già un mezzo per fare *grosso modo* una valutazione di ciò che la traslazione sarà. Il procedimento è il seguente: scelta una delle posizioni come posizione base, le altre posizioni vengono disposte in modo che l'ordine di successione delle diverse piazze risulti lo stesso tanto se si considerano le relative diagonali di longitudine, quanto se si tien conto delle curve del vitto medesime; la disposizione delle curve deve inoltre esser tale che nessuna di esse intersechi una qualsiasi delle altre. Ciò fatto, la traslazione viene effettuata in modo che le distanze m tra le diagonali di longitudine divengano presso a poco proporzionali alle distanze stimate M fra le curve medesime.

Il terzo principio della latitudine.

La traslazione può ora essere ulteriormente corretta nel modo seguente: supponiamo di avere tre curve del vitto, (A), (B), (C), che abbiano subita la traslazione in conformità del primo e del secondo principio della latitudine. La situazione sia quella indicata nella fig. 8. Tracciamo allora una serie di normali a quella delle tre curve che occupa la posizione intermedia fra le

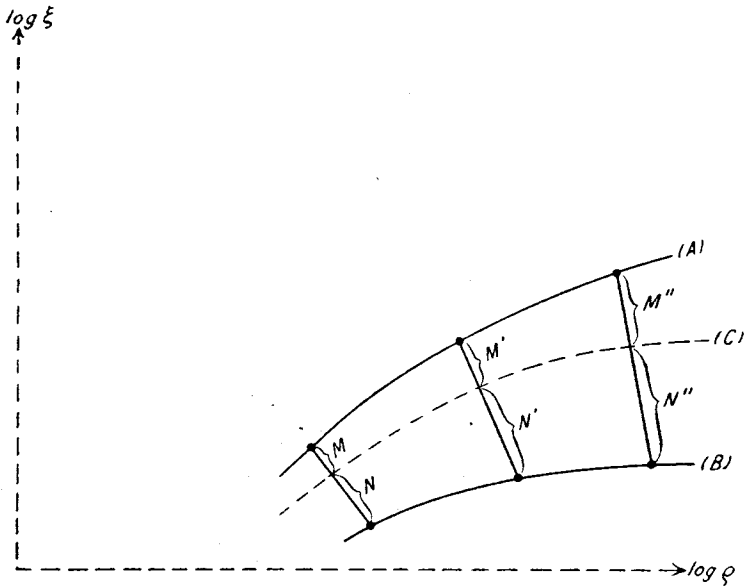


Fig. 8.

due altre. Nella fig. 8 la curva centrale è la (C); sono tracciate tre normali a questa e sono indicati con M ed N , M' ed N' , M'' ed N'' i segmenti di esse che giacciono tra (A) e (C) e tra (C) e (B) rispettivamente. Uno qualsiasi dei rapporti M/N , M'/N' , M''/N'' potrebbe essere considerato come espressione approssimata del rapporto tra l'altitudine di (A) e l'altitudine di (B) entrambe misurate dalla posizione (C). Ciò significa che i rapporti M/N , M'/N' ,... dovrebbero essere approssimativamente eguali fra loro. Di più, il valore comune di questi rapporti dovrebbe essere eguale al rapporto tra la latitudine di (A) e la latitudine di (B) (misurate entrambe a partire dalla diagonale di longitudine della posizione centrale). Avremo in questo un terzo criterio per il giudizio della correttezza delle traslazioni effettuate, che chiameremo *terzo principio della latitudine*.

In pratica le curve del vitto si sono evolute in modo da essere notevolmente diverse da rette inclinate di 45° . Il principio qui discusso offre quindi

un valido mezzo per determinare le traslazioni che le curve debbono subire. Nella maggior parte dei casi pratici non si dimostrerà probabilmente necessario di spingere la precisione oltre questo limite. In linea teorica è tuttavia possibile andare ancora oltre, ed anche determinare le traslazioni in modo preciso in base al principio seguente.

Principio della flessibilità.

Supponiamo nota la curva del vitto per una data città (A), e confrontiamola con la curva del vitto della posizione base (O), come è indicato nella fig. 9. A traslazione compiuta, dovremo considerare tanto (A) quanto (O) come curve tracciate nel medesimo sistema di riferimento, cioè nel sistema di riferimento della posizione base. Dovremo considerare ancora l'asse orizzontale come asse del reddito r (o piuttosto come asse di $\log r$), e l'asse verticale come asse della quantità di vitto x (o piuttosto come asse di $\log x$). Gli assi orizzontale e verticale del sistema (A) hanno significato soltanto in rapporto alla curva (A) per la quale rappresentano rispettivamente il reddito *nominale* in dollari e la spesa nominale per vitto in dollari.

Come è indicato nella fig. 9, sia m la latitudine del diagramma R . In conseguenza della (6, 1), il segmento verticale δ sarà: $\delta = \log \alpha$. Sia ancora A un segmento orizzontale qualunque tra la curva della posizione base e la curva (A). Il rapporto δ/A può essere assunto come espressione della flessibilità media della curva di utilità marginale della moneta nell'intervallo di reddito rappresentato dal segmento A . In simboli avremo cioè:

$$(6, 2) \quad \check{w}(A) = \frac{\delta}{A}.$$

Ciò segue semplicemente dalla teoria del metodo di variazione della quantità; basta confrontare in particolare la relazione (5, 7). La (6, 2) fornisce un mezzo assai conveniente per ottenere delle determinazioni della flessibilità della moneta attraverso l'interpretazione di grafici del tipo della fig. 9. Se è necessario tener conto del segno dei valori δ e A ricavati dal grafico, dobbiamo considerare il segmento A come differenza tra l'ascissa del suo punto estremo su (A) e l'ascissa del suo punto estremo su (O); e analogamente, dobbiamo considerare δ come ordinata del suo punto estremo sulla diagonale di longitudine di (A) diminuita dell'ordinata del suo punto estremo sulla diagonale di longitudine di (O). Ciò condurrà sempre a valori negativi per $\check{w}(A)$, purché sia valido il primo principio della latitudine. In pratica quindi non è necessario tener conto del segno; basta misurare δ ed A come semplici lunghezze e prendere il loro rapporto come espressione di ($-\check{w}$).

Se la lunghezza di A non è troppo grande, possiamo assumere il rapporto δ/A come espressione della flessibilità *puntuale* della moneta nel punto medio S di A . I valori approssimati della flessibilità della moneta in altri punti, come

i punti S' ed S'' della fig. 9, potrebbero essere forniti ordinatamente dai valori dei rapporti δ/A' , δ/A'' , dove A' ed A'' indicano le lunghezze di segmenti di rette orizzontali compresi fra le curve (O) ed (A) , ed S' , S'' , ... sono le ascisse dei punti medi di essi. Un procedimento di questo genere permette di ricavare la flessibilità della moneta $\tilde{w}(r)$ come funzione di r .

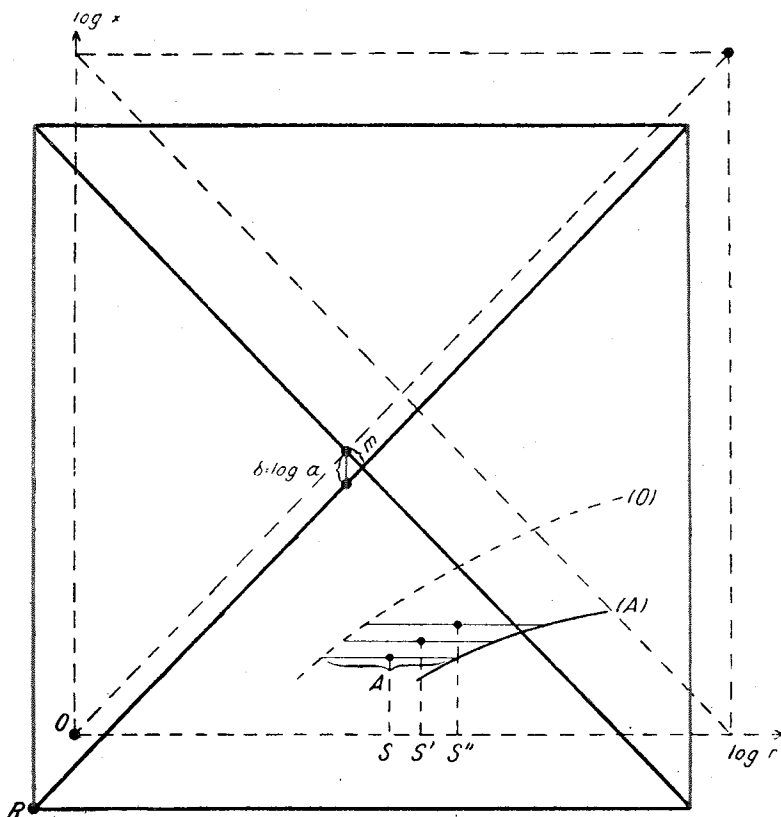


Fig. 9.

Così, date due curve del vitto, (A) e (B) , oltre la curva (O) della posizione base, siamo in grado di dedurre due curve rappresentanti la flessibilità della moneta come funzione di r . Queste due curve debbono essere identiche; e ciò fornisce un'altra condizione, ancora più precisa, alla quale le traslazioni di (A) e (B) debbono soddisfare, e che può essere utilizzata tanto con un procedimento grafico quanto con un procedimento numerico, quando si ricorra al metodo dei minimi quadrati. Di quest'ultimo caso diamo una illustrazione qui di seguito. Il procedimento grafico può essere più utilmente applicato con traslazioni a mano libera e con l'aiuto di valutazioni della flessibilità dedotte con calcoli di proporzionalità.

Per tutti i processi di traslazione considerati qui e nei paragrafi precedenti, le curve debbono essere tracciate su carta da disegno leggera e poste su una tavola da disegno di vetro fortemente illuminata dalla parte inferiore. Con l'aiuto di un simile accorgimento, parecchie curve (da 10 a 15) possono essere confrontate nel medesimo tempo. La perequazione simultanea a mano libera di una tal serie di curve, compiuta in armonia coi principii esposti, ha dato in pratica risultati molto soddisfacenti.

Perfezionamento della traslazione a mano libera con l'applicazione del metodo dei minimi quadrati.

Passiamo ora a dimostrare come il principio della flessibilità possa essere utilizzato attraverso un metodo numerico per il perfezionamento finale della traslazione. Supponiamo date due curve di vitto (A) e (B), oltre la curva del vitto nella posizione base, ed ammettiamo che la traslazione a mano libera sia stata compiuta in modo da rendere la posizione delle curve il più possibile conforme ai principii sopra enunciati. A traslazione compiuta, tale posizione sia, ad esempio, quella indicata dalla fig. 10.

Tracciamo allora una curva (a) che si trovi a mezza strada tra (A) e la curva base, la distanza essendo misurata sulla orizzontale. Più precisamente la curva (a) sia tale che i due segmenti contigui intersecati su una retta orizzontale dalla curva (A), da essa e dalla curva base, risultino eguali. Analogamente tracciamo una curva (b) che si trovi a mezza strada tra la curva base e (B), la distanza essendo sempre misurata sulla orizzontale.

Conduciamo poi un certo numero di segmenti verticali tra (a) e (b). Nella fig. 10 sono tracciate tre di tali verticali, indicate rispettivamente coi numeri 1, 2, 3. Gli estremi superiori dei segmenti si trovano sulla curva (a), gli estremi inferiori sulla curva (b). Consideriamo in particolare il segmento verticale indicato col n. 1. Per l'estremo superiore di esso tracciamo un segmento orizzontale compreso tra (A) e la curva base; e per l'estremo inferiore tracciamo un secondo segmento orizzontale compreso tra la curva base e (B). I due segmenti orizzontali così tracciati dovrebbero essere considerati come costituenti una coppia di segmenti orizzontali connessi a mezzo della verticale n. 1. Allo stesso modo tracciamo una coppia di segmenti orizzontali connessi a mezzo della verticale n. 2, ecc. Otteniamo in questo modo due serie di quantità corrispondenti, cioè le serie delle lunghezze A e B dei segmenti orizzontali condotti rispettivamente per gli estremi superiori ed inferiori dei segmenti verticali 1, 2, 3...

Consideriamo ora i due valori:

$$A' = \frac{A}{\log p - \log P}$$

$$B' = \frac{B}{\log q - \log Q}$$

dove $\log p$, $\log P$, $\log q$, $\log Q$ sono le componenti della traslazione a mano libera già eseguita su (A) e (B) rispettivamente per portare queste curve nelle posizioni indicate dalla fig. 10. Poichè le curve di flessibilità della moneta ottenute associando rispettivamente (A) e (B) con la curva base dovrebbero essere identiche, i due valori A' e B' dovrebbero essere *eguali* identicamente in $\log r$, cioè in tutti i punti dell'asse delle ascisse definiti dalle verticali 1, 2, 3... della fig. 10. In realtà tuttavia, tali valori non possono essere assolutamente

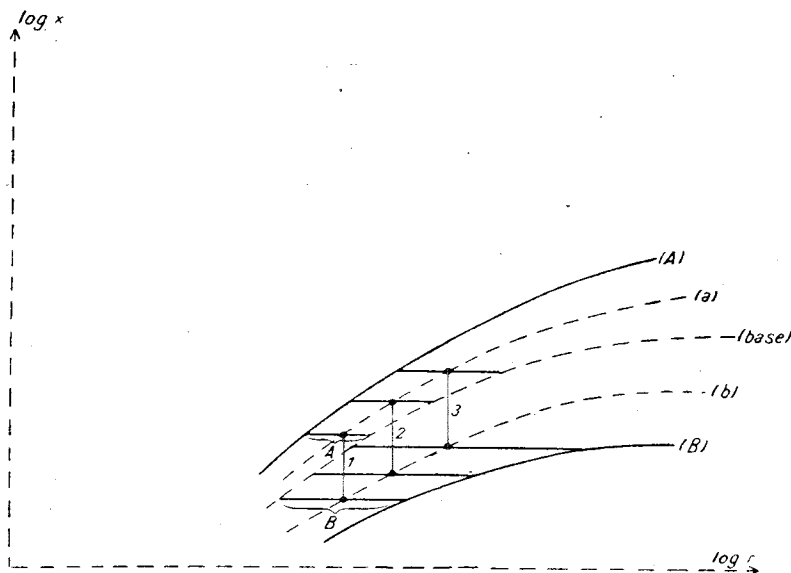


Fig. 10.

eguali in qualunque punto, e parte delle differenze potrebbe essere imputata al fatto che la traslazione non è stata compiuta in modo rigoroso.

Si presenta quindi naturalmente l'idea di estendere la sommazione:

$$(6, 3) \quad f = \Sigma (A' - B')^2$$

ad una serie di punti dell'asse delle ascisse (cioè ad una serie di verticali 1, 2, 3, ...) e di rendere minima questa espressione considerandola come funzione dei quattro parametri $\log p$, $\log P$, $\log q$, $\log Q$. Poichè possiamo ammettere di conoscere questi quattro parametri approssimativamente, cioè attraverso la traslazione a mano libera, sarà più conveniente determinare i loro valori finali con una serie di correzioni eseguite in base al procedimento seguente.

Determiniamo prima numericamente le derivate parziali di f rispetto ai quattro parametri in vicinanza dei valori approssimati che sono stati adottati per questi. Facciamo poi una serie di spostamenti di prova, tutti nella dire-

zione negativa del gradiente di f , e calcoliamo in ciascuno dei punti ottenuti il valore di f definito dalla (6, 3). Rappresentiamo f come funzione della lunghezza dello spostamento e determiniamo graficamente la misura dello spostamento stesso, che rende minima la f . Consideriamo il punto così determinato come valore esatto di un punto di minimo di f .

In pratica il lavoro potrebbe essere disposto secondo lo schema seguente:

Numero dell'osservazione	A	B	A'	B'	$A' - B'$	$(A' - B')^2$
1						
2						
.						
.						
Somma			$\Sigma A'$	$\Sigma B'$	$\Sigma (A' - B')$	$\Sigma (A' - B')^2$

Allo scopo di controllare il calcolo dovremmo effettuare tutte e quattro le somme indicate. Calcolata la $f = \Sigma (A' - B')^2$, scegliamo un numero h_p piccolo in confronto dello spostamento $\log p$ usato nella traslazione a mano libera precedentemente effettuata. Prendiamo ora la curva (A) nella posizione in cui la traslazione l'ha portata e spostiamola verticalmente della quantità h_p . In altre parole, consideriamo la curva (A) ottenuta facendo subire alla curva originale lo spostamento $\log p + h_p$ invece che lo spostamento $\log p$, mentre conserviamo invariato nella misura $\log P$ lo spostamento orizzontale di questa curva e conserviamo invariati nelle misure $\log q$, $\log Q$ rispettivamente gli spostamenti della curva (B). Ripetiamo per la posizione (A) il calcolo del valore definito dalla (6, 3) ed indichiamo con f_p il nuovo valore ovvenuto.

Riportiamo la curva (A) nella posizione in cui l'ha condotta la traslazione a mano libera e facciamole subire ora uno spostamento *orizzontale* del valore h_p . In altri termini: consideriamo insieme la curva (A) ottenuta dalla curva originale mediante uno spostamento orizzontale $\log P + h_p$ ed uno spostamento verticale $\log p$ e la curva (B) i cui spostamenti verticale e orizzontale, dalla curva originale, sono ancora $\log q$, $\log Q$. Sia f_p il valore (6, 3) per questa situazione.

Riportiamo ora la curva (A) nella posizione ($\log p$, $\log P$), e consideriamo la posizione ($\log q + h_q$, $\log Q$) della curva (B), h_q essendo un piccolo spostamento verticale; indichiamo con f_q il valore della (6, 3) in questa situazione. Sia infine f_q il valore della (6, 3) quando la curva (A) è nella posizione ($\log p$, $\log P$) e la curva (B) è nella posizione ($\log q$, $\log Q + h_q$), h_q essendo un piccolo spostamento orizzontale.

Calcolati così i quattro valori f_p, f_P, f_q, f_Q , consideriamo lo spostamento composto:

$$(6, 4) \quad \log p + H_p, \log P + H_P, \log q + H_q, \log Q + H_Q$$

dove:

$$(6, 5) \quad \begin{aligned} H_p &= \frac{h \cdot (f_p - f)}{h_p} \\ H_P &= \frac{h \cdot (f_P - f)}{h_P} \\ H_q &= \frac{h \cdot (f_q - f)}{h_q} \\ H_Q &= \frac{h \cdot (f_Q - f)}{h_Q} \end{aligned}$$

ed h è una piccola quantità negativa. La quantità f definita dalla (6, 3) dovrebbe essere computata per una serie di valori distinti di h (e coi valori fissati di $f_p, f_P, \dots, h_p, h_P, \dots$), dovrebbe essere tracciata la corrispondente curva piana avente per ascisse i valori di h e per ordinate i valori di f , e dovrebbe essere scelto il valore di h al quale corrisponde sulla curva il valore minimo di f . Si può ritenere che gli spostamenti definiti dalla (6, 4) diano per questo valore di h una traslazione corretta. Se è necessario, il punto così corretto può essere assunto come nuovo punto di partenza, l'intero procedimento può essere ripetuto per ottenere per il minimo di f un valore anche più approssimato.

Deve essere rilevato che la precedente applicazione del principio dei minimi quadrati *non implica l'uso di alcuna formula antecedentemente stabilita* della quale debbano essere calcolati i parametri. Inoltre, il procedimento può essere applicato non soltanto al presente problema di traslazione, ma a qualsiasi problema con più variabili nel quale la determinazione del minimo sia fatta col metodo dei minimi quadrati.

Riassunto dei procedimenti tecnici che il metodo di traslazione comporta.

1° Ridurre le cifre del reddito e della spesa per vitto ad una base individuale, come sarà indicato nel successivo Cap. VII. Tracciare la curva di spesa per il vitto per ciascuna piazza, usando la scala logaritmica sia per l'asse del reddito che per l'asse del vitto;

2° perequare queste curve ciascuna indipendentemente dalle altre. Potrà essere generalmente usato col maggior vantaggio il metodo di perequazione grafica. Evitare la perequazione analitica basata su formule specifiche, con parametri che debbano essere determinati;

3° riportare le curve perequate su carta da disegno leggera, ciascuna su un foglio distinto. Segnare su ciascun foglio il sistema di riferimento, tracciando non soltanto i due assi, ma un intero quadrato con le sue diagonali, come è indicato nella fig. 6. Questo sarà un aiuto per far subire ai diagrammi una traslazione a mano libera;

4° scegliere una delle posizioni come posizione base. Tracciare per questa il sistema di riferimento (comprese le due diagonali) a linee marcate; segnare l'origine della posizione base con un grosso punto. Fissare questo diagramma su una tavola da disegno in vetro fortemente illuminata dalla parte inferiore;

5° prendere le altre piazze e cercare di adattarle sulla posizione base mediante traslazioni a mano libera in senso orizzontale ed in senso verticale, applicando i tre principii della latitudine ed il criterio della non intersezione, come è stato sopra spiegato. Può anche essere fatto un tentativo di migliorare la perequazione ricorrendo al principio di flessibilità. Migliorare, se è necessario, le traslazioni delle posizioni considerate per prime, man mano che nuove posizioni vengono prese in considerazione. 10 ed anche 15 posizioni possono essere perequate simultaneamente in questo modo, se si dispone di altrettante situazioni di bilancio. Segnare, sul foglio relativo a ciascuna posizione perequata definitivamente, il punto in cui l'origine della posizione base traspare attraverso la carta da disegno. Le coordinate di tale punto, misurate rispetto al sistema di riferimento della posizione considerata danno il log del prezzo del vitto e il log del prezzo della vita nella posizione in questione;

6° eseguite tutte le perequazioni, le curve dovrebbero essere fissate insieme in modo da essere mantenute in una posizione costante. Il sistema di curve così ottenuto può essere chiamato diagramma composto della curva del vitto. Esso viene utilizzato per la costruzione delle curve della flessibilità della moneta. Ciascuna serie di due posizioni dà una curva della flessibilità della moneta, o una parte di una tale curva. Le curve della flessibilità della moneta dovrebbero essere tracciate in scala logaritmica nel senso dell'asse orizzontale, cioè nel senso dell'asse di r , e in scala ordinaria nel senso dell'asse verticale, cioè nel senso dell'asse della flessibilità. Ciascuna di esse è ottenuta misurando sul diagramma composto definitivo della curva del vitto, la distanza orizzontale A tra due curve di vitto e la distanza verticale δ fra le due corrispondenti diagonali di longitudine, come è indicato nella fig. 9 e dalla formula (6, 2). Il rapporto δ/A dà il valore assoluto della flessibilità. La misura di δ e di A sul diagramma composto può essere fatta in centimetri, in pollici o in qualunque altra unità convenzionale. Calcoli approssimati della flessibilità, del tipo ora descritto, possono essere già compiuti a scopo di prova, durante la traslazione (cfr. il precedente paragrafo: *Il principio della flessibilità*).

7° Costruite che siano le curve di flessibilità, riprodurre su un nuovo foglio di carta da disegno il sistema di riferimento della posizione base e tutte le curve del vitto che sono state usate e che appaiono nel diagramma

composto. Questo nuovo diagramma dà una rappresentazione della superficie di consumo, le curve del vitto essendo linee al contorno nelle coordinate ($\log w$, $\log r$).

8° Poichè le parti della curva della flessibilità della moneta ottenute dalle varie coppie di posizioni usate, di regola, non coincideranno esattamente, dovrà essere fatto un raccordo preferibilmente a mezzo di una perequazione grafica. Se appare necessaria una perequazione analitica, può essere tentata la formula:

$$(6, 6) \quad -\check{w}(r) = \frac{\gamma}{\log r - c}$$

dove c e γ sono costanti determinate dalle relazioni:

$$(6, 7) \quad c = \frac{\sigma_{(-\check{w}) \log r}}{\sigma_{(-\check{w})}}$$

$$(6, 8) \quad \gamma = M_{(-\check{w}) \log r} - c M_{(-\check{w})}.$$

Nelle (6,7), (6, 8), $(-\check{w})$ indica l'ordinata e $\log r$ l'ascissa dei punti di osservazione tracciati. $M_{(-\check{w}) \log r}$ e $\sigma_{(-\check{w}) \log r}$ sono rispettivamente lo scarto medio e lo scarto normale del prodotto $(-\check{w}) \log r$ preso in tutti i punti di osservazione. $M_{(-\check{w})}$ e $\sigma_{(-\check{w})}$ sono rispettivamente lo scarto medio e lo scarto normale di $(-\check{w})$. Nelle (6, 6) e (6, 7) il logaritmo può essere preso sia come log nat, sia con qualsiasi altra base.

Dalla curva della flessibilità perequata graficamente può essere determinata, a mezzo di una integrazione numerica, la curva stessa di utilità marginale della moneta, impiegando la formula (5, 8). Se la curva di flessibilità è stata perequata con la formula (6, 6), la determinazione dell'utilità marginale w non richiede alcuna integrazione numerica. In questo caso si ha semplicemente:

$$(6, 9) \quad w(r) = \frac{b}{(\log r - c)^\gamma}$$

dove c e γ sono dati dalle formule (6, 7) e (6, 8), b è una costante arbitraria e il logaritmo deve essere preso nella stessa base che nella formula (6, 6).

VII. — APPLICAZIONE DEL METODO DI TRASLAZIONE AI DATI DEI BILANCI FAMILIARI DEGLI STATI UNITI PER GLI ANNI 1918-1919

Il *Bureau of Labor Statistics* degli Stati Uniti ha fatto uno studio dei bilanci familiari nel 1918-1919, comprendente 92 città. I risultati sono pubblicati nel « *Bureau of Labor Statistics Bulletin* », n. 357. Per il presente studio furono scelte le 13 città di New York City, Detroit Michigan, Houston Texas, San Francisco Calif., Minneapolis Minn., Boston Mass., Buffalo N. Y., New Orleans La., Portland Me., Baltimora Md., Savannah Ga., Chicago Ill., Cleveland Ohio.

Per ciascuna di queste città fu tracciata la curva di spesa per vitto usando la scala logaritmica sia lungo l'asse del reddito che lungo l'asse della spesa per vitto. Il reddito non è dato direttamente dalle tavole pubblicate dal *Bureau of Labor Statistics*; ma è data la spesa totale ed anche l'avanzo o il disavanzo, sicchè il reddito può essere facilmente calcolato.

I dati forniti immediatamente dalle tavole sono quelli della spesa per vitto per famiglia, ξ_F , in ciascuno di sette gruppi corrispondenti ad altrettanti valori del reddito familiare ρ_F . Per ciascun gruppo è dato anche il valore del coefficiente E di equivalenza in numero di maschi adulti. Per il nostro scopo, sia le cifre del reddito che quelle del consumo di vitto furono ridotte dalla base familiare alla base individuale dividendo per il coefficiente E la spesa familiare per vitto ed il reddito per famiglia. I rapporti così ottenuti, $\xi = \xi_F/E$ e $\rho = \rho_F/E$, furono assunti come espressione della spesa individuale per vitto e, rispettivamente, del reddito individuale.

Per ciascuna delle città furono tracciate sia la curva che dà il rapporto tra la spesa familiare ed il reddito familiare, sia la curva che dà il rapporto fra ξ e ρ . Le curve della spesa familiare mostrarono un andamento assai più vicino a quello rettilineo che non le curve della spesa individuale. Questo fatto ha una spiegazione ovvia. Esso mostra semplicemente l'*effetto di proporzionalità* dell'ampiezza del gruppo familiare misurata da E . La natura di questo effetto appare più chiara dalla considerazione di un caso estremo. Supponiamo che la popolazione sia costituita da un gran numero di individui identici, ciascuno dei quali abbia un dato reddito, per esempio 500 dollari l'anno, e spenda una determinata somma, per esempio 200 dollari l'anno, per il vitto; supponiamo ancora che aggruppando insieme un certo numero di questi membri identici, sia stato costituito un gran numero di famiglie. Il numero dei membri di una famiglia potrebbe essere determinato sulla base di campioni presi a caso. Se indagassimo il rapporto tra la spesa familiare per vitto ξ_F , ed il reddito familiare ρ_F , nella serie di famiglie così costituite, troveremmo una correlazione lineare perfetta. La correlazione sarebbe

quasi perfetta anche se vi fosse qualche sfasamento tra ξ e ρ . Ma questo fatto non avrebbe significato alcuno per il problema della misura dell'utilità. L'importante per questa misura è di conoscere la relazione fra ξ e ρ , non la relazione fra ξ_F e ρ_F .

Le curve della spesa individuale per le 13 città studiate furono perequate graficamente. Nel processo di perequazione ciascuna di esse fu trattata indipendentemente, senza stabilire alcun confronto tra le forme rispettive.

Tavola III. — ANNO 1918-1919.

N.	Città	Prezzo del vitto p	Prezzo della vita P	Inversa del prezzo del vitto $\alpha = \frac{P}{p}$
0	S. Francisco Calif.	1.00	1.00	1.00
1	Minneapolis Minn.	1.00	0.86	0.86
2	Houston Texas	1.10	0.99	0.90
3	New York City	1.56	1.24	0.80
4	Savannah Ga.	0.66	0.72	1.09
5	New Orleans La.	0.78	0.89	1.14
6	Buffalo N. Y.	1.24	1.04	0.84
7	Boston Mass.	1.63	1.20	0.74
8	Detroit Mich.	1.35	1.07	0.80

Dalla serie delle 13 curve di spesa così ottenute, furono scelte per una ulteriore analisi le 9 seguenti: San Francisco Calif., Minneapolis Minn., Houston Texas, New York City, Savannah Ga., New Orleans La., Buffalo N. Y., Boston Mass., Detroit Mich.; esse furono riportate su altrettanti fogli di carta da disegno leggera, e fu tracciato il sistema di riferimento come è indicato nella fig. 6. Scelta quella di S. Francisco come posizione base, le altre otto curve furono assoggettate ad una traslazione a mano libera operata in armonia con i principii esposti nel Cap. VI, e che dette nei riguardi del prezzo del vitto e del prezzo della vita nelle città considerate, i risultati indicati dalle cifre della tavola III.

La situazione risultante a traslazione compiuta è indicata nella fig. 11. Le curve così ottenute hanno il significato di curve di *quantità* di vitto.

Ciascuna delle otto curve di quantità, n. 1, 2, . . . , 8, fu poi associata con la curva n. 0 della posizione base. Poichè le curve 3 ed 8 avevano un andamento identico (la sola differenza essendo che la curva 8 si spingeva a destra un po' oltre la curva 3), furono ottenute in questo modo sette coppie di curve da ciascuna delle quali fu determinato un certo numero di punti della curva della flessibilità della moneta. Ognuno di questi fu ottenuto mistrando in centimetri le due lunghezze δ ed A , formando il rapporto δ/A e considerando questo come valore della flessibilità ($-\check{v}$) nel punto medio dell'intervallo di reddito reale coperto dalla lunghezza A . Il numero dei

punti della curva di flessibilità ottenuti in questo modo da ciascuna coppia di curve di quantità di vitto variò da 1 a 3, ed in tutto ne furono determinati 17. Le loro coordinate sono date nella tavola IV (v. pagina seguente).

Riferendo i punti stessi ad un sistema di coordinate in cui l'ascissa era $\log r$, e l'ordinata $-\check{w}$, fu ottenuto il diagramma della fig. 12.

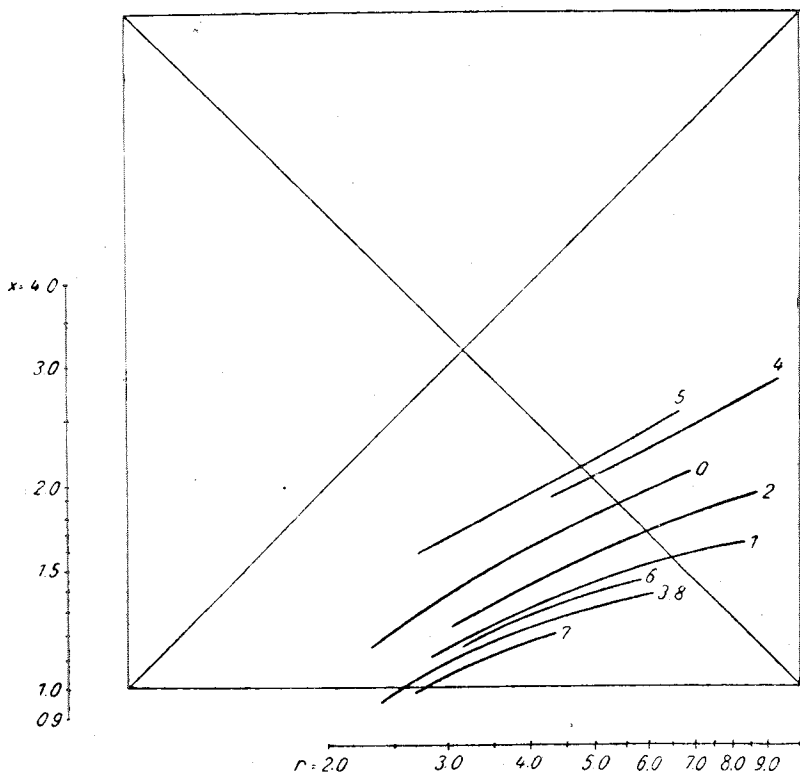


Fig. 11. — Linee al contorno della superficie di consumo quando α esprime la « altitudine ».

In questa, la linea pesante è una linea tracciata a mano libera. Le linee condotte con segno più leggero congiungono i punti di osservazione corrispondenti ad una medesima coppia di curve di quantità di vitto. È notevole che, non solo il gruppo dei 17 punti di osservazione preso nel suo complesso, indica chiaramente l'andamento della curva di flessibilità, ma le diverse serie di punti derivanti da una determinata coppia di curve di quantità di vitto, presentano caratteristiche uniformi nella variazione del valore assoluto della flessibilità, cioè un decremento monotono da circa 0,6 al principio a circa 0,3 alla fine dell'intervallo di reddito effettivo considerato.

Tavola IV.

Coppie di curve di quantità di vitto Confronto della curva di San Francisco con	log $\alpha = \delta$ misurato in centimetri (Cfr. la figura 9)	Singoli punti misurati				
		$r =$				
1 Minneapolis Minn. .	0.85	$r =$	3.3	4.3	5.7	
		$-\check{w} =$.425	.34	.213	
2 Houston Texas ...	0.55	$r =$	2.88	4.28	6.2	
		$-\check{w} =$.523	.365	.275	
3 New York City ...	1.15	$r =$	2.8	3.35	4.05	
		$-\check{w} =$.575	.48	.329	
4 Savannah Ga.	-0.55	$r =$			4.7	5.7
		$-\check{w} =$			0.407	.305
5 New Orleans La. .	-0.77	$\check{r} =$			3.1	5.5
		$-\check{w} =$.428	.35
6 Buffalo N. Y.	0.9	$r =$		2.62	3.75	4.35
		$-\check{w} =$.528	.36	.29
7 Boston Mass.	1.65	$r =$		3.25		
		$-\check{w} =$.55		
8 Detroit Mich.	Come New York City					

Va tenuto presente che la curva della fig. 12 è la curva della *flessibilità* della utilità marginale della moneta. Poichè la curva stessa dell'utilità marginale è l'integrale della curva di flessibilità, la sua precisione relativa sarà certamente molto maggiore.

Dopo aver costruito la curva di flessibilità della fig. 12, fu determinata a mezzo di una integrazione numerica, l'utilità marginale w come funzione di r . Il risultato è indicato dalle cifre della tavola V (v. pagina 62).

Una rappresentazione grafica della curva di utilità marginale della moneta, quale risulta dai valori della tavola V, è data nella fig. 13.

I risultati numerici ottenuti indicano che *il valore assoluto della flessibilità della moneta è minore dell'unità per tutto l'intervallo di reddito reale considerato*. E i punti di osservazione sono tanto concentrati (vedi fig. 12), che non può esservi dubbio circa il significato del fatto che la flessibilità è minore della

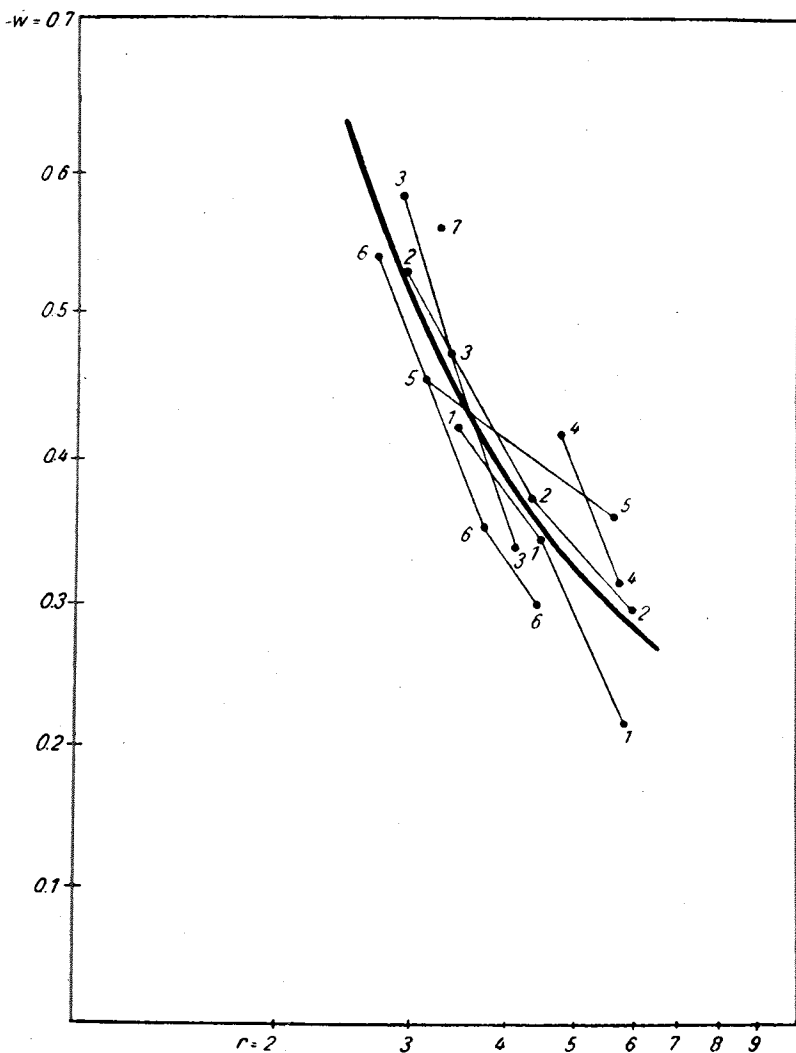


Fig. 12. — Flessibilità dell'utilità marginale della moneta.

w = utilità marginale della moneta;

r = reddito reale;

$-w = -\frac{d \log w}{d \log r}$ = valore assoluto della flessibilità della moneta.

unità. Ciò conferma l'ipotesi da me fatta nel 1926 nello « Statsökonomisk Tidsskrift ».

Mi sembra che il fatto di avere ottenuto praticamente la stessa determinazione della flessibilità associando due a due delle città *diverse*, dia un alto valore espressivo a tutta l'indagine. Anche il più violento antiutilista deve

ammettere che siamo qui in presenza di un fenomeno empirico di comportamento di massa che ha una importanza considerevole ed esige una spiegazione. Senza dubbio si può ancora rifiutarsi di spiegare questa uniformità

Tavola V. — MATERIALE DI OSSERVAZIONE RELATIVO AGLI STATI UNITI, 1918-1919.

Reddito reale r	Utilità marginale della moneta w	Valore assoluto della flessibilità della curva di utilità marginale della moneta — \tilde{w}
2.40	10.00	.617
2.62	9.50	.559
2.90	9.03	.510
3.17	8.63	.467
3.48	8.30	.428
3.80	7.98	.396
4.16	7.72	.362
4.55	7.48	.333
5.00	7.26	.312
5.40	7.07	.294
5.91	6.89	.278
6.50	6.72	.261

in termini di equilibrio di utilità; ma un simile rifiuto avrebbe, mi sembra, poco peso finché del fatto non fosse offerta alcuna altra spiegazione plausi-

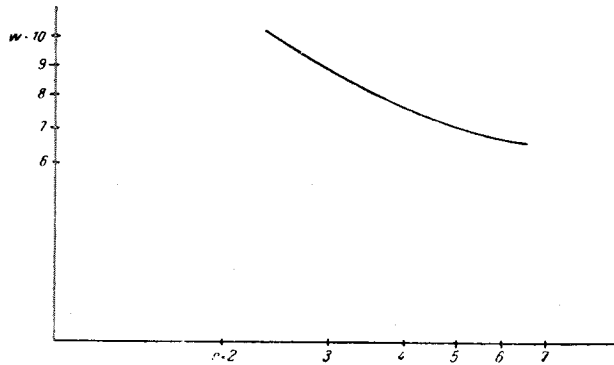


Fig. 13. — Utilità marginale della moneta come funzione del reddito. La curva è determinata a mezzo di una integrazione numerica della curva della flessibilità, percquata a mano libera.

w = utilità marginale della moneta
 r = reddito reale

bile. E probabilmente, una interpretazione diversa, che possa competere per semplicità e generalità con la interpretazione della utilità, si farà attendere per molto tempo ancora.

VIII. — L'EQUAZIONE GENERALE DELLA FLESSIBILITÀ

I metodi esposti nei Cap. V e VI sono basati sul fatto che due punti di osservazione (α_1, x_1, r_1) e (α_2, x_2, r_2) pei quali la quantità di vitto è *la stessa*, cioè $x_1 = x_2$, ma sono differenti i prezzi relativi, cioè $\alpha_1 \neq \alpha_2$, possono essere utilizzati per ottenere una osservazione della flessibilità della moneta. Diviene quindi naturale il proporsi il quesito seguente: se il materiale di cui si dispone non dà osservazioni alle quali corrispondano valori rigorosamente eguali della quantità di vitto, non sarebbe tuttavia possibile ottenere una espressione approssimata della flessibilità della moneta, ad esempio, utilizzando per la determinazione di ciascun valore di questa, tre o più punti di osservazione anzichè due, e compensando in parte con la maggiore abbondanza di dati sperimentali la mancanza di coppie di punti di osservazione in cui la quantità di vitto sia la stessa? Questo problema sarà discusso nel presente capitolo.

Per convenienza scriveremo ora l'equazione dell'equilibrio nella seguente forma logaritmica:

$$(8, 1) \quad \log w(r) - \log u(x) = \log \alpha.$$

Supponiamo che sia data sulla superficie di consumo una serie di punti di osservazione $(\alpha_1, x_1, r_1), (\alpha_2, x_2, r_2) \dots$. L'equazione dell'equilibrio (8, 1) deve essere soddisfatta per ciascuno di essi. Se scegliamo due qualsiasi punti di osservazione, per es., i punti n. 1 e n. 2 e sottraggiamo l'equazione dell'equilibrio relativa al secondo punto da quella relativa al primo, otteniamo:

$$(8, 2) \quad (\log r_1 - \log r_2) \check{w}(r_1, r_2) - (\log x_1 - \log x_2) \check{u}(x_1, x_2) = \\ = \log \alpha_1 - \log \alpha_2$$

dove l'espressione $\check{w}(r_1, r_2)$, definita dalla (5, 6) è la flessibilità media della moneta nell'intervallo di reddito (r_1, r_2) e:

$$(8, 3) \quad \check{u}(x_1, x_2) = \frac{\log u(x_1) - \log u(x_2)}{\log x_1 - \log x_2}$$

è la flessibilità media del vitto nell'intervallo di quantità (x_1, x_2) .

Indicheremo la (8, 2) col nome di *equazione generale della flessibilità*. Ponendo in essa $x_1 = x_2$ otteniamo immediatamente la formula (5, 7) che ha servito di base al metodo di variazione della quantità. Analogamente, se abbiamo due curve complete di bilancio, le curve [1] e [2], e facciamo nella (8, 2) $r_1 = r_2$, otteniamo:

$$(8, 4) \quad \check{u}(x_1, x_2) = - \frac{\log \alpha_1 - \log \alpha_2}{\log x_1(r) - \log x_2(r)}$$

dove r è il valore comune di r_1 e di r_2 ed $x_1(r)$ ed $x_2(r)$ sono le due funzioni che esprimono in qual modo la quantità consumata varii in relazione al reddito r ,

rispettivamente nella prima e nella seconda curva di bilancio. Attribuendo ad r nella (8, 4) valori diversi, si ottengono diversi punti della curva di flessibilità del vitto. E dalla flessibilità del vitto così ottenuta, può essere naturalmente ricavata a mezzo di integrazione, la curva di utilità del vitto, allo stesso modo che la curva di utilità della moneta è stata dedotta dalla curva di flessibilità della moneta. Questo metodo di determinazione della flessibilità del vitto e della utilità del vitto può essere chiamato *metodo di variazione del reddito*.

Per studiare la situazione che si produce quando nel materiale di cui si dispone le quantità x ed i redditi r sono tutti diversi, introduciamo le notazioni seguenti:

$$(8, 5) \quad \begin{aligned} \check{w}_{ik} &= \check{w}(r_i, r_k) \\ \check{u}_{ik} &= \check{u}(x_i, x_k) \\ \alpha_{ik} &= \log \alpha_i - \log \alpha_k \quad (i, k = 1, 2, \dots) \\ x_{ik} &= \log x_i - \log x_k \\ r_{ik} &= \log r_i - \log r_k \end{aligned}$$

Ovviamente: $x_{ki} = -x_{ik}$; $r_{ki} = -r_{ik}$; e se: $x_i = x_k$, abbiamo anche $x_{ik} = 0$; e se $r_i = r_k$, abbiamo $r_{ik} = 0$, ecc.

Con queste notazioni l'equazione generale della flessibilità può essere scritta:

$$(8, 6) \quad r_{ik} \check{w}_{ik} - x_{ik} \check{u}_{ik} = \alpha_{ik}$$

La flessibilità media della moneta, $\check{w}(r_1, r_2)$, definita dalla (5, 6) può essere considerata come la differenza divisa prima della funzione $\log w(r)$ rispetto a $\log r$. Analogamente la differenza divisa di secondo ordine di $\log w(r)$ può essere definita con la formula (1):

$$(8, 7) \quad \check{w}(r_1, r_2, r_3) = \frac{\check{w}(r_1, r_2) - \check{w}(r_2, r_3)}{\frac{\log r_1 + \log r_2}{2} - \frac{\log r_2 + \log r_3}{2}} = 2 \frac{\check{w}(r_1, r_2) - \check{w}(r_2, r_3)}{\log r_1 - \log r_3}$$

Indicando per brevità, questa differenza di secondo ordine con \check{w}_{123} , possiamo scrivere la (8, 7) sotto la forma:

$$(8, 8) \quad \check{w}_{123} = 2 \frac{\check{w}_{12} - \check{w}_{23}}{r_{13}}$$

Analogamente possiamo considerare la differenza divisa di secondo ordine della funzione $\log u(x)$, cioè:

$$(8, 9) \quad \check{u}_{123} = 2 \frac{\check{u}_{12} - \check{u}_{23}}{x_{13}}$$

(1) Le differenze divise di secondo ordine sono di solito definite senza il fattore 2 introdotto nel secondo membro della (8, 7). La definizione (8, 7) è stata adottata qui per rendere la differenza seconda direttamente comparabile con la derivata seconda definita dalla (8, 10).

Chiameremo \check{w}_{123} *accelerazione media della moneta* presa pei valori (r_1, r_2, r_3) del reddito; ed \check{u}_{123} sarà l'*accelerazione media del vitto* presa pei valori (x_1, x_2, x_3) della quantità di vitto.

Insieme con queste accelerazioni medie considereremo le accelerazioni *puntuali*:

$$(8, 10) \quad \check{w}(r) = \frac{d \check{w}(r)}{d \log r} = \frac{d^2 \log w(r)}{(d \log r)^2}$$

e

$$(8, 11) \quad \check{u}(x) = \frac{d \check{u}(x)}{d \log x} = \frac{d^2 \log u(x)}{(d \log x)^2}.$$

Dalla definizione di accelerazione in un punto segue che le relazioni precedenti esprimono *la rapidità con cui le flessibilità variano* quando muta l'ascissa, ossia, rispettivamente, il reddito r o la quantità x . Una interpretazione analoga può essere data per le accelerazioni medie. Ma una proposizione ben nota della teoria delle differenze divise è che: se \check{w}_{123} è la differenza divisa di secondo ordine di $\log w(r)$, presa nel punto triplo (r_1, r_2, r_3) , e se l'accelerazione puntuale $\check{w}(r)$ è continua nell'intervallo fra il minore e il maggiore dei valori r_1, r_2, r_3 , esiste nell'intervallo medesimo almeno un valore r_0 di r per cui:

$$(8, 12) \quad \check{w}_{123} = \check{w}(r_0).$$

Una proposizione simile vale naturalmente per u .

Dalle (8, 12) e (8, 8) deduciamo:

$$(8, 13) \quad \check{w}_{23} = \check{w}_{12} + \frac{1}{2} r_{31} \check{w}(r_0).$$

Analogamente abbiamo:

$$(8, 14) \quad \check{u}_{23} = \check{u}_{12} + \frac{1}{2} x_{31} \check{u}(x_0)$$

x_0 essendo un valore di x nell'intervallo tra il minore e il maggiore dei numeri x_1, x_2, x_3 .

Consideriamo ora le due coppie di punti di osservazione [1, 2] e [2, 3]. Da quanto precede deduciamo che \check{w}_{12} e \check{u}_{12} debbono soddisfare le due equazioni seguenti:

$$(8, 15) \quad \begin{aligned} r_{12} \check{w}_{12} - x_{12} \check{u}_{12} &= \alpha_{12} \\ r_{23} \check{w}_{12} - x_{23} \check{u}_{12} &= \alpha_{23} - R \end{aligned}$$

dove:

$$(8, 16) \quad R = \frac{1}{2} [r_{23} r_{31} \check{w}(r_0) - x_{23} x_{31} \check{u}(x_0)].$$

Risolvendo le due equazioni (8, 15) rispetto a \check{w}_{12} ed \check{u}_{12} otteniamo:

$$(8, 17) \quad \check{w}_{12} = \frac{\alpha_{12} x_{23} - \alpha_{23} x_{12} + x_{12} R}{r_{12} x_{23} - r_{23} x_{12}}$$

$$(8, 18) \quad \check{u}_{12} = - \frac{r_{12} \alpha_{23} - r_{23} \alpha_{12} - r_{12} R}{r_{12} x_{23} - r_{23} x_{12}}.$$

Se $x_1 = x_2$, e quindi, come abbiamo visto, $x_{12} = 0$, la (8, 17) si riduce a:

$$\check{w}_{12} = \frac{\alpha_{12}}{r_{12}}.$$

E se $r_1 = r_2$, e quindi $r_{12} = 0$, la (8, 18) si riduce a:

$$\check{u}_{12} = - \frac{\alpha_{12}}{x_{12}}.$$

Si ritorna così alle formule sulle quali si basano rispettivamente, il metodo di variazione della quantità e il metodo di variazione del reddito.

Se invece, x_{12} non è rigorosamente nullo, il termine residuo incognito R deve comparire nel numeratore della (8, 17). Tuttavia il prodotto $x_{12} R$ è di terzo grado nelle quantità α_{ik} , x_{ik} , r_{ik} , mentre gli altri termini del numeratore sono soltanto di secondo grado. Quindi, se i punti [1], [2], [3], non sono troppo distanti fra loro sulla superficie di consumo, il prodotto $x_{12} R$ al numeratore della (8, 17) sarà relativamente piccolo e potrà, in via di approssimazione, essere trascurato. Otterremo così:

$$(8, 19) \quad \check{w}_{12} = \frac{\alpha_{12} x_{23} - \alpha_{23} x_{12}}{r_{12} x_{23} - r_{23} x_{12}}$$

e analogamente:

$$(8, 20) \quad \check{u}_{12} = - \frac{r_{12} \alpha_{23} - r_{23} \alpha_{12}}{r_{12} x_{23} - r_{23} x_{12}}.$$

Nelle ultime due formule figurano soltanto valori direttamente osservabili.

Dal punto di vista dell'importanza relativa del termine residuo R , le formule (8, 19), (8, 20) sono tanto più esatte quanto più vicini sono i punti [1], [2], [3]. Tuttavia, tale vicinanza non deve essere troppo spinta perchè in

questo caso la (8, 19) e la (8, 20) si avvicinano molto alla forma $\frac{0}{0}$, espres-

sione che è molto sensibile alle influenze casuali. Il valore assoluto dell'errore relativo che si commette calcolando \check{w}_{12} in base alla formula approssimata (8, 19), invece che con la formula esatta (8, 17), è minore o eguale al valore assoluto di:

$$(8, 21) \quad z = \frac{1}{2} \frac{x_{12} (r_{23} r_{31} + x_{23} x_{31})}{\alpha_{12} x_{23} - \alpha_{23} x_{12}} M$$

dove M è il limite superiore dei valori assoluti di $\ddot{w}(r)$ ed $\ddot{u}(x)$ negli intervalli considerati. Ciò significa che il valore esatto di \dot{w}_{12} deve essere compreso fra i valori che si ottengono moltiplicando il valore approssimato dato dalla (8, 19) rispettivamente per $(1 - z)$ ed $(1 + z)$.

Possiamo quindi formulare il criterio seguente. Se nulla è noto *a priori* circa l'accelerazione della moneta o l'accelerazione del vitto, i tre punti [1], [2], [3] usati nella formula (8, 19) che dà un valore approssimato della flessibilità della moneta, *debbono essere scelti in modo da rendere il più piccolo possibile il valore assoluto di:*

$$(8, 22) \quad \varphi_w = \frac{|r_{23} r_{31}| + |x_{23} x_{31}|}{\alpha_{12} x_{23} - \alpha_{23} x_{12}} x_{12}.$$

In particolare, se è possibile scegliere i punti in modo che sia $x_1 = x_2$, ma $\alpha_1 \neq \alpha_2$ si ha il caso ideale $\varphi_w = 0$. E si ha in questo un altro modo di mostrare il significato degli isoquanti e del metodo di variazione della quantità.

Se si vuole invece determinare la flessibilità del vitto, i punti debbono essere scelti in modo che sia il minimo possibile il valore assoluto di:

$$(8, 23) \quad \varphi_u = \frac{|r_{23} r_{31}| + |x_{23} x_{31}|}{r_{12} \alpha_{23} - r_{23} \alpha_{12}} r_{12}.$$

Vi sono diversi modi in cui l'applicazione pratica delle formule precedenti può essere tentata con profitto. Diamo qualche suggerimento a scopo esemplificativo. Se è stato determinato a mezzo delle (8, 19) e (8, 20) un sistema discreto di punti nelle coordinate (r, \dot{w}) o rispettivamente nelle coordinate (x, \dot{u}) , si può tentare di eseguire una perequazione col metodo dei minimi quadrati usando φ_w o rispettivamente φ_u (o certe funzioni semplici di queste quantità) come inverse dei pesi. Se i prezzi sono ignoti, cioè se la (8, 19) non può essere applicata tal quale, si può tentare il procedimento seguente. Introdurre nella (8, 19) i valori $x_{12} = \xi_{12} - p_{12}$, $r_{12} = r_{12} - P_{12}$, $\alpha_{12} = P_{12} - p_{12}$, essendo $\xi_{12} = \log \xi_1 - \log \xi_2$, ed essendo definiti in modo analogo r , p , P . Con opportune ipotesi sulla variazione delle quantità ignote p e P , e tenendo conto anche del fatto che tutti i valori delle flessibilità determinati a mezzo della (8, 19) debbono essere riferiti alla *medesima* curva di flessibilità della moneta, sarà possibile (per esempio, con un'applicazione del metodo dei minimi quadrati) determinare approssimativamente i valori incogniti p' e P' e, a mezzo di questi, i valori approssimati della flessibilità della moneta. Si avrebbe così una modificazione del principio di traslazione per il caso in cui si disponesse di una sola serie di osservazioni discrete. Ma soltanto con una analisi statistica approfondita può essere accertato se un simile procedimento dia risultati abbastanza buoni.

IX. — L'UTILITÀ DELLA MONETA E IL PROBLEMA DEI NUMERI INDICI

La connessione fra l'utilità della moneta e il problema dei numeri indici può essere considerata da due punti di vista. In primo luogo: la tecnica statistica mediante la quale nei precedenti capitoli abbiamo tentato di costruire le curve di utilità è, fino ad un certo punto, basata sull'uso di numeri indici. P , ed in alcuni casi anche p , sono numeri indici. Può sorgere la questione se i numeri indici costruiti coi sistemi consueti, combinando direttamente prezzi e quantità osservate, secondo una formula più o meno meccanica, diano una espressione adeguata dei concetti di P e p che lo studio dell'utilità implica. Vedremo che è opportuno modificare alquanto il concetto classico di numero indice quando esso deve essere applicato allo studio dell'utilità. In secondo luogo, ponendoci da un punto di vista più generale, possiamo chiederci: se il concetto dell'utilità della moneta definito quantitativamente giovi ad elaborare una definizione di numero indice dei prezzi che sia più significativa anche per scopi generali. Considereremo successivamente questi due quesiti.

Se i numeri indici sono costruiti nel modo consueto, osservando direttamente i prezzi e le quantità e combinando questi dati a mezzo di una delle formule classiche per la costruzione dei numeri indici, è molto importante che i tipi e le qualità dei beni dei quali si tiene conto, siano gli stessi in tutti gli istanti di tempo e in tutti i luoghi confrontati. Se i tipi e le qualità dei beni dei quali si tiene conto per il calcolo del numero indice differiscono per diversi valori del tempo o per diversi luoghi, l'indice non sarà un'espressione corretta di ciò che con esso si cerca di esprimere, cioè delle variazioni nei prezzi. Uno degli elementi più importanti nella decisione se una certa merce o un certo tipo di una merce debbano essere oppur no inclusi nel calcolo del numero indice, è questo: se sia possibile dare del bene o del tipo una definizione tale che nei diversi istanti di tempo, o nei diversi luoghi considerati, si intenda con essa la medesima cosa.

Ma una scelta di questo genere tenderà tuttavia a produrre una deviazione, ed il numero indice costruito sulla base che ne deriva non darà una rappresentazione perfetta del concetto di prezzi generali. Essa tenderà in realtà a smorzare le fluttuazioni dei prezzi. Quando siano misurate da un numero indice costruito in base ad una tale scelta, le fluttuazioni stesse faranno apparire una distribuzione di prezzi meno ampia di quel che dovrebbe; e questo effetto di *attenuazione* è particolarmente intenso per i numeri indici geografici. Prendiamo, ad esempio, la costruzione di un indice geografico dei prezzi del vitto. Se nella costruzione dell'indice si dovesse limitarsi a tener conto soltanto di quegli alimenti che esistono esattamente nelle mede-

sime qualità nei diversi luoghi, l'indice conterrebbe praticamente soltanto pochi articoli *standard*, come lo zucchero granulato, la farina di frumento a determinati gradi di abburattamento, ecc. Ma questi articoli *standard* sono appunto quelli pei quali è prevedibile la minore variabilità dei prezzi da un luogo all'altro. La variabilità dei prezzi per queste specie di merci sarà di regola soltanto quella dovuta ai costi del trasporto, o forse alle barriere doganali, variabilità che non traduce in nessun modo tutte le differenze che si hanno nei prezzi delle derrate, ed in particolare è molto lontana dal rappresentare le differenze di prezzo delle quali importa tener conto ai fini dello studio dell'utilità. Per una gran parte delle derrate — e spesso per alcune delle più importanti — i tipi sono più o meno caratterizzati localmente, non hanno una esatta corrispondenza nei bilanci familiari di altri luoghi e quindi i prezzi di essi sono determinati più o meno *localmente*. Quando si abbia bisogno di confrontare la « costosità » del vitto in generale in luoghi differenti il trascurare tali articoli condurrebbe a risultati assolutamente fallaci; ed in particolare trarrebbe in inganno nello studio dell'utilità. Ma in realtà, quando si esige che i dati che entrano nel numero indice dei prezzi siano rigorosamente « comparabili », non si fa appunto altro che trascurare gli articoli in questione.

Ho avuto recentemente occasione di convincermi che gli indici dei prezzi del vitto costruiti così in modo immediato e diretto danno una distribuzione troppo ristretta. Quando il prof. FISHER ed io lavoravamo ancora secondo le direttive del metodo del FISHER e del mio metodo degli isoquantii, cercavamo naturalmente diverse fonti di indici geografici di prezzi entro gli Stati Uniti. Fra l'altro ricevevmo dalla cortesia del prof. PAUL H. DOUGLAS una serie di indici geografici di prezzi della vita e di prezzi del vitto che egli stesso aveva costruiti. Le variazioni di questi dati erano molto meno ampie di quello che si sarebbe potuto ritenere plausibile; ed inoltre il modo in cui la serie dei valori si distribuiva sul paese non appariva ragionevole affatto (1). Si ritenne quindi che questi dati sui prezzi non potessero essere usati a scopo di misura dell'utilità.

La determinazione degli indici del prezzo del vitto e del prezzo della vita col metodo di *traslazione* porta a girare le difficoltà che nascono dalla differenza della qualità e del tipo delle merci nei singoli luoghi, e quindi evita anche l'effetto di smorzamento delle oscillazioni prodotto dalla scelta di sole merci « comparabili ». Poichè questo effetto di smorzamento ha un'importanza così fondamentale nello studio dell'utilità, ritengo che i numeri indici della tavola III abbiano, per lo scopo che ci proponiamo, maggior significato che una serie di numeri indici determinati direttamente.

(1) Il dott. ROYAL MEEKER, che ha una conoscenza molto approfondita della situazione del prezzo del vitto e del prezzo della vita per una gran parte degli Stati Uniti, concorda con me in questa opinione.

Ciò non significa certo che le cifre della tavola III siano necessariamente più significative per scopi generali. Può darsi che in avvenire, e quando sia stato controllato con più ampie prove su dati numerici, il metodo di traslazione dimostri la propria utilità anche come mezzo per determinare numeri indici geografici per scopi generali. Io sono profondamente convinto che ciò avverrà. Ma, per ora, i risultati dati dalla tavola III vanno considerati come una serie di parametri che hanno servito nella costruzione della curva di utilità — quale risulta dalla tavola V — piuttosto che come una serie di numeri indici con significato generale indipendente. Penso senza dubbio che chiunque sia familiare con le variazioni geografiche dei prezzi negli Stati Uniti converrà che, *in linea generale*, le cifre della tavola III offrono anche un'espressione del concetto comunemente accettato di prezzi del vitto e di prezzi della vita. In particolare, la carestia delle grandi città della costa orientale, quale risulta dalla tavola III è — credo — un fatto molto ragionevole. Ma nel dettaglio potrebbero esservi correzioni da fare qualora i numeri indici dovessero essere usati per scopi generali.

Passo ora all'aspetto più generale della connessione tra il concetto di utilità della moneta ed il problema dei numeri indici. L'idea essenziale che è alla base del nostro tentativo di costruire un numero indice del « prezzo della vita », mi sembra sia la seguente: abbiamo due istanti di tempo (o due luoghi) [1] e [2] ed abbiamo bisogno di conoscere la quantità per la quale dobbiamo moltiplicare il reddito in [1] per ottenere in [2] un reddito che consenta ad un individuo di vivere con questo secondo reddito in [2] altrettanto bene che col primo in [1]. Questa formulazione del problema è più o meno implicitamente sottintesa in tutti i tentativi fatti per costruire numeri indici del « prezzo della vita ». Sia ρ_1 un dato reddito nominale nel primo istante di tempo (o nel primo luogo), sia ρ_2 il corrispondente reddito nominale nel secondo istante di tempo (o nel secondo luogo), sia cioè ρ_2 il reddito che renderebbe possibile all'individuo di vivere in [2] altrettanto bene che col reddito ρ_1 in [1].

Nella formulazione classica del problema dei numeri indici si ammette implicitamente che il reddito ρ_2 in questione possa essere determinato semplicemente moltiplicando ρ_1 per un certo fattore P_{21} che è indipendente da ρ_1 . In altre parole, si ammette che sia:

$$(9, 1) \quad \rho_2 = P_{21} \cdot \rho_1$$

dove P_{21} è una costante indipendente da ρ_1 e che viene assunta come espressione del « prezzo della vita » nell'istante di tempo (o nel luogo) [2], in confronto col prezzo della vita nell'istante di tempo (o nel luogo) [1]. Mi sembra che tutto il problema dei numeri indici si presenti sotto un aspetto più fruttuoso se si abbandona l'ipotesi classica che P_{21} sia una costante, e si formula il concetto di prezzo della vita dicendo che ρ_2 è una funzione di ρ_1 :

$$(9, 2) \quad \rho_2 = R_{21}(\rho_1).$$

La natura di questa funzione indica il rapporto dei prezzi della vita negli istanti [1] e [2]. Se si adotta questo punto di vista, il problema del rapporto tra il prezzo della vita in due istanti di tempo (in due luoghi) si presenta non più sotto l'aspetto della determinazione di un *numero*, ma piuttosto sotto l'aspetto della determinazione della *forma di una curva*: precisamente la curva che dà una rappresentazione grafica della R_{21} funzione che indicheremo col nome di *curva di riduzione* fra i punti considerati. Essa esprime la legge in base alla quale ρ_2 è ridotto ad una scala in cui diviene comparabile con ρ_1 .

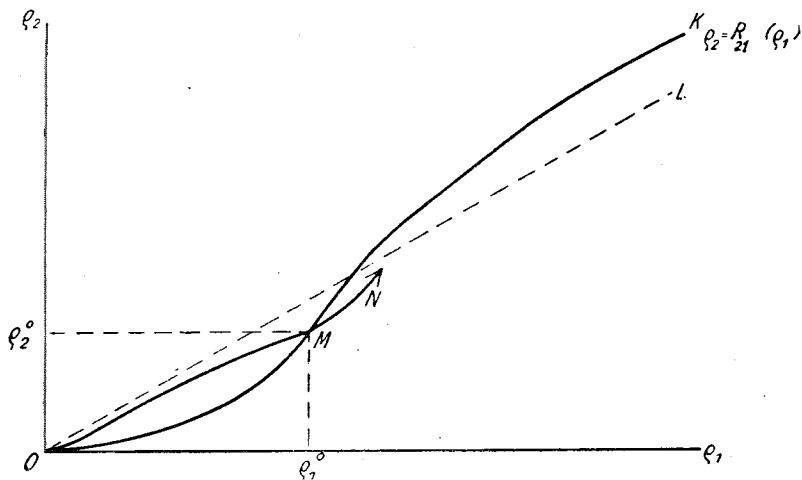


Fig. 14.

L'ipotesi classica può essere formulata dicendo che *la curva di riduzione deve essere un segmento rettilineo passante per l'origine*, come, ad esempio, il segmento OL nella fig. 14. Ma un segmento di retta passante per l'origine è la rappresentazione grafica di una relazione della forma (9, 1) nella quale P_{21} è indipendente da ρ_1 . E l'inclinazione (il coefficiente angolare) della retta dà appunto una rappresentazione del concetto classico di « prezzo della vita ». Invece che una *curva di riduzione*, avremo in questo caso un *numero di riduzione*. Nella nostra, più generale, formulazione del problema, possiamo supporre che la curva che esprime il rapporto fra ρ_2 e ρ_1 abbia una inclinazione variabile, come, ad esempio, la curva OMK della fig. 14. Qualunque serie di due istanti di tempo (o di due luoghi) che venissero confrontati fra loro, sarebbe allora rappresentata da una curva simile, che sola potrebbe fornire la raffigurazione completa del confronto stesso fra i due istanti di tempo (o i due luoghi).

Se si adotta questo punto di vista più generale, il concetto di prezzo della vita non può essere espresso a mezzo di un *numero*, a meno che il numero non venga messo in rapporto con un punto definito sulla curva di riduzione. Se la curva è crescente in modo monotono, la determinazione di un punto

di essa può esser fatta unicamente così. Si fissi un certo valore di ρ_1 , ad esempio ρ_1^0 ; sia M il punto che lo rappresenta sulla curva di riduzione e sia ρ_2 il reddito corrispondente nell'istante di tempo o nel luogo [2]. Vi sono due numeri che possono essere riferiti al punto M e che, ciascuno nel proprio senso, dànno un'espressione del concetto di « prezzo della vita ». Abbiamo in primo luogo l'inclinazione del segmento di retta che va dall'origine ad M . Questa inclinazione è eguale al valore del rapporto:

$$(9, 3) \quad P_{21}(\rho_1) = \frac{R_{21}(\rho_1)}{\rho_1}$$

quando al posto di ρ_1 si sostituisca ρ_1^0 . Abbiamo in secondo luogo l'inclinazione della tangente alla curva di riduzione nel punto M , cioè:

$$(9, 4) \quad R'_{21}(\rho_1) = \frac{d R_{21}(\rho_1)}{d \rho_1}$$

per $\rho_1 = \rho_1^0$. Chiameremo *prezzo relativo della vita* tra [2] e [1], per il reddito ρ_1 , il rapporto definito dalla (9, 3), mentre daremo alla (9, 4) il nome di *prezzo marginale della vita* tra [2] e [1] per il reddito ρ_1 .

Il prezzo relativo della vita $P_{21}(\rho_1)$ esprime la quantità per cui bisogna moltiplicare ρ_1 per ottenere il valore corrispondente ρ_2 . In altre parole:

$$(9, 5) \quad \rho_2 = P_{21}(\rho_1) \cdot \rho_1.$$

Il concetto di prezzo relativo della vita è quindi quello che più si avvicina al concetto classico di « prezzo della vita ». La differenza sta solo nel fatto che il moltiplicatore P_{21} è ora considerato come funzione di ρ_1 .

A prima vista, la formulazione precedente del problema dei numeri indici può sembrare un po' strana; ma penso che ad una riflessione più profonda, essa verrà trovata plausibile. Il considerare P_{21} come funzione di ρ_1 è ciò che veramente si fa in pratica, sebbene non ne siano state tratte le conseguenze teoriche. Ad esempio: l'inchiesta FORD ha lo scopo di indagare i prezzi in alcune città d'Europa in confronto dei prezzi a Detroit per trovare una base di confronto pei salari degli operai in questi luoghi. Il Ministero degli Esteri degli Stati Uniti studia da lungo tempo un problema simile per la determinazione degli stipendi dei proprii ambasciatori e per gli impiegati delle Legazioni nei diversi paesi del mondo. È da prevedere che il rapporto dei prezzi della vita, ad esempio, a Roma e a Berlino, risulterà esattamente lo stesso, tanto se è definito mediante un confronto fra i salari degli operai, quanto se è definito mediante un confronto di stipendi di ambasciatori? Certamente no. Dicendo che P_{21} è funzione di ρ_1 non facciamo altro che tener conto di un aspetto della variazione nel concetto di prezzo della vita. Senza dubbio vi sono anche molti altri fattori, oltre l'altezza del reddito, che tendono a produrre una variazione nel rapporto considerato. Ciò mostra

semplicemente che anche l'ipotesi che P_{21} sia funzione di ρ_1 non è abbastanza generale per tener conto in modo completo delle circostanze della situazione reale. Ma, se non altro, l'ipotesi che P_{21} sia funzione di ρ_1 è più vicina alla realtà che la semplice ipotesi che essa sia una costante. Considerazioni dello stesso genere dovrebbero valere quando ci si riferisse non ai prezzi generali della vita, ma ad altre specie di prezzi che sono spesso oggetto della costruzione di numeri indici: prezzi delle merci all'ingrosso, prezzi generali del vitto, ecc.

I concetti sviluppati fin qui portano a concludere che il problema di determinare il prezzo della vita equivale al problema di stabilire un principio in base al quale ogni reddito ρ_1 in [1] possa esser fatto corrispondere ad un reddito ρ_2 in [2]. Se le condizioni di vita non sono molto simili nelle due situazioni, sembra estremamente difficile dedurre una simile corrispondenza dalla semplice osservazione diretta di prezzi e quantità. La difficoltà si presenta già nel caso semplice in cui P_{21} è supposto costante; e si presenterebbe a maggior ragione quando P_{21} fosse considerato funzione di ρ_1 . In particolare, le difficoltà sembrerebbero virtualmente insormontabili quando i confronti fossero fatti nello spazio anzichè nel tempo.

Sorge quindi la questione se esista un parametro economico che sia un puro numero, definito soltanto da prezzi e quantità nel punto [1] e soltanto da prezzi e quantità nel punto [2] (sicchè non sia necessario alcun confronto diretto fra prezzi e quantità nei punti [1] e [2]) e che inoltre offra la possibilità di stabilire una corrispondenza plausibile fra ρ_1 e ρ_2 .

Se disponessimo di una curva attendibile dell'utilità della moneta per la situazione [1] e di una curva analoga per la situazione [2], la flessibilità della moneta offrirebbe forse il parametro cercato. In fatto però, se desideriamo mantenere la nostra definizione del reddito reale in termini assoluti, indipendentemente dalle variazioni geografiche e storiche della natura dei beni consumati, sembra abbastanza plausibile — o piuttosto, sembra inevitabile — connettere la definizione del reddito reale con qualche caratteristica fondamentale del comportamento umano, della quale sia nota una dipendenza molto stretta dal tenore di vita dell'individuo considerato. Una simile caratteristica del comportamento potrebbe essere il modo in cui l'individuo reagisce ad un aumento del reddito. E una misura quantitativa del comportamento stesso è offerto appunto dalla flessibilità della moneta.

L'applicazione pratica di questo principio potrebbe essere fatta al modo seguente. Supponiamo che le funzioni della flessibilità della moneta per [1] e [2], $w_1(\rho_1)$ e $w_2(\rho_2)$, siano state determinate con un metodo qualsiasi, e supponiamo che esse siano entrambe funzioni monotone sicchè un dato valore \check{w}_1 determini univocamente un valore ρ_1 ed un dato valore \check{w}_2 determini univocamente un valore ρ_2 . Se così è, possiamo stabilire la corrispondenza tra ρ_1 e ρ_2 col procedimento seguente. Scegliamo prima un certo valore di ρ_1 e determiniamo la flessibilità \check{w}_1 che corrisponde ad esso in [1]. Passiamo poi al punto della curva di flessibilità relativa a [2] nel quale la flessibilità

ha il valore \check{w}_1 , e finalmente leggiamo qual valore del reddito ρ_2 in [2] corrisponda a questa flessibilità. In altre parole, indichiamo con:

$$(9, 6) \quad \rho_2 = R_2(\check{w}_2)$$

la funzione inversa di $\check{w}_2(\rho_2)$; in conseguenza del precedente procedimento di associazione, la funzione R_{21} definita dalla (9, 2) diventerà eguale a:

$$(9, 7) \quad \rho_2 = R_{21}(\rho_1) = R_2[\check{w}_1(\rho_1)]$$

In virtù della nostra ipotesi che $\check{w}_1(\rho_1)$ e $\check{w}_2(\rho_2)$ siano funzioni monotone, la (9, 7) definirà in modo univoco ρ_2 in funzione di ρ_1 . La legge di associazione (9, 7) può essere presentata in forma tabulare, come appare nella seguente Tavola VI.

Tavola VI.

(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
Valore assoluto della flessibilità della moneta	Reddito tedesco computato in Reichsmark	Reddito americano computato in dollari	Prezzo della vita negli Stati Uniti confrontato con quello della Germania, sulla base della moneta attuale	Prezzo della vita negli Stati Uniti confrontato con quello della Germania, sulla base dell'oro
$-\check{w}$	ρ_1	ρ_2	P_{21}	
2.0	500	200	0.400	1.68
1.9	580	234	0.404	1.69
1.8	615	250	0.407	1.71
.....
.....

Abbiamo scelto come esempio e riportato in questa tavola un confronto fra la Germania e gli Stati Uniti. Nella colonna (I) sono riportati i valori della flessibilità della moneta; nella colonna (II) sono riportati i redditi in Reichsmark che, in base alla curva tedesca della flessibilità della moneta, corrispondono ordinatamente a tali valori della flessibilità; nella colonna (III) sono riportati invece i redditi in dollari che, in base alla curva americana della flessibilità, corrispondono ordinatamente ai medesimi valori della flessibilità stessa; nella colonna (IV) sono dati i valori del rapporto $P_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ tra i numeri delle colonne (III) e (II), rapporto che definisce il prezzo della vita in base alla equazione (9, 3). Il punto essenziale a questo riguardo è che il rapporto P_{21} varia con ρ_1 . Se moltiplichiamo i valori di esso per il contenuto di oro del dollaro e li dividiamo per il contenuto di oro del Reichsmark, otteniamo il confronto del prezzo della vita espresso sulla base aurea. Quest'ultimo rapporto è dato nella colonna (V) della tavola. In modo analogo può essere fatta una riduzione sulla base di una qualsiasi parità mone-

taria, indipendentemente dal fatto che i paesi considerati abbiano oppure no, la convertibilità in oro.

La tavola VI non è costruita su osservazioni effettive ed ha soltanto lo scopo di servire da esempio.

Come modificazione al procedimento precedente, può essere riconosciuta l'utilità di stabilire un rapporto tra \check{w}_2 e \check{w}_1 , non ponendo semplicemente \check{w}_2 eguale a \check{w}_1 , ma ponendo per esempio \check{w}_2 eguale a \check{w}_1 aumentato di una costante, o eguale a \check{w}_1 moltiplicato per una costante, o ancora eguale a una

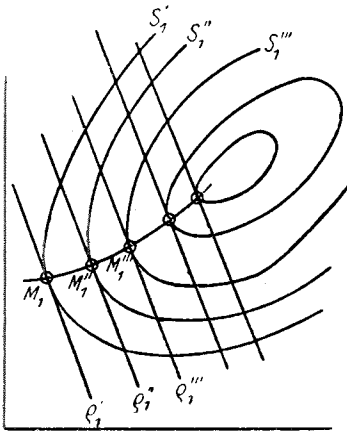


Fig. 15 a. — Superficie di indifferenza in [1].

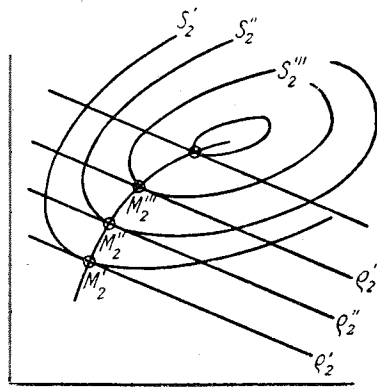


Fig. 15 b. — Superficie di indifferenza in [2].

funzione semplice di \check{w}_1 . Un procedimento di questo genere può offrire il mezzo di superare le difficoltà che sorgono quando esiste qualche differenza sistematica tra la composizione tipica dei bisogni in [1] e la composizione tipica dei bisogni in [2], differenza che introduce un elemento di perturbazione nel confronto delle flessibilità.

Tutta questa analisi può facilmente essere generalizzata al caso in cui non si parta dall'ipotesi che l'utilità nominale della moneta sia della forma (1, 2), ma si adotti l'ipotesi più generale (1, 1). In questo caso il principio di associazione fra ρ_1 e ρ_2 può essere meglio espresso ricorrendo alla nozione di *superficie di indifferenza*. Ammettiamo che la natura della composizione dei bisogni di un individuo tipico nell'istante di tempo (o nel luogo) [1] sia data da una serie di superficie di indifferenza sul tipo di quelle indicate dalla fig. 15 a. Analogamente supponiamo che la fig. 15 b rappresenti una serie di superficie di indifferenza per l'individuo tipico in [2]. Gli assi sono assi di quantità per le merci. Per semplicità abbiamo considerato soltanto due merci. Non è necessario che le composizioni dei bisogni in [1] e in [2] siano identiche sotto ogni rapporto. E non è neppure necessario supporre che vi sia in [1] e in [2] lo stesso tipo di merci; bisogna però ammettere che esista qualche principio in base al quale una qualunque superficie di indifferenza

in [2] sia associata con una determinata superficie di indifferenza in [1] e viceversa. Un principio di questo genere, cioè il principio della flessibilità, è discusso qui di seguito.

Siano S'_1 ed S'_2 , S''_1 ed S''_2 , S'''_1 ed S'''_2 , ... le serie di superficie di indifferenza corrispondenti in [1] e in [2]. La situazione dei prezzi (cioè l'insieme dei prezzi singoli) si presume sia pure data, tanto in [1] quanto in [2]. In conseguenza è possibile determinare di quali redditi nominali ρ'_1 , ρ''_1 , ρ'''_1 ... l'individuo considerato abbia bisogno in [1] perchè l'equilibrio degli scambi sia realizzato per lui in un punto che giace rispettivamente sulle superficie S'_1 , S''_1 , S'''_1 ... Questi redditi saranno quelli rappresentati da piani di bilanci tangenti rispettivamente alle superficie S'_1 , S''_1 , S'''_1 , ... (vedi fig. 15 a). Allo stesso modo, è possibile determinare i redditi ρ'_2 , ρ''_2 , ρ'''_2 ... associati alle superficie S'_2 , S''_2 , S'''_2 , ... Supponiamo per semplicità che la corrispondenza fra i redditi ρ_1 e le superficie S_1 sia univoca, e che sia univoca analogamente anche la corrispondenza tra i redditi ρ_2 e le superficie S_2 .

Se un individuo aumenta il proprio reddito in [1], egli si muoverà lungo la curva M'_1 , M''_1 , M'''_1 , ... Tenendo conto di questa variazione, si può definire il concetto di flessibilità della moneta in modo che a ciascun punto della curva M'_1 , M''_1 , M'''_1 , ... sia associato un certo valore della flessibilità. Allo stesso modo, può essere fatto corrispondere un valore della flessibilità della moneta a ciascun punto della curva M'_2 , M''_2 , M'''_2 , ... Ciò offre un mezzo per stabilire una corrispondenza univoca tra le superficie S_1 ed S_2 utilizzando valori corrispondenti delle flessibilità come abbiamo spiegato sopra.

Poichè esiste una corrispondenza univoca tra le superficie di indifferenza S_1 ed S_2 , il procedimento precedente definirà una corrispondenza univoca fra i redditi ρ_1 e ρ_2 , cioè definirà ρ_2 come funzione di ρ_1 , e definirà così anche il concetto di prezzo della vita (1).

È ovvio che se la proposta qui fatta di considerare il prezzo della vita come una funzione e non come un numero viene accolta, la questione di assoggettare l'indice relativo a soddisfare a determinate condizioni deve essere formulata in modo diverso da quello adottato quando l'indice viene considerato come un numero.

(1) L'idea di valersi del concetto di utilità per definire un numero indice è stata considerata da vari autori: ad esempio, KNUT WICKSELL, F. Y. EDGEWORTH, ed altri. Cfr. anche l'articolo del dott. ROYAL MEEKER, *Cost of Living* nella « Encyclopaedia Britannica ». Sembra tuttavia che nessuno di questi economisti si sia valso del concetto di utilità nel modo indicato nella discussione precedente.

X. — L'UTILITÀ DELLA MONETA E LA CURVA DELL'OFFERTA DI LAVORO

Sebbene la questione della curva di offerta di lavoro e dei fattori che la determinano sia stata oggetto di molte discussioni, non sembra che gli aspetti più complicati del problema siano stati chiariti finora. Nel presente capitolo mi varrò della nozione di utilità della moneta per cercare di portare un po' di luce in questo argomento.

La curva di offerta di lavoro può essere brevemente definita come la curva che mostra i rapporti di dipendenza tra il numero delle ore lavorative per giornata, y , e la paga oraria, q . Questa è tuttavia soltanto una definizione preliminare. Le varie nozioni che entrano nel concetto di curva di offerta di lavoro debbono essere più esattamente specificate. Un punto che ha bisogno di chiarimento è quello della misura nella quale, nell'attuale sistema di salari basato su pattuizioni collettive, il singolo operaio ha la possibilità di variare la quantità di lavoro che egli fornisce. L'analisi che segue non tiene conto di una simile possibilità. Preseindendo completamente dal fatto se sia oppur no possibile al singolo lavoratore variare la sua offerta di lavoro, è certo che il modo in cui le ore di lavoro ed il salario orario sono calcolati *in media* per il gruppo di lavoratori compresi nell'accordo collettivo, ha una parte molto importante nella conclusione dell'accordo collettivo stesso. La funzione di offerta di lavoro può sempre essere considerata come espressione di una tale valutazione media o tipica. E, se esiste per ciascun lavoratore la possibilità di variare la sua offerta di lavoro, anche la funzione di offerta di lavoro assume un significato individuale.

Dobbiamo poi considerare il significato dell'espressione « ore di lavoro ». Quando diciamo che y rappresenta le ore di lavoro, dobbiamo intendere questa come un'espressione semplificata, usata per brevità. In un caso reale, y non potrebbe certamente essere misurato soltanto con l'orologio; potrebbe essere necessaria qualche correzione per l'intensità variabile del lavoro; potrebbe anche essere necessario esprimere y in termini di numero di oggetti eseguiti, o con una formula più o meno complicata nella quale entrino sia le ore di lavoro che il numero degli oggetti eseguiti, ecc. Il punto essenziale è che y dovrebbe essere espresso come qualche cosa *in rapporto alla quale* viene computato il salario totale; di modo che sia possibile definire il concetto di saggio di salario q . Tenuto conto di queste premesse e limitazioni, dovremo nel seguito, per brevità, continuare a chiamare « ore » le unità in cui y è misurato.

Quando il numero delle ore di lavoro in un dato giorno aumenta, aumenta la disutilità marginale del lavoro v . Possiamo considerare v come funzione di y :

(10, 1)

$$v = v(y)$$

e rappresentarla con una curva, come nella fig. 16. Vi sarà un certo minimo y_0 di lavoro giornaliero che l'individuo avrà bisogno di fare per il piacere stesso del lavoro. In altri termini, y_0 è il punto in cui la disutilità del lavoro passa dal negativo al positivo. Se un individuo deve lavorare più di y_0 ore al giorno, col lavoro sarà connessa una disutilità effettiva. Se l'individuo è impedito di lavorare fino a y_0 ore al giorno, il lavoro ha una disutilità negativa, cioè

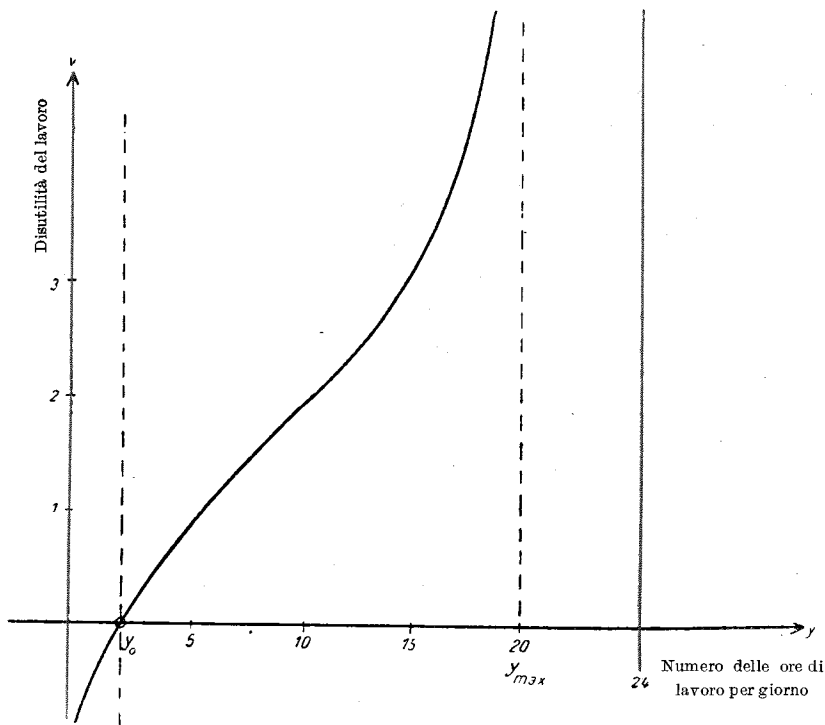


Fig. 16. — Curva di disutilità del lavoro.

l'esecuzione del lavoro appare effettivamente un *bene* con utilità positiva. Per l'analisi che segue ci basta di tener conto della parte della curva di disutilità del lavoro che si trova a destra del punto y_0 .

Un altro punto notevole sull'asse delle ascisse nella fig. 16 è quello che indica il massimo fisiologico di lavoro giornaliero che l'individuo non può oltrepassare senza esaurimento. Lo indicheremo con y_{max} . Se y è effettivamente misurato con l'orologio, y_{max} si troverà, come è naturale, un po' prima del limite estremo $y = 24$. In pratica il massimo fisiologico non avrà un valore assolutamente fisso, valido per ciascun giorno, ed avrà invece soltanto un significato di media. Eventualmente, per uno o più giorni sarebbe anche possibile lavorare continuamente; ma, per avere un quadro perfettamente realistico del processo di esaurimento, dovremmo seguire l'individuo

di giorno in giorno e, per così dire, studiare storicamente il suo esaurimento. Tuttavia i particolari di questo processo non sono essenziali per lo scopo che ora perseguiamo. Qui sarà sufficiente tener conto del processo di esaurimento solo in quanto ciò può essere fatto a mezzo della introduzione del parametro y_{max} .

In qualsiasi punto della curva di disutilità del lavoro possiamo considerare la flessibilità del lavoro definita da:

$$(10, 2) \quad \check{v}(y) = \frac{dv(y)}{dy} \cdot \frac{y}{v(y)}.$$

La natura della curva di disutilità del lavoro sarà naturalmente uno dei fattori essenziali della variazione dell'offerta di lavoro in relazione al saggio del salario; ma non è affatto il solo fattore da cui dipenda il rapporto fra queste quantità. Ve ne sono in particolare due altri che hanno una parte importante: la *composizione del reddito* e la curva di utilità della moneta.

Ci occuperemo innanzi tutto un po' estesamente della natura della composizione del reddito, descrivendola a mezzo di certe «flessibilità» caratteristiche che avranno importanza per gli sviluppi successivi. Questo elemento, di importanza vitale, mi sembra di solito trascurato nella discussione dell'offerta di lavoro. Dedurremo poi una serie di formule generali nelle quali le elasticità dell'offerta di lavoro saranno espresse in termini di flessibilità della composizione del reddito, di flessibilità della disutilità del lavoro, di flessibilità della moneta e di alcuni altri fattori. Infine, ci varremo delle formule ottenute per una discussione più approfondita di alcuni importanti casi speciali.

Con l'espressione «composizione del reddito» intendiamo il modo in cui la remunerazione derivante dal lavoro, figura come *elemento* nel totale delle entrate di bilancio dell'individuo. In pratica il reddito da lavoro in un determinato giorno sarà sempre considerato nei suoi rapporti col reddito da lavoro in altri giorni, e possibilmente anche col reddito da altre fonti. Anche la persona meno previdente penserà a più di un giorno, quando si tratti di disporre del proprio reddito. Per tener conto in modo adeguato di questo fatto, dovremmo entrare in uno studio sistematico del risparmio, al quale invece rinunziamo in questo luogo. Terremo conto soltanto del «riporto» (trasferimento) di reddito da un periodo ad un altro, in quanto ciò possa essere fatto ammettendo che il periodo di reddito, cioè il periodo al quale si riferisce la funzione di utilità della moneta $w(r)$, sia più lungo del periodo — il giorno — al quale si riferisce la funzione di disutilità del lavoro, $v(y)$. Per brevità, chiameremo «anno» il periodo al quale vengono riferite le considerazioni sul reddito; ma nella nostra argomentazione non vi sarà nulla che si basi sulla nozione di anno nel senso del calendario. Ammetteremo soltanto che l'anno di reddito comprenda un certo numero di n giornate di lavoro.

Indicheremo con $1, 2, \dots$ i giorni di lavoro di un anno, e con y_1, y_2, \dots, y_n il numero delle ore di lavoro in tali giorni. Indicheremo ancora con q_1, q_2, \dots, q_n i saggi dei salari avutisi ordinatamente nei giorni medesimi. In generale non supporremo che si abbia per tutto l'anno lo stesso saggio di salario.

Il modo più semplice in cui il reddito totale nominale annualmente spendibile può dipendere dai salari giornalieri, è quello della sommazione lineare, senza aggiunta di redditi da altre fonti. In questo caso si ha:

$$(10, 3) \quad \rho = y_1 q_1 + y_2 q_2 + \dots + y_n q_n.$$

Se vi è un certo reddito annuo σ proveniente da una fonte diversa dal lavoro considerato, si ha:

$$(10, 4) \quad \rho = y_1 q_1 + y_2 q_2 + \dots + y_n q_n + \sigma.$$

E se sono applicate delle imposte, per esempio nella misura percentuale t pei redditi da lavoro, nella misura percentuale τ pei redditi da altre fonti, ed una imposta per testa T , il reddito annuo spendibile diventerà:

$$(10, 5) \quad \rho = (y_1 q_1 + \dots + y_n q_n) (1 - t) + \sigma(1 - \tau) - T.$$

Le formule (10, 3), (10, 4), (10, 5) offrono degli esempi di composizione del reddito; ma naturalmente sono possibili molte altre situazioni più complicate. Per assicurare alle nostre considerazioni la massima possibile generalità, ammetteremo semplicemente che il reddito totale annualmente spendibile sia una funzione:

$$(10, 6) \quad \rho = \rho(y_1, y_2, \dots, y_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

delle variabili indicate. Per caratterizzare la natura di questa funzione introduciamo le sue derivate parziali, che indicheremo al modo seguente:

$$(10, 7) \quad \rho'_i = \rho'_i(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n) = \frac{\partial \rho(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n)}{\partial y_i}$$

$$(10, 8) \quad \rho'_{(j)} = \rho'_{(j)}(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n) = \frac{\partial \rho(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j}$$

Introduciamo inoltre le *flessibilità parziali*:

$$(10, 9) \quad \rho_i = \rho_i(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n) = \frac{\partial \rho(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{\rho(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}$$

$$(10, 10) \quad \rho_{(j)} = \rho_{(j)}(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n) = \frac{\partial \rho(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}{\partial q_j} \cdot \frac{q_j}{\rho(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}$$

e finalmente le *accelerazioni*:

$$(10, 11) \quad \rho_{ik} = \frac{\partial \rho'_i(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}{\partial y_k} \cdot \frac{y_k}{\rho'_i(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}$$

$$(10, 12) \quad \rho_{i(k)} = \frac{\partial \rho'_{(j)}(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}{\partial q_k} \cdot \frac{q_k}{\rho'_{(j)}(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}$$

Se la composizione del reddito è della forma speciale (10, 5), e σ , t , τ , T sono indipendenti dalle y e dalle q , abbiamo semplicemente:

$$(10, 13) \quad \rho'_i = q_i(1 - t)$$

$$(10, 14) \quad \rho'_{(i)} = y_j(1 - t)$$

$$(10, 15) \quad \rho_i = \frac{q_i y_i(1 - t)}{\rho}$$

$$(10, 16) \quad \rho_{(i)} = \frac{q_j y_j(1 - t)}{\rho}$$

Se l'una o l'altra delle imposte t , τ è progressiva, o se vi sono altre complicazioni nella composizione del reddito spendibile, le formule semplici (10, 13) a (10, 16) non sono più valide.

Quando siano note le flessibilità ρ_i , $\rho_{(i)}$, è possibile esprimere la variazione percentuale che sarà prodotta in ρ da piccole variazioni percentuali assegnate delle y o delle q . Se y_1 subisce un incremento (o decremento) nella misura percentuale $\frac{\delta y_1}{y_1}$, y_2 nella misura percentuale $\frac{\delta y_2}{y_2}$, ..., la variazione percentuale risultante in ρ sarà:

$$(10, 17) \quad \frac{\delta \rho}{\rho} = \rho_1 \frac{\delta y_1}{y_1} + \rho_2 \frac{\delta y_2}{y_2} + \dots + \rho_n \frac{\delta y_n}{y_n}$$

Analogamente, se q_1 viene aumentato (o diminuito) nella misura percentuale $\frac{\delta q_1}{q_1}$, q_2 nella misura percentuale $\frac{\delta q_2}{q_2}$, ..., la variazione percentuale in ρ sarà:

$$(10, 18) \quad \frac{\delta \rho}{\rho} = \rho_{(1)} \frac{\delta q_1}{q_1} + \rho_{(2)} \frac{\delta q_2}{q_2} + \dots + \rho_{(n)} \frac{\delta q_n}{q_n}$$

Le formule precedenti sono basate sull'ipotesi che le y e le q relative ai singoli giorni possano variare in modo indipendente. A volte tuttavia, entrano in azione fattori che tendono a conservare costante per un certo periodo il saggio del salario q (contratti di lavoro per lunghe durate, ecc.); e possono esservi anche fattori che tendono a mantenere y allo stesso livello per un certo periodo. Introduciamo allora una serie di *flessibilità considerate lungo un intervallo* la quale esprimerà la misura percentuale della variazione del reddito annuo spendibile corrispondente ad una variazione del numero giornaliero delle ore di lavoro che si mantenga costante per una certa successione di giorni, per esempio per i giorni (1, 2, ...), e nell'ipotesi che gli altri elementi rimangano invariati. In altre parole, supponiamo che sia:

$$(10, 19) \quad \frac{\delta y_1}{y_1} = \frac{\delta y_2}{y_2} = \dots = \frac{\delta y_v}{y_v}$$

che il valore comune dei rapporti (10, 19) sia diverso da zero e che le altre δy e le δq siano nulle. Consideriamo in questa ipotesi la relazione:

$$(10, 20) \quad \rho_{1,2} \dots = \frac{\delta \rho}{\rho} / \frac{\delta y_k}{y_k}$$

dove k è uno qualunque dei numeri 1, 2, ... v . Il rapporto (10, 20) esprime la flessibilità del reddito rispetto ad una variazione delle ore di lavoro, considerata lungo un intervallo di tempo. Deve essere rilevato che la (10, 19) non implica l'ipotesi che si abbia effettivamente $y_1 = y_2 = \dots = y_v$, ma che in molti casi in cui è plausibile ammettere che le (10, 19) siano verificate, risulta soddisfatta anche la condizione ulteriore $y_1 = y_2 = \dots = y_v$.

Analogamente supponiamo che sia:

$$(10, 21) \quad \frac{\delta q_1}{q_1} = \frac{\delta q_2}{q_2} = \dots = \frac{\delta q_v}{q_v}$$

e che gli altri incrementi δq e gli incrementi δy siano nulli. Consideriamo in questa ipotesi il rapporto:

$$(10, 22) \quad \rho_{(1,2 \dots v)} = \frac{\delta \rho}{\rho} / \frac{\delta q_k}{q_k}$$

dove k è uno qualunque dei numeri 1, 2, ... v . Esso esprime la flessibilità del reddito in relazione ad una variazione del saggio del salario considerata per un certo intervallo di tempo.

In particolare, se l'intervallo abbraccia l'intero anno, usiamo la notazione:

$$(10, 23) \quad \rho_* = \rho_{1,2 \dots n}$$

$$(10, 24) \quad \rho_{(*)} = \rho_{(1,2 \dots n)}$$

La flessibilità presa lungo un intervallo di tempo per un determinato periodo è uguale alla somma delle flessibilità giornaliere nel periodo stesso. Abbiamo cioè:

$$(10, 25) \quad \rho_{(1,2 \dots v)} = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_v$$

e

$$(10, 26) \quad \rho_{(1,2 \dots v)} = \rho_{(1)} + \rho_{(2)} + \dots + \rho_{(v)}$$

La (10, 25) è ricavata semplicemente introducendo la (10, 19) nella (10, 17) e tenendo conto della definizione (10, 20); la (10, 26) è ottenuta in modo analogo.

Allo stesso modo che abbiamo considerato le flessibilità giornaliere e le flessibilità lungo un certo intervallo, della funzione ρ , possiamo considerare le flessibilità giornaliere e le flessibilità lungo un certo intervallo della funzione ρ'_i definita dalla (10, 7). Le flessibilità giornaliere di ρ'_i sono già definite dalle (10, 11) e (10, 12). Indicheremo con $\rho_{i;1,2 \dots v}$ e con $\rho_{i(1,2 \dots v)}$ le flessibilità

di ρ_i considerate lungo un intervallo di tempo e prese in relazione ad una variazione delle y e delle q ; le espressioni di esse sono:

$$(10, 27) \quad \rho_{i; 1, 2 \dots v} = \rho_{i1} + \rho_{i2} + \dots + \rho_{iv}$$

$$(10, 28) \quad \rho_{i(1, 2 \dots n)} = \rho_{i(1)} + \rho_{i(2)} + \dots + \rho_{i(n)}$$

ρ_{ik} e $\rho_{i(k)}$ sono i valori definiti dalla (10, 11) e (10, 12). In particolare quando l'intervallo abbraccia tutto l'anno, useremo la notazione:

$$(10, 29) \quad \rho_{i*} = \rho_{i; 1, 2 \dots n}$$

$$(10, 30) \quad \rho_{i(*)} = \rho_{i(1, 2 \dots n)}$$

Nel seguito considereremo il prezzo annuo della vita P , come funzione, fra l'altro, dei saggi dei salari; porremo cioè:

$$(10, 31) \quad P = P(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Defineremo ancora la natura di questa funzione a mezzo delle flessibilità giornaliere:

$$(10, 32) \quad P_{(j)} = \frac{\partial P(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j} \cdot \frac{q_j}{P(q_1, \dots, q_n)}$$

e delle flessibilità prese lungo un intervallo di tempo:

$$(10, 33) \quad P_{(1, 2 \dots v)} = P_{(1)} + P_{(2)} + \dots + P_{(v)}.$$

In particolare quando l'intervallo abbraccia l'intero anno, useremo la notazione:

$$(10, 34) \quad P_{(*)} = P_{(1, 2 \dots n)}.$$

Il procedimento precedente di considerare i saggi di salario o le ore di lavoro separatamente per ciascun giorno o per determinate sezioni di anno contribuisce a rendere più realistica la comune concezione statistica del meccanismo dell'offerta di lavoro. Ma è ovvio come il procedimento stesso non possa dare un quadro completo dei fenomeni che effettivamente si producono in un mercato continuamente variabile. Nella migliore ipotesi, esso costituisce soltanto un sostituto di una vera analisi dinamica delle instabilità del mercato del lavoro.

Un terzo fattore che determina la forma della curva di offerta di lavoro è la funzione $w(r)$ della utilità della moneta. Vi sono in particolare in questa funzione due punti corrispondenti a due valori caratteristici dell'ascissa, cioè del reddito reale, i quali hanno una parte importante nella presente analisi; tali valori sono il reddito reale r_0 , corrispondente al minimo fisico di esistenza, ed il reddito reale r_1 , corrispondente al punto in cui il valore assoluto della flessibilità della moneta, — $\dot{w}(r)$, passa da valori maggiori dell'unità a valori

minori dell'unità. I due punti della curva corrispondenti a questi valori del reddito possono essere chiamati *punto di minimo di esistenza* e *punto iperbolico*; e l'ultimo è un punto in cui la curva di utilità della moneta è tangente ad una iperbole equilatera.

Abbiamo ora gli elementi necessari per procedere ad una indagine più approfondita del modo in cui i tre fattori, curva di disutilità del lavoro, composizione del reddito e curva di utilità della moneta determinano l'offerta di lavoro.

L'utilità della moneta e la disutilità del lavoro sono legate, per ciascun giorno da una equazione di equilibrio simile a quella, già studiata, che lega l'utilità della moneta e l'utilità della merce di paragone. Tuttavia le ipotesi molto generali che abbiamo fatte circa la composizione del reddito, impongono la necessità di modificare in un punto l'equazione stessa: al posto del prezzo p della merce, che entra nel denominatore della espressione di α nel secondo membro della (3, 4) non possiamo semplicemente introdurre il saggio del salario q . Dobbiamo invece introdurre la derivata parziale del reddito annuo netto spendibile ρ , presa rispetto al numero delle ore di lavoro nel particolare giorno considerato. In altre parole, se il giorno considerato è il giorno i , dobbiamo sostituire a p la derivata ρ'_i definita dalla (10, 7).

In fatto, supponiamo che il numero delle ore di lavoro del giorno i , cioè y_i , sia aumentato di una piccola quantità δy_i , mentre tutti gli altri elementi rimangono invariati. Ciò importerà una piccola disutilità del lavoro, $v(y_i)\delta y_i$, ed il reddito annualmente spendibile, ρ sarà aumentato della quantità $\rho'_i\delta y_i$. Ma aumentare ρ di questa piccola quantità significa creare una utilità eguale a $\omega(\rho, P)\rho'_i\delta y_i$ dove $\omega(\rho, P)$ è l'utilità della moneta misurata per dollaro, e P indica, come sempre, il prezzo della vita. Poichè la disutilità sofferta e l'utilità acquistata dovrebbero essere eguali, dobbiamo avere:

$$(10, 35) \quad \omega(\rho, P) \rho'_i = v(y_i).$$

L'equazione dell'equilibrio per il giorno i deve quindi essere:

$$(10, 36) \quad w\left(\frac{\rho}{P}\right) = \frac{P}{\rho'_i} v(y_i)$$

la quale è perfettamente simile all'equazione della superficie di consumo, con la sola differenza che i simboli y_i , ρ'_i , v sono sostituiti ai simboli x , p , u .

Introducendo nella (10, 36) al posto di ρ , P , ρ'_i le loro espressioni esplicite, otteniamo per l'equazione dell'equilibrio relativa al giorno i la forma:

$$(10, 37) \quad w\left(\frac{\rho(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)}{P(q_1 \dots q_n)}\right) = \frac{P(q_1 \dots q_n)}{\rho'_i(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)} v(y_i).$$

Se ammettiamo che la natura delle funzioni $w(r)$, $\rho(y_1 \dots y_n, q_1 \dots q_n)$, $P(q_1 \dots q_n)$, $v(y)$ sia nota, la (10, 37) contiene soltanto le due serie di varia-

bili $y_1 \dots y_n$, $q_1 \dots q_n$. Avremmo per ciascun giorno una equazione di equilibrio simile alla (10, 37) e quindi un sistema di n equazioni che si può pensare definisca implicitamente ciascuna delle y_i come funzione degli n saggi di salario $q_1 \dots q_n$. Le indicheremo con:

$$(10, 38) \quad y_i = y_i(q_1 \dots q_n).$$

Le funzioni $y_i = y_i(q_1 \dots q_n)$, (per $i = 1, 2, \dots, n$) così determinate sono le funzioni dell'offerta di lavoro; esse esprimono in qual modo la quantità di lavoro offerta nel giorno i dipenda dai saggi di salario $q_1 \dots q_n$ pagati negli n giorni dell'anno.

Per caratterizzare le funzioni di offerta (10, 38) introdurremo le *elasticità parziali dell'offerta di lavoro*:

$$(10, 39) \quad y_{i(j)} = y_{i(j)}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{\partial y_i(q_1 \dots q_n)}{\partial q_j} \cdot \frac{q_j}{y_i(q_1 \dots q_n)}.$$

La (10, 39) esprime una elasticità presa rispetto ad una variazione del salario per un giorno; essa misura la variazione che ha luogo nell'offerta di lavoro del giorno i quando varia il saggio del salario del giorno j , ma tutti gli altri saggi di salario rimangono invariati. Più precisamente: essa è il rapporto tra la variazione percentuale del lavoro offerto nel giorno i e la corrispondente variazione percentuale del saggio del salario nel giorno j , nell'ipotesi che le variazioni stesse siano piccole. Conoscendo le elasticità parziali $y_{i(j)}$ possiamo ritrovare di qual percentuale $\frac{\delta y_i}{y_i}$ il lavoro offerto nel giorno i aumenterà o diminuirà quando i saggi dei salari nei giorni 1, 2, ... n subiscano piccole variazioni percentuali $\frac{\delta q_1}{q_1}, \dots, \frac{\delta q_n}{q_n}$. Questa variazione dell'offerta di lavoro è data dalla formula:

$$(10, 40) \quad \frac{\delta y_i}{y_i} = y_{i(1)} \frac{\delta q_1}{q_1} + y_{i(2)} \frac{\delta q_2}{q_2} + \dots + y_{i(n)} \frac{\delta q_n}{q_n}.$$

Oltre l'elasticità calcolata rispetto alla variazione nel saggio dei salari in un solo giorno, definita dalla (10, 39), considereremo l'elasticità, presa lungo un intervallo, dell'offerta di lavoro di un dato giorno, in relazione ad una variazione del salario che si sia prolungata per una serie di giorni. In forma più precisa: supponiamo che siano verificate le (10, 21) e definiamo la elasticità dell'offerta di lavoro del giorno i , considerata lungo un intervallo, con la relazione:

$$(10, 41) \quad y_{i(1, 2 \dots v)} = \frac{\delta y_i}{y_i} \Big/ \frac{\delta q_k}{q_k}$$

dove k è uno qualunque dei numeri $1, 2, \dots, v$; supponiamo cioè che i saggi dei salari per i giorni $1, 2, \dots, v$, siano tutti aumentati o diminuiti di una certa percentuale, la stessa per tutti i giorni, mentre i saggi dei salari per gli altri giorni rimangono invariati. Chiediamo allora quale aumento (o diminuzione) percentuale queste variazioni portino nell'offerta di lavoro del particolare giorno i . La percentuale cercata è data dalla (10, 40). Ed il rapporto tra questo aumento percentuale (positivo o negativo) dell'offerta di lavoro nel giorno i , ed il corrispondente aumento percentuale del saggio dei salari nei giorni $1, 2, \dots, v$, è ciò che abbiamo chiamato elasticità dell'offerta di lavoro nel giorno i rispetto ad una variazione dei salari nella serie di giorni $(1, 2, \dots, v)$. In pratica è appunto questo il tipo di elasticità che ha la maggiore importanza.

In virtù della proposizione generale della accumulazione delle elasticità giornaliera in elasticità lungo intervalli di tempo, avremo:

$$(10, 42) \quad y_{i(1, 2 \dots v)} = y_{i(1)} + y_{i(2)} + \dots + y_{i(v)}.$$

In particolare, se l'intervallo di tempo si estende a tutto l'anno, useremo la notazione:

$$(10, 43) \quad y_{i(*)} = y_{i(1, 2 \dots n)}.$$

Dalla discussione precedente risulta che il problema teorico dell'offerta di lavoro, del quale ci stiamo occupando, può essere identificato col problema di studiare le (10, 28) considerate come una serie di funzioni definite implicitamente dal sistema delle equazioni che si ottengono dalla (10, 37) ponendo successivamente $i = 1, 2, \dots, n$. In tale studio le elasticità costituiscono un ausilio prezioso.

Passiamo ora a dimostrare in qual modo sia possibile esprimere, a mezzo della definizione implicita della funzione di offerta di lavoro, le elasticità dell'offerta di lavoro in termini di flessibilità della moneta e di alcune delle altre flessibilità sopra definite.

Sia j un numero determinato della successione $1, 2, \dots, n$. Differenziamo parzialmente l'equazione (10, 37) rispetto a q_j . Osservando che la derivata di $w(r)$ rispetto a r è $\frac{\check{w} \cdot w}{\rho/P}$, che la derivata di ρ rispetto ad y_k è $\frac{\rho_k \rho}{y_k}$, ecc. otteniamo:

$$(10, 44) \quad \frac{\check{w} \cdot w}{\rho/P} \cdot \frac{P \left[\sum_k \frac{\rho_k \cdot \rho}{y_k} \cdot \frac{y_{k(j)} y_k}{q_j} + \frac{\rho_{(j)} \rho}{q_j} \right] - \rho \cdot \frac{P_{(j)} P}{q_j}}{P^2} =$$

$$= \frac{P \check{v} \cdot v}{\rho_i y_i} \cdot \frac{y_{i(j)} y_i}{q_j} + v \cdot \frac{\rho'_i \frac{P_{(j)} P}{q_j} - P \left\{ \sum_k \rho_{ik} \frac{\rho_i}{y_k} \cdot \frac{y_{k(j)} y_k}{q_j} + \frac{\rho_{i(j)} \rho'_i}{q_j} \right\}}{\rho_i^2}$$

Riordinando i termini di questa espressione, ed introducendo per convenienza il simbolo:

$$e_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases},$$

otteniamo:

$$(10, 45) \quad \sum_{k=1}^n (e_{ik} \check{v} - \rho_k \check{w} - \rho_{jk}) y_{k(j)} = \rho_{i(j)} - (-\check{w}) (\rho_{(j)} - P_{(j)}) - P_{(j)}$$

$$\left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right).$$

L'ultima equazione è valida per qualsiasi i e per qualsiasi j . Questo è quindi un sistema di equazioni lineari mediante il quale possono essere determinate le elasticità $y_{k(j)}$. Non sarebbe difficile dare la soluzione del sistema sotto la forma del determinante, ma ciò non è necessario al nostro scopo.

Poichè il coefficiente di $y_{k(j)}$ nella (10, 45) è indipendente da j , estendendo la sommatoria rispetto a j ad entrambi i membri della (10, 45), possiamo dedurre immediatamente il seguente sistema di equazioni per le elasticità considerate lungo un intervallo:

$$(10, 46) \quad \sum_{k=1}^n (e_{ik} \check{v} - \rho_k \check{w} - \rho_{ik}) y_{k(1,2,\dots,v)} = \rho_{i(1,\dots,v)} - (-\check{w}) (\rho_{(1,\dots,v)} - P_{(1,2,\dots,v)}) - P_{(1,2,\dots,v)}.$$

In particolare, se l'intervallo considerato si estende all'intero anno, abbiamo:

$$(10, 47) \quad \sum_{k=1}^n (e_{ik} \check{v} - \rho_k \check{w} - \rho_{ik}) y_{k(*)} = \rho_{i(*)} - (-\check{w}) (\rho_{(*)} - P_{(*)}) - P_{(*)}.$$

Per alcune questioni che saranno discusse in seguito è importante conoscere sotto quali condizioni il lavoro offerto nei vari giorni dell'anno sarà costante. Abbiamo a questo riguardo la proposizione seguente: *affinchè le quantità di lavoro offerte nei vari giorni dell'anno siano eguali, è necessario e sufficiente che siano eguali le derivate ρ'_i* . Ciò si deduce in modo semplice dall'equazione (10, 37) quando si osservi che in essa ρ'_i e $v(y_i)$ sono le sole quantità che dipendano da i . Affinchè le $v(y_i)$ siano eguali fra loro è quindi necessario e sufficiente che lo siano le ρ'_i , e poichè la funzione $v(y)$ è monotona, questa è anche la condizione necessaria e sufficiente perchè siano eguali le y_i . La condizione che tutte le ρ'_i siano eguali può essere interpretata dicendo che la remunerazione del lavoro considerato deve contribuire al reddito totale in modo che non vi sia differenza tra l'effetto prodotto sul reddito totale annuo spendibile da un'ora addizionale di lavoro compiuta in una parte dell'anno e quello prodotto da un'ora addizionale di lavoro compiuta in un'altra parte dell'anno.

La proposizione precedente si riferisce ai valori delle ρ'_i nei punti di equilibrio giornalieri. Possiamo anche porre un'altra questione: se cioè la fun-

zione (10, 7) dipenda da i quando le variabili che figurano in essa possono variare più liberamente. Non ha interesse pratico considerare il caso che la (10, 7) sia indipendente da i quando *tutte* le variabili possono variare in modo indipendente. Nel caso (10, 13) ad esempio, tale indipendenza sarebbe possibile soltanto se fosse $t = 1$, cioè se tutto il reddito da lavoro fosse assorbito dall'imposta. Ma può essere interessante considerare il caso in cui la (10, 7) è indipendente da i identicamente, in tutte le variabili che rimangono quando sono imposte certe condizioni alle $2n$ variabili che figurano in essa.

Considereremo in particolare il caso seguente. Supponiamo che i saggi dei salari pagati nei diversi giorni siano eguali ed imponiamo la condizione che la (10, 7) sia indipendente da i identicamente nella variabile q la quale esprime il valore comune delle q_i , ed indipendente identicamente anche nelle n variabili y_i . In questo caso diremo che la (10, 7) è *semi-identicamente* indipendente da i , o più brevemente, che la composizione del reddito (10, 6) è *semi-identica*. La (10, 13) offre un esempio di un caso di questo genere. Ove nel problema entri il saggio di interesse, o le tasse siano applicate con percentuali varie nelle diverse parti dell'anno, la composizione del reddito non è semi-identica.

Se le quote di salario per i singoli giorni sono eguali, e la composizione del reddito è semi-identica, le quantità di lavoro offerte nei singoli giorni debbono essere uguali. Infatti, se i saggi di salario sono eguali e la composizione del reddito è semi-identica, ρ_i' nella (10, 37) è indipendente da i , il che, per la proposizione precedente, importa che anche y_i è indipendente da i . Evidentemente ciò vale qualunque sia il valore comune dei saggi di salario.

Se i saggi di salario sono eguali e la composizione del reddito è semi-identica, tutto il problema dell'offerta di lavoro si presenta quindi nella seguente forma semplice: y è una funzione di q :

$$(10, 48) \quad y = y(q)$$

implicitamente definita da una equazione di equilibrio della forma:

$$(10, 49) \quad w \left(\frac{\rho(y, q)}{P(q)} \right) = \frac{P(q)}{\rho'(y, q)} v(y)$$

dove $\rho(y, q)$, $\rho'(y, q)$ e $P(q)$ sono funzioni della forma (10, 6) (10,7) e (10, 31) rispettivamente, quando tutte le y e tutte le q sono eguali, e la composizione del reddito è semi-identica. In questo caso l'elasticità dell'offerta di lavoro può essere semplicemente definita con:

$$(10, 50) \quad \check{y} = \check{y}(q) = \frac{dy(q)}{dq} \cdot \frac{q}{y(q)}.$$

Nel caso attuale, questa definizione è identica alla (10, 43). E le flessibilità ρ_* , $\rho_{(*)}$ e $P_{(*)}$ sono ora eguali rispettivamente a:

$$(10, 51) \quad \rho_y = \frac{\partial \rho(y, q)}{\partial y} \cdot \frac{y}{\rho(y, q)}$$

$$(10, 52) \quad \rho_q = \frac{\partial \rho(y, q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{\rho(y, q)}$$

$$(10, 53) \quad P_q = \frac{d P(q)}{d q} \cdot \frac{q}{P(q)}$$

mentre le accelerazioni sono date rispettivamente da:

$$(10, 54) \quad \rho_{yy} = \frac{\partial^2 \rho(y, q)}{\partial y^2} \cdot \frac{y}{\rho'(y, q)}$$

$$(10, 55) \quad \rho_{yq} = \frac{\partial^2 \rho(y, q)}{\partial y \partial q} \cdot \frac{q}{\rho'(y, q)}$$

Ponendo nella (10, 47) $y_{k(*)} = \check{y}$, indipendente da k , avremo \check{y} dalla relazione:

$$(10, 56) \quad \check{y} = \frac{\rho_{yq} - (-\check{w}) (\rho_q - P_q) - P_q}{\check{v} + (-\check{w}) \rho_y - \rho_{yy}}$$

formula che può anche essere ottenuta direttamente differenziando la (10, 49) rispetto a q , nell'ipotesi che y sia funzione di q .

Come esempio di una composizione di reddito che soddisfa alle condizioni sotto le quali la (10, 56) è valida, possiamo considerare quella che otterremo dalla (10, 5) se fosse $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n$ e i parametri delle imposte t , τ , e T fossero costanti indipendenti dalle altre variabili (uno o più parametri di imposte potendo essere nulli).

Abbiamo in questo caso:

$$(10, 57) \quad \begin{aligned} \rho_{ik} &= 0 \\ \rho_{i(k)} = e_{ik} &= \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \end{aligned}$$

Dalla (10, 56), o risolvendo la (10, 47) nell'ipotesi che le (10, 57) siano verificate, otteniamo:

$$(10, 58) \quad \check{y} = \frac{1 - (-\check{w}) \left[\frac{nyq(1-t)}{\rho} - P_q \right] - P_q}{\check{v} + (-\check{w}) \frac{nyq(1-t)}{\rho}}$$

In particolare, se non vi sono imposte ed il prezzo della vita non è sensibilmente influenzato dal saggio dei salari nel lavoro considerato, risulta:

$$(10, 59) \quad \check{y} = \frac{1 - (-\check{w}) \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)}{\check{v} + (-\check{w}) \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)};$$

e nell'ipotesi ancora più particolare che il lavoratore non abbia redditi da altre fonti, cioè nell'ipotesi che sia $\sigma = 0$:

$$(10, 60) \quad \check{y} = \frac{1 - (-\check{w})}{\check{v} + (-\check{w})}.$$

Alle equazioni (10, 58), (10,59), (10, 60) si può naturalmente giungere anche: a) calcolando prima i coefficienti ρ_y , ρ_a , ρ_{yy} , ρ_{ya} direttamente, nell'ipotesi che ρ abbia la forma (10, 5), che tutte le y e tutte le q siano eguali fra loro, che t , τ e T siano costanti; b) introducendo poi i valori ottenuti nella (10, 56).

Procederemo prima ad una discussione più particolare del caso semplice in cui è valida la (10, 60). In questa, tanto \check{v} quanto $(-\check{w})$ sono positive, \check{y} ha lo stesso segno che $1 - (-\check{w})$. Nel presente caso semplicissimo abbiamo quindi la proposizione: *Un aumento del saggio dei salari darà luogo ad un aumento dell'offerta di lavoro pei valori del reddito ai quali corrispondono per la flessibilità della moneta valori assoluti inferiori all'unità.* Ed inversamente, per i valori del reddito ai quali corrispondono valori assoluti della flessibilità della moneta superiori alla unità, un aumento del saggio dei salari porterà una diminuzione dell'offerta di lavoro. Poichè \check{y} non è altro che l'elasticità dell'offerta di lavoro, è evidente che la (10, 60) non soltanto permette di giudicare del senso nel quale la quantità di lavoro offerta varia al variare del saggio dei salari, ma fornisce anche elementi di giudizio per la *velocità* con la quale questa variazione si produce.

Per piccoli valori del reddito, il valore assoluto della flessibilità della moneta è assai elevato, molto superiore all'unità; decresce poi al crescere del reddito, passando per l'unità in corrispondenza di un certo valore r_1 del reddito reale; nel caso in questione quindi, la parte più bassa della curva di offerta di lavoro deve avere una forma simile a quella della curva C nella fig. 17. Cioè a dire: la curva di offerta di lavoro sarà discendente in corrispondenza della parte più bassa della scala dei salari; essa avrà anche approssimativamente la forma di una iperbole equilatera. Le ore di lavoro debbono virtualmente aumentare in proporzione inversa a quella in cui il saggio dei salari viene ulteriormente diminuito. Questa è la così detta situazione dello *sweat-shop* della quale abbiamo avuto esempi in Europa al principio della rivoluzione industriale. Anche oggi situazioni simili possono prodursi quando il lavoratore non ha altre fonti di reddito. Quest'ultima condizione è senza dubbio essenziale in una situazione del tipo di quella

rappresentata dal ramo più basso della curva C nella fig. 17. Man mano che il saggio dei salari aumenta, la quantità di lavoro offerta diminuirà fino ad un certo punto, che nella curva C della fig. 17 è indicato con M_1 , a partire dal quale essa incomincerà a crescere al crescere del saggio dei salari. Questo punto è caratterizzato dal fatto che l'area del rettangolo tratteggiato nella fig. 17 è eguale a quel valore del reddito (computato *pro die*) per il

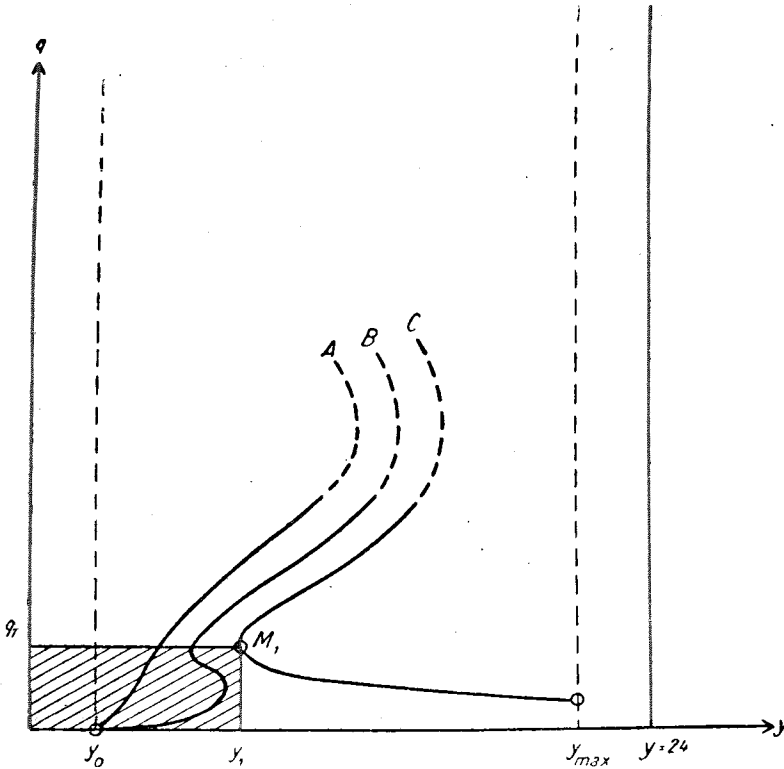


Fig. 17. — Curve di offerta di lavoro.

quale il valore assoluto della flessibilità della moneta si eguaglia all'unità. Poichè supponiamo ora $P = \text{cost}$; possiamo supporre $P = 1$, sicchè il reddito reale e il reddito nominale vengano a coincidere. Il rettangolo tratteggiato della fig. 17 rappresenta evidentemente un reddito (*pro die*), poichè l'area di esso è data dal prodotto del saggio del salario per il numero delle ore di lavoro. Sono incline a ritenere che la porzione di curva immediatamente al disotto di M_1 raffiguri una situazione comune, almeno in molti paesi d'Europa.

Può darsi che in corrispondenza di valori ancora più elevati dei salari la curva di offerta di lavoro si volga di nuovo indietro, come è indicato nel

ramo superiore tratteggiato della curva *C* della fig. 17. La condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che, per redditi molto elevati, il valore assoluto della flessibilità della moneta divenga di nuovo superiore all'unità. Non possediamo per il momento alcuna informazione statistica riguardo a questo estremo della curva di utilità della moneta. E sembra anche dubbio che sia possibile stabilire concezioni analoghe dell'utilità della moneta, riguardo alla parte più bassa ed alla parte più elevata della scala dei redditi. Per la prima, l'utilità della moneta ha un significato definito in termini di consumo, il che non si verifica per la parte più elevata. Alcune ulteriori osservazioni su questo punto saranno fatte nel successivo Capitolo XII del presente lavoro.

In quanto sia plausibile ammettere che per il lavoratore tipico dei nostri giorni il salario costituisca praticamente l'unica fonte di reddito, la situazione rappresentata nella curva *C* della fig. 17 getta una luce interessante sulla lotta per i patti collettivi. Finchè l'equilibrio ha luogo in un punto del ramo più basso della curva (dove la flessibilità dell'utilità della moneta è maggiore di uno) la lotta deve essere particolarmente violenta da parte dei lavoratori. In tale situazione, questi debbono cercare o di mantenere lo *statu quo* o di ottenere simultaneamente aumenti del salario e riduzioni delle ore di lavoro. Considerazioni queste che non possono valere per il ramo superiore della curva.

Non è improbabile che una delle ragioni per cui il mercato americano del lavoro è stato molto più pacifico di quello europeo, risieda nel fatto, messo in luce dall'analisi statistica dell'utilità della moneta, che in America il lavoratore medio ha raggiunto redditi pei quali il valore assoluto della flessibilità dell'utilità della moneta è già inferiore all'unità. In America cioè la lotta di classe dovrebbe verificarsi in qualche punto del ramo superiore della curva *C* nella fig. 17, mentre in Europa essa si sviluppa ancora in un punto del ramo inferiore.

Queste considerazioni hanno un riflesso immediato su un argomento messo in evidenza dal Prof. KNIGHT. Egli sostiene che la curva di offerta di lavoro deve essere *sempre* inclinata verso il basso, e cerca di dimostrarlo col ragionamento seguente. Se, verificatosi un aumento nel saggio dei salari, l'offerta di lavoro si mantiene costante (o anche aumenta), l'utilità della moneta diminuisce. Ma quando l'utilità della moneta diminuisce, l'individuo aumenta i suoi acquisti delle varie merci che consuma. Una di queste è l'ozio; cosicchè, in conseguenza dei fatti indicati, egli aumenterà la quantità di ozio acquistata, cioè diminuirà la quantità di lavoro offerta. Questo ragionamento è però errato. È perfettamente vero che il consumo di un bene, *il cui prezzo non sia variato*, aumenterà al diminuire dell'utilità della moneta; ma rimane sempre dubbio se debba aumentare o diminuire il consumo di un bene nel caso in cui il prezzo di esso ha subito una variazione contemporanea alla diminuzione dell'utilità della moneta. In termini più precisi, la variazione si verificherà, oppure no, secondo che l'utilità della moneta è diminuita in misura più intensa o più lieve di quella in cui è aumentato il prezzo

della merce. Se, come conseguenza di un aumento del saggio dei salari, ha luogo una riduzione dell'utilità della moneta, il *prezzo dell'ozio* non rimane certamente invariato. Esso varia esattamente nella stessa misura in cui varia il saggio dei salari, perchè il prezzo dell'ozio non è altro che il saggio dei salari. La questione è quindi di sapere se la diminuzione dell'utilità della moneta si verifica in misura più o meno intensa che l'aumento del saggio dei salari. Ma la percentuale di cui il saggio dei salari aumenta è, nelle ipotesi semplici che abbiamo adottate, eguale alla percentuale di cui aumenterebbe il reddito se il numero delle ore di lavoro fosse mantenuto invariato. Si tratta quindi di stabilire se la riduzione dell'utilità della moneta abbia luogo in proporzione più forte o più debole di quella secondo la quale il reddito aumenta; o, in altre parole, di stabilire se la flessibilità della moneta sia maggiore o minore dell'unità in valore assoluto. Apportando quindi all'argomento del KNIGHT le modificazioni necessarie, ritorniamo al criterio che avevamo dedotto in principio dalla (10, 60) (1).

Procediamo ora allo studio del caso che segue immediatamente a quello ora considerato, in ordine di semplicità: quello in cui il lavoratore ha qualche fonte di reddito diversa dal lavoro, ma rimangono immutate le altre ipotesi semplici del caso precedente. Avremo dunque:

$$\rho = n q y + \sigma$$

σ essendo il reddito da fonte diversa dal lavoro. Possiamo ancora supporre $P = 1$, sicchè il reddito nominale ρ si eguagli al reddito reale r , e si eguagliano anche i redditi nominale e reale da fonti diverse dal lavoro, sia cioè $\sigma = s$. Per convenienza, nel confronto con la variabile indipendente r che figura in $\check{w}(r)$, sostituiamo qui, tanto per il reddito da lavoro che per il reddito da fonti diverse dal lavoro, i valori reali ai valori nominali: cioè r a ρ ed s a σ .

L'espressione dell'elasticità dell'offerta di lavoro può allora essere scritta nella forma:

$$(10, 61) \quad \check{y} = \frac{\frac{r}{r-s} - (-\check{w})}{\frac{r}{r-s} \check{v} + (-\check{w})}$$

(1) L'errore dell'argomentazione del KNIGHT è già stato rilevato dal prof. ROBBINS (*Economica*, 1930), il quale però fa dipendere il proprio ragionamento da una distinzione fra « prezzo dello sforzo » e prezzo nominale, che mi sembra irrilevante per il problema che ci occupa. — Il prof. PIGOU ha addotto un argomento simile a quello del KNIGHT. Egli sostiene che un'imposta sul reddito farà sempre sì che il lavoratore lavori di più, il che è giusto quando l'applicazione dell'imposta sia fatta per testa o l'imposta colpisca redditi diversi dal reddito del lavoro, ma è errato se l'aliquota dell'imposta è una percentuale fissa del reddito da lavoro. L'effetto di una imposta di questo genere si identifica con quello di una riduzione del saggio dei salari, e quindi dipende dalla flessibilità della moneta.

In questo caso, il senso in cui la quantità di lavoro offerta varierà al variare del saggio dei salari non dipende dalla relazione in cui $(-\check{w})$ sta con l'unità, ma dalla *relazione in cui $(-\check{w})$ sta con l'inversa del rapporto tra il reddito dalla fonte particolare considerata ed il reddito totale*, ossia con $\frac{r}{r-s}$. Se il reddito da fonti diverse dal lavoro è molto importante, è assai probabile che, in qualunque punto di equilibrio, il valore della frazione $\frac{r}{r-s}$ sia maggiore della flessibilità della moneta. In questo caso la curva di offerta di lavoro avrà perciò probabilmente un andamento ascendente in ogni suo punto. Si avrà cioè una curva simile alla curva *A* della fig. 17 (non tenendo conto della parte superiore tratteggiata). Se invece il reddito da fonti diverse dal lavoro è relativamente poco importante, può accadere che vi siano punti in cui la curva di offerta di lavoro abbia un andamento discendente. Dalla (10, 61) può anche essere dedotta la condizione necessaria e sufficiente perchè esistano punti in cui ciò si verifica, e — in caso che esistano — per individuarne la posizione. Costruiamo infatti la rappresentazione grafica della funzione:

$$(10, 62) \quad -\check{W}(r) = \frac{r}{r-s}$$

la quale coincide con l'espressione della *flessibilità della moneta* che si otterrebbe adottando come funzione di *utilità della moneta* la funzione Bernoulliana $\frac{c}{r-s}$; qui tuttavia, s non rappresenta necessariamente il minimo fisico di esistenza r_0 , ma indica una quantità qualunque che può essere eguale maggiore o minore di r_0 ; c è una costante arbitraria.

Indicheremo la (10, 62) col nome di *flessibilità Bernoulliana*, s designando il reddito da fonti diverse dal lavoro. La curva rappresentativa di questa funzione è tracciata nella fig. 18. Il valore assoluto della flessibilità Bernoulliana è infinito per $r = s$ e decresce in modo monotono, fino ad assumere il valore $+1$ per $r = \infty$. Il valore assoluto della flessibilità effettiva della moneta, $-\check{w}(r)$, decresce in modo monotono da $+\infty$ per $r = r_0$, passando per il valore $+1$ che essa assume per $r = r_1$. Se rappresentiamo graficamente la curva della flessibilità reale sullo stesso diagramma su cui è stata tracciata la curva della flessibilità Bernoulliana, può evidentemente accadere che le due curve si intersechino in qualche punto. In relazione ad alcune sezioni della scala dei redditi, la flessibilità effettiva può essere maggiore della flessibilità Bernoulliana, e minore in relazione ad altre. *Le parti della scala dei redditi per cui la flessibilità effettiva della moneta è inferiore in valore assoluto alla flessibilità Bernoulliana, corrispondono alle parti con andamento discendente della curva di offerta di lavoro e viceversa.* (Noi abbiamo bisogno di considerare soltanto la parte della scala dei redditi per cui $r > s$). A seconda della forma della curva della flessibilità effettiva, possiamo avere varie forme

più o meno complicate della curva di offerta di lavoro, nelle quali i rami ascendenti e discendenti si alternano. Nella situazione indicata dalla fig. 18 la flessibilità effettiva è inferiore alla flessibilità Bernoulliana prima del punto M_1 e dopo il punto M_2 ; il contrario avviene tra M_1 ed M_2 . Quindi se la flessibilità effettiva della moneta varia come è indicato nella fig. 18, otterremo una curva di offerta di lavoro simile alla curva B della fig. 17. Di più la natura della curva

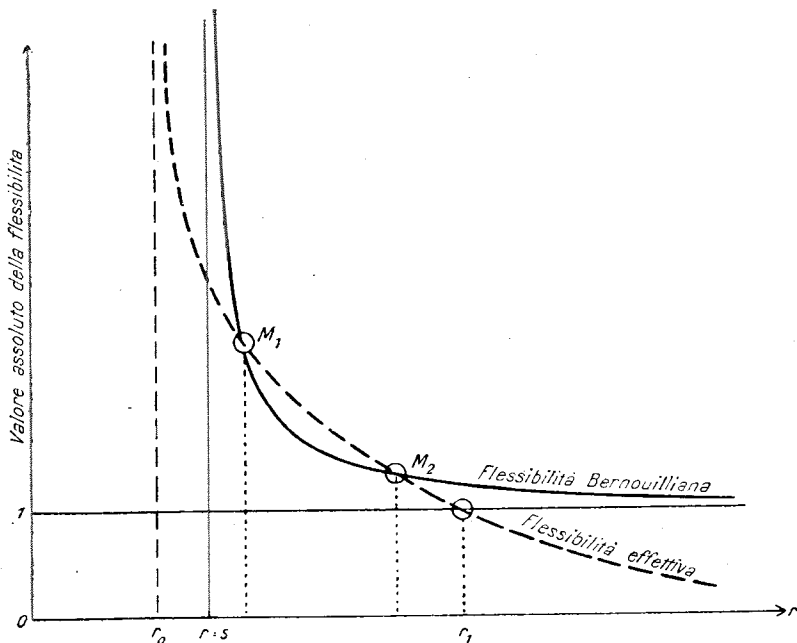


Fig. 18. — Confronto tra la flessibilità effettiva della moneta — $w(r)$ e la flessibilità Bernoulliana — $W(r)$.

di offerta di lavoro varierà in modo caratteristico al variare del reddito s da fonti diverse dal lavoro. Possiamo renderci conto degli effetti di una variazione di s immaginando che l'asintoto della flessibilità Bernoulliana, cioè la verticale $r = s$ della fig. 18, sia spostato verso destra o verso sinistra; se l'asintoto è portato nella posizione $s = r_1$, la flessibilità Bernoulliana deve sempre (per $r > s$) essere maggiore in valore assoluto della flessibilità effettiva, e quindi la curva di offerta da lavoro deve essere crescente in modo monotono come la curva A della fig. 17. Se, passando all'altro estremo, l'asintoto è portato nella posizione $s = 0$ — la quale esprime l'assenza di reddito da fonte diversa dal lavoro — la flessibilità Bernoulliana nella fig. 18 sarà rappresentata da una retta orizzontale con ordinata $+1$. In questo caso la curva di offerta da lavoro ha la forma presentata dalla C della fig. 17.

Una rappresentazione grafica degli effetti prodotti, sia da una variazione del reddito da fonte diversa dal lavoro, s , sia da una variazione della forma

della curva della flessibilità effettiva della moneta, può essere ottenuta col procedimento seguente. Attribuiamo in primo luogo ad s una serie di valori distinti e, per ciascuno di essi, tracciamo il grafico della funzione $\frac{r}{r-s}$. Otter-

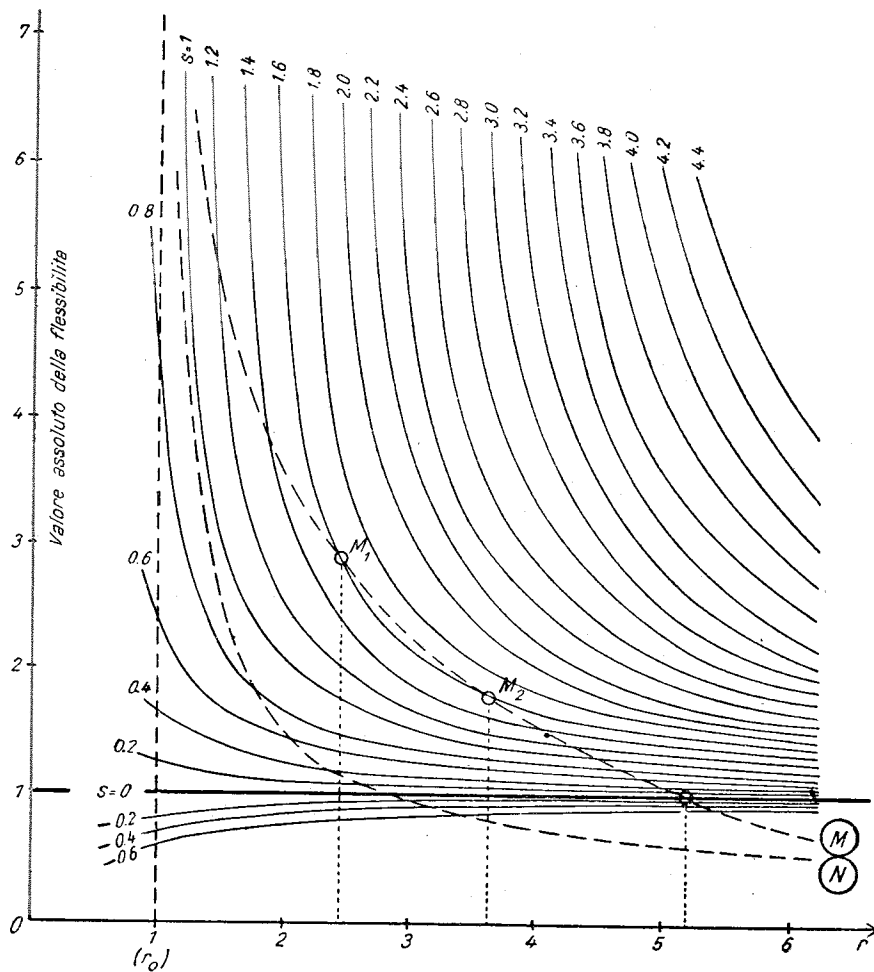


Fig. 19. — Famiglia di curve della flessibilità Bernoulliana.

remo così una famiglia di curve sul tipo di quella mostrata dalla fig. 19. Tracciamo nel medesimo sistema di assi la curva della flessibilità effettiva della moneta (contata positivamente); avremo un nomogramma dal quale ci sarà possibile individuare immediatamente le posizioni in cui la curva di offerta di lavoro sarà ascendente e quelle in cui sarà discendente, in relazione a varie ipotesi sul valore del reddito da fonti diverse dal lavoro.

Supponiamo, ad esempio, che la curva della flessibilità della moneta abbia una forma simile a quella della curva M della fig. 19. Abbiamo scelto in questa l'unità di misura del reddito in modo che $r = 1$ rappresenti il minimo di esistenza, il che si esprime nel fatto che la curva della flessibilità effettiva della moneta tende all'infinito quando r si avvicina al valore 1. La fig. 19 mostra immediatamente che la flessibilità della moneta, quale è rappresentata dalla curva M , si troverà al disopra della flessibilità Bernoulliana corrispondente ad un valore nullo del reddito da fonte diversa dal lavoro, per $r < 5,2$, e al disotto di essa per $r > 5,2$. Quando $s = 0$, la flessibilità Bernoulliana è infatti rappresentata dalla retta orizzontale con ordinata $= +1$. In conseguenza, ci troviamo ora nel caso in cui la parte più bassa della curva di offerta di lavoro ha un solo cambiamento di direzione, cioè un cambiamento di direzione del tipo di quello che appare nella parte più bassa della curva C della fig. 17. Se il reddito da fonte diversa dal lavoro è $s = 1,8$, la curva M della fig. 19 viene a trovarsi interamente al disotto della curva della flessibilità Bernoulliana. Abbiamo quindi in questo caso una curva di offerta di lavoro nella quale la parte più bassa va salendo in modo monotono, come la A della fig. 17. Se il reddito da fonti diverse dal lavoro è $s = 1,6$, la curva di flessibilità M si troverà al disotto della curva della flessibilità Bernoulliana per piccoli valori del reddito (cioè per redditi totali soltanto leggermente in eccesso dei redditi da fonti diverse dal lavoro), e per valori del reddito molto elevati; nel tratto intermedio invece (tra i punti M_1 ed M_2 della fig. 19) sarà al disopra di essa. Questo è quindi il caso rappresentato dalla curva B della fig. 17.

La curva tratteggiata N della fig. 19 dà una rappresentazione della funzione di flessibilità:

$$(10, 63) \quad -\check{w}(r) = \frac{1}{\log \text{nat } r}$$

che si ottiene se la funzione di utilità della moneta è della forma (4, 1), nell'ipotesi che il minimo di esistenza sia $r_0 = 1$. Il tipo del log che figura nella definizione (4, 1) ha poca importanza. La flessibilità sarà sempre data dalla (10, 63); e se la flessibilità effettiva è della forma (10, 63), la parte più bassa della curva di offerta di lavoro non può in nessun caso presentare due inversioni di direzione, qualunque sia il reddito da fonte diversa dal lavoro. In fatto, se la flessibilità della moneta è della forma (10,63), abbiamo:

$$\frac{r}{r-s} [-\check{w}(r)] = \frac{r}{(r-s) \log \text{nat } r} \left(\log \text{nat } r - \left(1 - \frac{s}{r}\right) \right);$$

Poichè $r > s$ ed $r > 1$, la curva di offerta di lavoro è ascendente o discendente in un dato punto secondo che la funzione:

$$(10, 64) \quad \log \text{nat } r - \left(1 - \frac{s}{r}\right)$$

è positiva o negativa nel punto stesso. Può esservi cioè una inversione nella direzione nella curva di offerta di lavoro soltanto quando la (10, 64) passa per lo zero. Ma, poichè $r > s$, la derivata della (10, 64) rispetto ad $\frac{1}{r}$, cioè $s - r$, è negativa: la funzione (10, 64) è sempre crescente al crescere di r e quindi può annullarsi al massimo una volta nell'intervallo. Più precisamente, nel caso qui considerato, se $s > 1$, la curva di offerta di lavoro non avrà inversioni di direzione e crescerà in modo monotono. Se invece $s < 1$, essa avrà una sola inversione di direzione, il ramo più basso essendo discendente ed il più alto ascendente. Infatti, la (10, 64) assume il valore $(s - 1)$ per $r = 1$; essa è positiva per $r = 1$ quando $s > 1$; è continuamente crescente per valori più elevati di r : deve quindi essere positiva in ogni punto dell'intervallo considerato. D'altro lato, la (10, 64) assume il valore $+\infty$ per $r = +\infty$. Per $s < 1$, essa crescerà in modo monotono da un valore negativo corrispondente ad $r = 1$, ad un valore positivo corrispondente ad $r = +\infty$; dovrà quindi passare per lo zero esattamente una volta nell'intervallo.

Se i dati sulla forma della curva di offerta di lavoro che possono essere dedotti dalla osservazione della fig. 19 non sono sufficienti, la curva medesima può essere costruita al modo seguente. Per convenienza indichiamo con r il reddito annuo diviso per il numero n delle giornate di lavoro nell'anno; ossia r rappresenterà ora un reddito giornaliero: non il reddito di un giorno particolare, ma il reddito medio giornaliero computato per tutto l'anno; indichiamo analogamente con s il reddito giornaliero da fonte diversa dal lavoro computato per tutto l'anno. Nel caso semplice ora considerato abbiamo:

$$(10, 65) \quad r = yq + s$$

e, poichè supponiamo per convenienza $P = 1$, l'equazione dell'equilibrio diventa:

$$(10, 66) \quad w(r) = \frac{v(y)}{q}$$

Scriviamo le ultime due equazioni sotto la forma:

$$(10, 67) \quad q = \frac{v(y)}{w(r)}$$

$$(10, 68) \quad q = \frac{r - s}{y}$$

Eliminando q fra esse otteniamo:

$$(10, 69) \quad y \cdot v(y) = (r - s) \cdot w(r)$$

equazione che, quando sia noto s , può essere utilizzata per rappresentare la curva di offerta di lavoro nella quale r funge da parametro variabile. Tracciamo prima il grafico della funzione:

$$(10, 70) \quad V(y) = y \cdot v(y);$$

attribuendo poi ad r un valore opportuno, deduciamo dalla rappresentazione grafica della (10, 70) il punto dell'asse delle ascisse — cioè il valore di y — che corrisponde all'ordinata $(r - s) w(r)$. La (10, 68) dà il valore di q corrispondente a questo valore di y . In questo modo, facendo variare r , si può determinare una serie di punti sulla curva di offerta di lavoro che corrisponde al valore di s considerato.

Se però si desidera avere tutta la famiglia di curve di offerta di lavoro corrispondenti ad una serie di valori distinti di s , è più agevole procedere nel modo seguente: tracciare prima in un sistema coordinato (y, q) la famiglia delle curve che si ottengono dalla curva di disutilità del lavoro moltiplicando le ordinate di questa per il *coefficiente di dilatazione* $\frac{1}{w(r)}$. Per i diversi valori di r si otterranno coefficienti di dilatazione distinti, immediatamente deducibili dal grafico della curva di utilità della moneta. L'equazione della curva dilatata di disutilità è la (10, 67). Ciascuna delle curve dilatate di disutilità deve essere contrassegnata con un numero, cioè col corrispondente valore di r (cfr. la fig. 20). Le curve dilatate di disutilità sono analoghe alle curve di domanda definite dalla superficie di consumo. Nel caso delle curve di domanda si poteva ammettere che sull'ammontare del reddito non influisse il modo in cui esso veniva usato; cioè che una variazione del consumo della merce di paragone non influisse di per sè sul valore del reddito totale, e quindi neppure sull'utilità della moneta. Nel caso delle curve dilatate di disutilità, facciamo qualche cosa di simile: variamo cioè y e q , e manteniamo invariato r . In altre parole: cerchiamo che cosa accadrebbe se r non fosse influenzato da y e da q .

Dopo aver costruite le curve dilatate di disutilità, costruiamo nello stesso sistema (y, q) la famiglia di iperboli equilateri:

$$(10, 71) \quad q = \frac{r}{y}$$

e contrassegnamo ciascuna di esse con un numero, cioè col corrispondente valore di r . A queste curve daremo il nome di curve del reddito da lavoro (cfr. la fig. 20).

Scegliamo ora un valore di r e segniamo il punto di intersezione fra la curva dilatata di disutilità e la curva del reddito da lavoro corrispondenti al valore scelto di r . Fissiamo ancora un secondo valore di r e segniamo il punto di intersezione fra la curva dilatata di disutilità e la curva di reddito da lavoro corrispondente al valore stesso. E così di seguito. Otterremo in questo modo una serie di punti di intersezione. *La curva che passa per essi è la curva di offerta di lavoro* corrispondente al caso in cui non esiste alcun reddito all'infuori dei redditi da lavoro: è la curva O della fig. 20. Osserviamo, ad esempio, come questa curva passi per il punto di intersezione fra la curva dilatata di disutilità $r = 4$ e la curva del reddito da lavoro $r = 4$.

Ripetiamo la medesima operazione associando però ciascuna curva di disutilità corrispondente ad un valore r_i di r con l'iperbole equilatera corrispondente al valore $r_i - s$ di r . Otterremo così la curva di offerta di lavoro

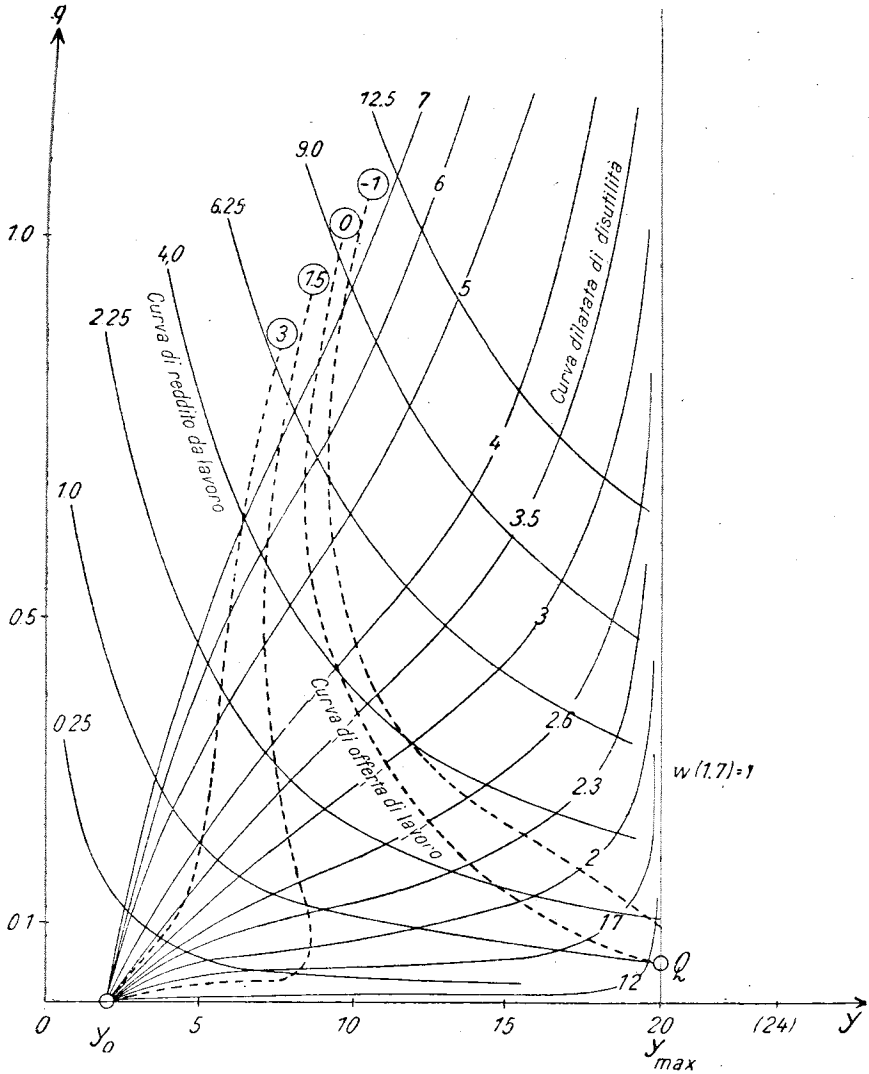


Fig. 20.

per il caso in cui esiste un reddito s da fonti diverse dal lavoro. Potremo costruire per questa via tutta una famiglia di curve di offerta di lavoro, ciascuna delle quali potrà essere contrassegnata con un numero, cioè col valore di s corrispondente ad essa. Nella fig. 20 sono segnate, con linea tratteggiata,

quattro di tali curve di offerta di lavoro corrispondenti ai valori $-1, 0, 1,5, 3$ di s . Per acquistare una certa familiarità col principio sul quale è costruita la fig. 20, si dovrebbe seguire una delle curve di offerta di lavoro — ad esempio, quella corrispondente al valore $s = 3$ (la curva di offerta di lavoro che nella fig. 20 si trova più a sinistra) — tenendo presente che ciascun punto di essa è intersezione fra una certa curva di reddito da lavoro ed una certa curva dilatata di disutilità, la quale ultima è sempre contrassegnata da un numero che supera di $s = 3$ quello che contrassegna la corrispondente curva del reddito da lavoro. La curva dell'offerta di lavoro considerata passa, ad esempio, per il punto di intersezione tra la curva 1 di reddito da lavoro e la curva 4 di disutilità; per il punto d'intersezione tra la curva 4 di reddito da lavoro e la curva 7 di disutilità, e così di seguito. Per la curva di offerta di lavoro che segue, nella fig. 20, la differenza tra il numero che contrassegna la curva dilatata di disutilità ed il numero che contrassegna la corrispondente curva del reddito da lavoro, è di 1,5. Fra le curve del reddito da lavoro che sono effettivamente tracciate nella fig. 20 si potrebbe naturalmente immaginare tutto un sistema di curve intermedie, che potrebbero anche essere interpolate ad occhio. Considerazioni del tutto analoghe si potrebbero fare per le curve dilatate di disutilità.

La curva di disutilità del lavoro sulla quale sono basate le costruzioni nella fig. 20 non è altro che la curva della fig. 16 ed appartiene essa stessa alla famiglia delle curve dilatate di disutilità; precisamente è fra queste curve quella corrispondente al valore r del reddito per cui $w(r) = 1$. Nella situazione indicata dalla fig. 20 si ha $w(1,7) = 1$. L'unità di misura delle distanze verticali è nella fig. 20 molto più piccola che nella fig. 16. La curva di utilità della moneta usata nella costruzione della fig. 20 è ottenuta integrando la curva M di flessibilità della fig. 19. Qualche curva di offerta di lavoro costruita sulla base della curva M della fig. 19, dovrebbe avere, come abbiamo veduto, una doppia inversione di direzione. Tale è la curva $s = 1,5$ della fig. 20.

Analizziamo la fig. 20 nell'ipotesi che non vi siano altri redditi che quelli da lavoro. In questo caso la curva di offerta di lavoro presenta nel suo andamento un solo cambiamento di direzione; è ciò che si verifica per la curva $s = 0$ nella fig. 20 che si arresta improvvisamente in un punto Q , la cui ascissa esprime il massimo fisiologico di lavoro giornaliero y_{max} e la cui ordinata è eguale al rapporto tra il saggio di salario giornaliero che si eguaglia al minimo di esistenza r_0 , ed il valore y_{max} . Nel caso che vi sia anche un piccolo reddito da fonte diversa dal lavoro, la curva di offerta di lavoro conserva la medesima forma con un solo cambiamento di direzione, ed il suo punto estremo ha la medesima ascissa y_{max} ; ma l'ordinata di Q è, in questo caso, leggermente minore che nel precedente: è eguale cioè a $\frac{r_0 - s}{y_{max}}$. Man mano che il reddito da fonte diversa dal lavoro cresce, l'ordinata decresce fino ad assumere il valore zero. Ciò accade quando $s = r_0$, cioè quando l'individuo ha un reddito da fonti diverse dal lavoro sufficiente ad assicurare il suo minimo di esistenza.

Se il reddito da fonte diversa dal lavoro cresce ancora, il punto di arresto della curva si sposta improvvisamente al punto y_0 sull'asse delle ascisse. Ciò esprime il fatto che un individuo che possieda da altre fonti un minimo di esistenza, non lavorerà più che y_0 finché il saggio del salario è nullo. E se il saggio del salario incomincia ora a crescere partendo dal valore zero, la quantità di lavoro offerta aumenterà. La stessa considerazione vale per qualunque valore più elevato di s : tutte le curve di offerta di lavoro incominceranno a salire partendo dal punto y_0 sull'asse delle ascisse. Possiamo quindi enunciare la proposizione seguente: *se il minimo di esistenza è assicurato da un reddito da fonte diversa dal lavoro, la parte più bassa della curva di offerta di lavoro ha un andamento ascendente ed ha come punto iniziale il punto y_0 dell'asse delle ascisse.*

Questo fatto non soltanto può essere rilevato dalla fig. 20, ma risulta anche dal confronto tra la curva M della fig. 19 e la curva della flessibilità Bernoulliana corrispondente a qualsiasi valore di s maggiore dell'unità. La flessibilità Bernoulliana ha un polo in $r = s$; e se $s > 1$, la flessibilità effettiva ha un valore finito per $r = s$. Per valori di r lievemente superiori ad s , la flessibilità Bernoulliana deve dunque essere maggiore della flessibilità effettiva (in valore assoluto) e la curva di offerta di lavoro deve avere un andamento ascendente.

Non possiamo dire, senza conoscenze più profonde sulla proporzione in cui la flessibilità della moneta decresce, se a partire da $r = s$ e per valori di s superiori al minimo di esistenza, la curva di offerta di lavoro andrà salendo in modo monotono al crescere di r o inizierà un nuovo ramo discendente (come è indicato dalla curva B della fig. 17 e dalla curva $s = 1,5$ della fig. 20). Vi è tuttavia un fatto che possiamo affermare in generale. Se la curva di offerta si rivolge verso il basso, ciò deve avvenire in qualche punto dell'intervallo di reddito che precede il punto r_1 a partire dal quale la flessibilità della moneta assume valori minori dell'unità. Oltrepastato questo punto, non vi sarà alcuna probabilità che la flessibilità della moneta rag-

giunga il valore della frazione $\frac{r}{r-s}$ (almeno finché non ci occupiamo degli intervalli di reddito più elevati, pei quali non possediamo ancora alcuna indicazione precisa circa la flessibilità della moneta). Possiamo anche dire che se la curva di offerta di lavoro si rivolge una volta indietro nell'intervallo di reddito che precede r_1 , essa deve avere successivamente una nuova svolta e cambiare direzione. Più in generale, per ogni cambiamento di direzione che volga la curva indietro, deve esservene uno che la riporta in avanti perchè, per la più elevata porzione dell'intervallo di reddito per la quale abbiamo conoscenze riguardo alla flessibilità della moneta, la curva di offerta di lavoro deve avere un andamento ascendente (come quello delle parti più alte segnate a tratto continuo delle curve della fig. 17).

La discussione che precede dà anche una risposta al quesito del come un sussidio influisca sulla volontà di lavorare, nella supposizione che questa volontà possa considerarsi raffigurata dalla forma della curva di offerta di

lavoro. Un sussidio farà rivolgere a sinistra questa curva ed eventualmente sposterà il punto di arresto da Q ad y_0 . Le considerazioni svolte fin qui prescindono naturalmente da altre, e forse più importanti, questioni connesse con la concessione di sussidi: dal modo in cui questi influiscono su tutto lo stato mentale e morale dei lavoratori, ecc. Le imposte per testa possono essere considerate come « sussidi negativi ». L'analisi dei loro effetti è quindi anch'essa contenuta nella discussione precedente. Nella fig. 19 sono tracciate tre curve di flessibilità Bernoulliana corrispondenti a valori negativi di s ; e nella fig. 20 è tracciata la curva di offerta di lavoro corrispondente al valore $s = -1$.

La fig. 20 illumina non soltanto sulla forma della curva di offerta di lavoro per diverse situazioni dei redditi da fonti diverse dal lavoro, ma — a mezzo della famiglia delle curve del reddito da lavoro — fornisce anche informazioni sull'ampiezza del reddito che corrisponde a *ciascun punto* della curva di offerta di lavoro. Basta osservare il numero segnato sulla iperbole che interseca la curva di offerta di lavoro nel punto considerato e che indica quale parte del reddito derivi appunto dal lavoro. Aggiungendo a questo il reddito da fonti diverse dal lavoro (che è costante lungo una medesima curva di offerta di lavoro ed eguale al numero che contrassegna quest'ultima) si ottiene il reddito totale. Quando fosse necessario, il reddito totale potrebbe anche essere ricavato dalla osservazione diretta del numero segnato sulla curva dilatata di disutilità che interseca la curva di offerta di lavoro nel punto considerato.

Le famiglie di curve della fig. 20 possono servire anche a vari altri scopi. Quando il reddito da fonte diversa dal lavoro ed il reddito totale sono dati entrambi, si può, ad esempio, porre il quesito della situazione in cui deve trovarsi l'individuo. La risposta si dà cercando il punto di intersezione tra la curva dilatata di disutilità corrispondente al valore assegnato del reddito totale e la curva di reddito da lavoro corrispondente al valore assegnato della differenza tra il reddito totale e il reddito da fonti diverse dal lavoro. Questo punto determina sia q che y , determina cioè: *a*) il saggio dei salari che deve essere ottenuto nel mercato affinché il nostro individuo adatti il suo lavoro in modo da ottenere i valori assegnati del reddito totale e del reddito da fonti diverse dal lavoro; *b*) il numero delle ore giornaliere di lavoro.

I rapporti esistenti tra le varie famiglie di curve presentate nella fig. 20 costituiscono probabilmente il punto strategico sul quale sarebbe più proficuo concentrare lo sforzo se una volta il problema della curva di offerta di lavoro dovesse essere affrontato direttamente attraverso una indagine statistica simile a quelle che sono state compiute sulla superficie di consumo.

Uno studio ulteriore del caso più complicato in cui il saggio dei salari influisce sul prezzo della vita, deve prendere come punto di partenza le formule (10, 56) o (10, 58). E nei casi ancora più complicati deve esser fatto ricorso al sistema (10, 45).

XI. — L'UTILITÀ DELLA MONETA E L'IMPOSTA SUL REDDITO

Il quesito centrale della teoria delle imposte è se l'imposta sul reddito debba essere progressiva e, in caso affermativo, quale dovrebbe essere la ragione esatta della progressione. Queste importanti questioni sono state lungamente discusse negli ultimi decenni, sia dal punto di vista pratico che da quello teoretico. La maggior parte delle considerazioni teoriche in materia sono state, in un modo o nell'altro connesse col concetto dell'utilità della moneta. Nel presente capitolo sarà posta in evidenza l'interrelazione esistente tra le più importanti teorie avanzate in materia di imposte, e saranno discusse in modo sistematico le condizioni sotto le quali si può concludere dell'opportunità che l'imposta sia progressiva. Tali condizioni appaiono a volte confuse. Sarà messo in evidenza quali conclusioni sia possibile trarre dai risultati effettivi della misura della flessibilità della moneta illustrati nei capitoli precedenti. Riteniamo che queste misure porteranno nella trattazione una parte almeno di quella completezza che, per la deficienza della documentazione, è mancata alle precedenti discussioni sull'argomento.

Lasciemo da parte tutte le considerazioni pratiche degli effetti che l'imposta sul reddito esercita sull'attività produttiva nella società, o quelle dei « servizi resi ai cittadini dallo Stato » (« teoria del beneficio »). Ci limiteremo all'analisi del sacrificio che l'imposta implica per l'individuo. In altri termini, cercheremo di determinare quale dovrebbe essere il saggio dell'imposta se il problema della determinazione di esso fosse affrontato, tenendo conto soltanto del sacrificio individuale. Ma, anche con questa limitazione, non è da credere che la soluzione possa essere ottenuta da una semplice analisi economico-teoretica dell'utilità della moneta. *Il problema comprende due stadi, dei quali soltanto il secondo ha carattere economico-teoretico*; prima di affrontar questo, occorre stabilire *la definizione di giustizia*, per passar poi all'applicazione di essa al calcolo effettivo di ciò che l'imposta sul reddito dovrebbe essere. Soltanto quest'ultima parte del problema appartiene interamente al campo della teoria economica. Per essere più precisi: lo scopo della graduazione dell'imposta sul reddito è di distribuire *giustamente* l'onere. Ma, prima che sia possibile procedere ad un calcolo effettivo basato sul concetto dell'utilità della moneta, occorre definire quantitativamente *ed in termini di curva di utilità della moneta*, il significato delle parole *giustamente*, *giustizia*, ecc. *È giusto* — ad esempio — che il valore assoluto dell'utilità totale ceduta sia lo stesso per ciascun contribuente? o non dovrebbe piuttosto essere lo stesso il valore relativo dell'utilità totale ceduta? Questi sono soltanto due esempi di definizioni di giustizia dell'imposta; ma vi sono molte altre definizioni — alcune delle quali dovranno essere considerate nel seguito —; e ciascuna di

esse conduce ad una conseguenza diversa per la determinazione dell'imposta sul reddito. Il problema di stabilire quale delle diverse definizioni di giustizia sia più adatta a servire di base ad una ripartizione dell'imposta non può, in ultima analisi, essere risoluto dall'economista teorico: la soluzione spetta per molta parte al sociologo, al moralista, all'uomo di buon senso, i quali tutti hanno su di essa, per lo meno, una influenza notevole. È fuori di dubbio che la teoria economica può anch'essa contribuire alla soluzione di questo problema di definizione, ad esempio, mostrando quali possano essere le conseguenze del tentativo di realizzare l'uno o l'altro ideale astratto; ma essa non può, da sola, decidere quale ideale sia da preferire. Risolta che sia la questione della definizione di giustizia, il resto del problema rientra interamente nel campo di competenza del teorico e dello statistico dell'economia.

Ammissa questa situazione, il fatto di avere statisticamente dimostrato la decrescenza monotona del valore assoluto della flessibilità della moneta da valori molto elevati per piccoli redditi, a valori minori dell'unità per redditi più alti, *non autorizza ancora alcuna conclusione sull'opportunità che l'imposta sul reddito sia progressiva, oppure no.* Tenuto conto di questo andamento della flessibilità, l'adozione dell'una o dell'altra definizione di giustizia potrebbe condurre ad un'imposta progressiva, o ad un'imposta proporzionale, o anche regressiva. Uno degli scopi principali delle considerazioni svolte nel presente capitolo è appunto quello di discutere dettagliatamente i vari casi.

Nella discussione faremo uso dei concetti e dei simboli seguenti: supporremo che il prezzo della vita sia costante ed eguale all'unità, sicchè il reddito nominale coincida col reddito reale: è appunto la nozione di reddito effettivo che ha importanza per la questione che ora ci occupa. Indicheremo il reddito col simbolo r , già adottato per il reddito reale, e con:

$$(11, 1) \quad s = s(r)$$

l'ammontare dell'imposta sul reddito; $s - r$ sarà allora il reddito spendibile residuo, dopo il pagamento dell'imposta. Indicheremo ancora con:

$$(11, 2) \quad \Phi = \Phi(r) = \frac{s}{r}$$

il saggio dell'imposta. Abbiamo assunto Φ come funzione di r allo scopo di tener conto dei casi in cui l'aliquota dell'imposta varia con l'altezza del reddito. Se s è così piccolo da poter essere considerato infinitesimo in confronto di r , adotteremo, per indicare l'aliquota dell'imposta sul reddito, la lettera minuscola φ ; scriveremo cioè:

$$(11, 3) \quad \varphi = \varphi(r) = \frac{s}{r}$$

Per caratterizzare la natura delle funzioni Φ e φ , introduciamo le *progressività dell'imposta*:

$$(11, 4) \quad \check{\Phi} = \check{\Phi}(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr} \cdot \frac{r}{\Phi}$$

$$(11, 5) \quad \check{\varphi} = \check{\varphi}(r) = \frac{d\varphi(r)}{dr} \cdot \frac{r}{\varphi}$$

L'utilità marginale della moneta e la flessibilità marginale della moneta saranno indicate, come sempre, con $w(r)$ e $\check{w}(r)$. Oltre che di queste nozioni, abbiamo bisogno ancora dei concetti di utilità totale della moneta e di flessibilità totale della moneta, definiti dalle relazioni:

$$(11, 6) \quad W = W(r) = \int_{\bar{r}}^r w(z) dz$$

$$(11, 7) \quad \check{W} = \check{W}(r) = \frac{dW(r)}{dr} \cdot \frac{r}{W}$$

nelle quali \bar{r} è un primo estremo dell'integrale dell'utilità totale, convenzionalmente determinato. Poichè l'utilità marginale della moneta diviene infinita quando r si avvicina al minimo di esistenza r_0 , dovrà essere $\bar{r} > r_0$.

Considereremo inoltre l'*utilità rettangolare* (1):

$$(11, 8) \quad Q = Q(r) = rw$$

ossia l'area del rettangolo che ha per base il reddito totale e per altezza l'utilità marginale della moneta corrispondente ad esso. Per la flessibilità rettangolare:

$$(11, 9) \quad \check{Q} = \check{Q}(r) = \frac{dQ(r)}{dr} \cdot \frac{r}{Q}$$

abbiamo la formula:

$$(11, 10) \quad \check{Q} = 1 - (-\check{w}).$$

Dalla (11, 6) deduciamo:

$$(11, 11) \quad \check{W} = \frac{rw}{W} = \frac{Q}{W};$$

quindi la flessibilità di secondo ordine di W , cioè (2):

$$(11, 12) \quad \check{\check{W}} = \check{\check{W}}(r) = \frac{d\check{W}}{dr} \cdot \frac{r}{\check{W}}$$

(1) La quantità Q viene a volte designata col nome di « utilità effettiva »; ma questa non sembra una denominazione opportuna: nella maggior parte delle persone essa farà sorgere probabilmente qualche idea di marginalità.

(2) Le flessibilità di secondo ordine considerate qui non sono esattamente analoghe alle differenze divise di secondo ordine considerate nel Cap. VIII.

è espressa da:

$$(11, 13) \quad \check{W} = \check{Q} - \check{W} = 1 - (-\check{w}) - \frac{rw}{W}.$$

Per la flessibilità di secondo ordine della utilità marginale della moneta usiamo la notazione:

$$(11, 14) \quad \check{w} = \frac{d\check{w}}{dr} \cdot \frac{r}{\check{w}}.$$

Indicheremo con:

$$(11, 15) \quad r = \mathbf{r}(w)$$

la funzione inversa di $W = W(r)$; e con

$$(11, 16) \quad r = R(W)$$

la funzione inversa di $W = W(r)$. La flessibilità della funzione (11, 15), cioè:

$$(11, 17) \quad \check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}(w) = \frac{d\mathbf{r}(w)}{dw} \cdot \frac{w}{\mathbf{r}(w)}$$

è eguale a

$$(11, 18) \quad \check{\mathbf{r}}(w) = \frac{1}{\check{w}(r)}$$

la relazione fra gli argomenti essendo $w = w(r)$. Analogamente la flessibilità della funzione (11, 16), cioè:

$$(11, 19) \quad \check{R} = \check{R}(W) = \frac{dR(W)}{dW} \cdot \frac{W}{R(W)}$$

è eguale a

$$(11, 20) \quad \check{R}(W) = \frac{1}{\check{W}(r)}$$

dove $W = W(r)$.

Giova spesso avere a disposizione delle formule generali per esprimere le flessibilità della somma o del prodotto di due funzioni, la flessibilità di una funzione di funzione, ecc., formule che saranno di particolare utilità nella discussione del presente capitolo. Le dimostrazioni relative riescono molto semplici quando si abbiano presenti le regole classiche di derivazione, sicchè sembra superfluo svilupparle qui. Indicheremo col simbolo *Flex* l'operazione di prendere la flessibilità di una funzione. Così, se $u(x)$ e $v(x)$ sono due funzioni della variabile x , sarà:

$$\text{Flex } u(x) = \frac{d u(x)}{dx} \cdot \frac{x}{u(x)}$$

$$\text{Flex } v(x) = \frac{d v(x)}{dx} \cdot \frac{x}{v(x)}.$$

Quando sia necessario indicare la variabile rispetto alla quale la flessibilità è presa, useremo la notazione $\text{Flex}_{(x)} u(x)$.

Si hanno allora per il calcolo delle flessibilità le regole seguenti:

$$(11, 21) \quad \text{Flex } c = 0$$

c essendo una costante $\neq 0$;

$$(11, 22) \quad \text{Flex } x = 1 \quad ; \quad \text{Flex } \frac{1}{x} = -1$$

se x è la variabile rispetto alla quale la flessibilità è presa:

$$(11, 23) \quad \text{Flex } c u(x) = \text{Flex } u(x)$$

quando c sia una costante diversa da zero;

$$(11, 24) \quad \text{Flex } [u(x) \cdot v(x)] = \text{Flex } u(x) + \text{Flex } v(x);$$

$$(11, 25) \quad \text{Flex } \frac{u(x)}{v(x)} = \text{Flex } u(x) - \text{Flex } v(x);$$

$$(11, 26) \quad \text{Flex } [u(x) + v(x)] = \frac{u(x) \text{Flex } u(x) + v(x) \text{Flex } v(x)}{u(x) + v(x)}$$

$$(11, 27) \quad \text{Flex}_{(x)} G [g(x)] = \text{Flex}_{(g)} G(g) \cdot \text{Flex}_{(x)} g(x)$$

G essendo funzione di g , e g essendo a sua volta funzione di x .

Si osserverà che, a differenza di quanto avviene per le derivate, le formule delle flessibilità dei prodotti e dei quozienti sono più semplici, ed assai più complicate quelle delle flessibilità della somma e della differenza di due funzioni.

Passiamo ora alla discussione di una serie di definizioni di giustizia, più o meno plausibili, e delle conseguenze che l'adozione di ciascuna di esse avrebbe per la determinazione dell'imposta sul reddito.

I. *Principio della differenza delle aree* (principio dell'uguaglianza del sacrificio). — Consideriamo un individuo il quale sappia che in due diverse occasioni si troverà ad avere i redditi r_1 ed r_2 rispettivamente, e supponiamo che egli abbia la facoltà di perdere, sotto forma di imposta, o la somma s_1 nella prima situazione, o la somma s_2 nella seconda. Evidentemente egli sceglierà di pagare l'imposta nella prima o nella seconda situazione secondo che:

$$W(r_1) - W(r_1 - s_1) < W(r_2) - W(r_2 - s_2)$$

oppure:

$$W(r_1) - W(r_1 - s_1) > W(r_2) - W(r_2 - s_2).$$

Quindi, se s_1 ed s_2 debbono essere determinati in modo che divenga indifferente per l'individuo pagare s_1 nella prima situazione o s_2 nella seconda, queste quantità dovranno essere tali che sia:

$$(11, 28) \quad \int_{r_2 - s_2}^{r_1} w(z) dz = \int_{r_1 - s_1}^{r_2} w(z) dz.$$

Consideriamo ora tutta una serie di situazioni con diversi redditi r_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) e supponiamo che sia applicata in corrispondenza di ciascuna di esse una imposta di ammontare s_i ($i = 1, 2, \dots$) rispettivamente. L'individuo è nell'obbligo di pagare una di queste imposte, ma può scegliere egli stesso la particolare situazione in cui desidera farlo. Se i valori s_i dell'imposta debbono essere determinati in modo che per l'individuo sia indifferente la situazione nella quale pagherà, le s_i debbono soddisfare alla relazione:

$$(11, 29) \quad \int_{r_i - s_i}^{r_i} w(z) dz = c$$

dove c è una costante indipendente da i . Se la curva di utilità della moneta è data, ed è assegnata anche la costante c , per la (11, 29) a ciascun valore r_i viene ad essere associato un valore s_i ; ed inoltre, le s_i dipendono da i soltanto per il fatto che esse dipendono dal corrispondente valore di r_i . Ciò può essere espresso dicendo che l'ammontare s dell'imposta è una funzione $s = s(r)$ del reddito r , definita dall'equazione:

$$(11, 30) \quad \int_{r-s}^r w(z) dz = c.$$

Quest'ultima può essere posta anche sotto la forma:

$$(11, 31) \quad \int_{(1-\Phi)r}^r w(z) dz = c$$

che definisce l'aliquota Φ dell'imposta come funzione di r , e può essere scritta anche al modo seguente:

$$(11, 32) \quad W[(1 - \Phi)r] = W(r) - c.$$

Al principio espresso dalle (11, 30), (11, 31) o (11, 32) daremo il nome di *principio della differenza delle aree*: queste relazioni dicono infatti che la

differenza tra le aree situate al disotto della curva di utilità della moneta e le aree che si ottengono da esse dopo effettuato il prelevamento dell'imposta, è una costante indipendente da r .

Finora ci siamo limitati alla considerazione di un solo individuo. Da un punto di vista formale, il confronto diretto fra le utilità afferenti a individui diversi non è assolutamente necessario per la presente analisi. Basta, ed ai fini della inattaccabilità teorica, è opportuno definire la relazione tra s ed r considerando lo stesso individuo in situazioni diverse, invece che diversi individui. Tuttavia, nella pratica, la relazione tra s ed r così determinata dovrebbe essere applicata anche ai casi in cui i diversi valori di r rappresentano i redditi di individui differenti. Riferendosi al principio espresso dalla (11, 30) è quindi lecito dire, con una espressione sintetica, che « ciascun individuo cede la stessa quantità di utilità ». Ma va ricordato che teoricamente la costruzione della relazione tra s ed r non implica necessariamente un confronto diretto fra le utilità afferenti ad individui diversi.

Il principio della differenza delle aree espresso dalla (11, 30) offre una formulazione della definizione di giustizia, che però non sembra particolarmente plausibile. La principale obiezione teorica contro di essa sta in ciò: che è basata sull'analisi del comportamento di un individuo per il quale è previsto l'obbligo di pagare un'imposta in una sola delle molte situazioni di reddito considerate. Vedremo ora che se si suppone che egli debba pagare l'imposta in ciascuna delle situazioni, il che naturalmente costituisce l'ipotesi più realistica, si arriva ad un principio del tutto differente. Ma, sebbene il principio della differenza delle aree non sembri molto ben fondato dal punto di vista teorico, deve essere preso in considerazione in una analisi come la nostra, perchè ad esso si sono riferiti molti eminenti economisti. Primo fra questi è EMILIO SAX (1).

Se viene adottato il principio della differenza delle aree, l'espressione esplicita dell'aliquota Φ dell'imposta come funzione del reddito diviene:

$$(11, 33) \quad \Phi(r) = 1 - \frac{R[W(r) - c]}{r}$$

dove R è la funzione inversa definita dalla (11, 16). Se, tenendo presenti le definizioni generali della flessibilità (11, 26) e (11, 27), si prende la flessibilità della (11, 33) rispetto ad r , si ha:

$$(11, 34) \quad \check{\Phi} = \frac{r - s}{s} \left(1 - \frac{Q(r)}{Q(r - s)} \right).$$

(1) *Die Progressivsteuer*, in « Zeitschrift f. Volkswirtschaft, etc. », 1892; e *Die Wertungstheorie der Steuer*, Ibid., 1924.

Lo sviluppo della (11, 33) in serie di potenze della costante c dà:

$$(11, 35) \quad \Phi = \frac{c}{rw} + \dots$$

Il primo termine della serie fornisce un'espressione dell'aliquota dell'imposta nel caso che questa sia molto piccola (rigorosamente parlando, infinitesima); abbiamo adottato per designare una simile aliquota di imposta il simbolo φ , sicchè nel caso attuale abbiamo:

$$(11, 36) \quad \varphi = \frac{c}{rw}.$$

Se, tenendo presenti le (11, 24) e (11, 25), calcoliamo la flessibilità della (11, 36), otteniamo:

$$(11, 37) \quad \check{\varphi} = (-\check{w}) - 1.$$

La formula (11, 36) che dà l'aliquota infinitesimale di imposta, avrebbe potuto essere dedotta anche in base alle seguenti considerazioni dirette: un individuo che, avendo un reddito r paga l'imposta infinitesima s , cede una quantità di utilità eguale a $s \cdot w(r)$. Eguagliando questa espressione ad una costante c indipendente da r , si ottiene: $sw = c$, cioè: $\frac{s}{r} = \frac{c}{rw}$; che è la (11, 36).

Dalle formule precedenti possiamo ricavare immediatamente le condizioni perchè l'imposta debba essere progressiva. L'imposta sarà progressiva, proporzionale o regressiva secondo che la progressività $\check{\varphi}$ (o $\check{\varphi}$, nel caso di una imposta infinitesima) è positiva, nulla o negativa. Dalla (11, 37) si deduce quindi che: condizione necessaria e sufficiente perchè un'imposta infinitesima sia progressiva per un valore r del reddito (quando sia adottato il principio della differenza delle aree) è che, per il valore stesso, la flessibilità della moneta sia maggiore dell'unità. Se l'imposta infinitesima deve essere progressiva in tutti i punti di un certo intervallo di reddito, è quindi necessario e sufficiente che la flessibilità della moneta sia maggiore dell'unità in valore assoluto, in ogni punto dell'intervallo. La (11, 34) dice che questa è anche una condizione *sufficiente* perchè sia progressiva in tutti i punti dell'intervallo un'imposta in misura finita. Dalla (11, 10) risulta poi che se la flessibilità della moneta è maggiore dell'unità in valore assoluto, Q è continuamente decrescente, sicchè $Q(r - s)$ è maggiore di $Q(r)$, ed in conseguenza la $\check{\varphi}$ definita dalla (11, 34) è positiva. Va rilevato che questa condizione cessa di essere necessaria quando l'aliquota dell'imposta ha un valore finito. Se l'aliquota totale dell'imposta ha un valore elevato (cioè se s è grande), può accadere che $Q(r - s)$ sia maggiore di $Q(r)$ per qualsiasi valore di r nell'intervallo,

anche se questo contenga piccoli intervalli parziali in cui la funzione $Q(r)$ è crescente. Tuttavia, se chiediamo che vi sia una progressività, qualunque sia il livello generale di s , la condizione accennata diviene naturalmente necessaria e sufficiente. Nel seguito incontreremo spesso situazioni di questo genere nelle quali la condizione considerata è necessaria e sufficiente nell'ipotesi che l'imposta sia infinitesima e diviene soltanto sufficiente nell'ipotesi che l'imposta abbia un valore finito.

Se le informazioni statistiche che abbiamo ottenuto riguardo alla forma della curva di utilità della moneta debbono essere considerate attendibili, il principio della differenza delle aree conduce ad un'imposta fortemente progressiva per piccoli redditi e regressiva per redditi medi. Io ritengo che questo risultato poco plausibile sia dovuto al fatto che il principio della differenza delle aree è fallace, piuttosto che ad errori nei risultati statistici.

Ad ogni modo, le formule precedenti non soltanto consentono di giudicare se il principio della differenza delle aree conduca, oppure no, ad un'imposta progressiva, ma danno un mezzo per costruire effettivamente la funzione $\Phi(r)$ dell'aliquota dell'imposta, quando sia nota la funzione $w(r)$ dell'utilità della moneta.

II. *Principio del rapporto delle aree* (principio della proporzionalità dei sacrifici). — Invece di stabilire che ciascun individuo ceda la stessa quantità di utilità totale in valore assoluto, come abbiamo fatto nel caso del principio della differenza delle aree, possiamo stabilire che ciascun individuo ceda la stessa *percentuale* della utilità totale che egli aveva prima dell'applicazione dell'imposta. Per evitare di andare incontro a difficoltà nel caso di utilità totali infinite, dobbiamo definire l'utilità totale in proporzione alla quale la quantità di utilità perduta deve essere misurata, introducendo un estremo inferiore convenzionale $\bar{r} > r_0$ per l'integrale, come è stato fatto per la formula (11, 6). Adottata questa convenzione, il principio qui considerato può essere espresso dalla relazione:

$$(11, 38) \quad \int_{r-s}^r w(z) dz = c \int_{\bar{r}}^r w(z) dz$$

nella quale c è una costante indipendente da r , e che possiamo scrivere sotto la forma:

$$(11, 39) \quad W[(1 - \Phi)r] = (1 - c) W(r).$$

Indicheremo il modo di definizione della giustizia espresso da queste formule col nome di *principio del rapporto delle aree*. Esso ha costituito la base della

teoria dell'imposta della Scuola olandese rappresentata in particolare da N. G. PIERSON (1), da CORT VAN DER LINDEN (2), da A. G. STUART (3).

Risolvendo la (11, 39) otteniamo per Φ la seguente espressione esplicita:

$$(11, 40) \quad \Phi(r) = 1 - \frac{R[(1-c)W(r)]}{r}.$$

Se prendiamo la flessibilità della (11, 40) rispetto ad r , tenendo presenti le relazioni generali della flessibilità (11, 26) e (11, 27), abbiamo:

$$(11, 41) \quad \check{\Phi} = \frac{r-s}{s} \left(1 - \frac{\check{W}(r)}{\check{W}(r-s)} \right).$$

Lo sviluppo della (11, 40) in serie di potenze della costante c dà, in conseguenza della (11, 20):

$$(11, 42) \quad \Phi = \frac{c}{W(r)} + \dots$$

sicchè l'espressione di un'imposta infinitesima diviene ora:

$$(11, 43) \quad \varphi = \frac{cW}{rw}$$

e la flessibilità di φ :

$$(11, 44) \quad \check{\varphi} = \frac{rw}{W} + (-\check{w}) - 1.$$

Per una aliquota infinitesima di imposta, la (11, 43) potrebbe anche essere ricavata col ragionamento diretto. Se l'imposta è infinitesima, l'utilità ceduta è φrw . Eguagliando questa espressione al prodotto di W per la costante c , si ottiene la (11, 43).

Dalle formule che precedono possiamo dedurre le condizioni seguenti: condizione necessaria e sufficiente perchè l'imposta infinitesima sia progressiva in ogni punto di un certo intervallo di reddito (quando sia adottato il principio del rapporto delle aree) è che, in ogni punto dell'intervallo, la flessibilità della moneta contata positivamente ed aumentata del rapporto fra l'utilità rettangolare e l'utilità totale, risulti maggiore dell'unità.

La (11, 13) dice che, quando questa condizione sia soddisfatta, \check{W} è decrescente in modo monotono in tutto l'intervallo considerato, sicchè in

(1) *Grondbeginseln der Staatshuishoudkunde* (2ª ediz., 1886).

(2) *Die Theorie der Belastningen* (1885).

(3) *Bijdrage tot der Theorie der Progressive Inkomstenbelastning* (1889).

conseguenza della (11, 41) $\bar{\phi}$ deve essere positivo. La condizione considerata è quindi anche una condizione sufficiente perchè una imposta di valore finito sia progressiva in ogni punto dell'intervallo.

Il confronto della (11, 37) con la (11, 44) mostra che la condizione ora considerata è più facile a soddisfarsi che la condizione di progressività nel caso del principio della differenza delle aree. In conseguenza: *se il principio della differenza delle aree dà una imposta progressiva, a fortiori ciò deve verificarsi quando sia adottato il principio del rapporto delle aree*. Ed il saggio di aumento dell'aliquota di imposta è maggiore nel caso del principio del rapporto delle aree. Aggiungiamo che la differenza tra queste due condizioni diviene tanto più piccola quanto più il primo estremo convenzionale \bar{r} dell'integrale (11, 38) è vicino al minimo fisico di esistenza. Infatti W cresce al crescere di \bar{r} ; e se $\bar{r} \rightarrow r_0$, sarà in molti casi plausibile ammettere che W tende all'infinito; allora il primo termine nel secondo membro della (11, 44) scompare e le (11, 37) e (11,44) divengono identiche. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che, se $\bar{r} \rightarrow r_0$, *il principio del rapporto delle aree si trasforma nel principio della differenza delle aree*. La situazione può anche essere spiegata in modo intuitivo osservando che se $\bar{r} \rightarrow r_0$, e quindi l'integrale del secondo membro della (11, 38) tende all'infinito, esso integrale diviene indipendente dal suo secondo estremo r . Cioè a dire, diviene indipendente da r tutto il secondo membro della (11, 38), il che significa che si ritorna alla formulazione del concetto di giustizia espressa dalla (11, 30).

Il PIERSON ed il CORT VAN DER LINDEN ritennero che, in base alla definizione di giustizia che essi avevano adottata (principio del rapporto delle aree), la condizione di progressività consistesse soltanto nell'essere l'utilità della moneta decrescente. Questo errore fu corretto dal COHEN-STUART il quale trovò i criteri corretti per la progressività nel caso in cui è adottato il principio del rapporto delle aree. Il resto della sua analisi conserva scarso interesse perchè si basa in gran parte sulla funzione Bernoulliana di utilità, mentre la documentazione di cui ora si dispone ha dimostrato che questa è ben lungi dal rappresentare l'andamento vero dell'utilità della moneta.

Nella ricerca di altre possibili definizioni della giustizia, sarebbe naturale indagare come la situazione si trasformi quando i principii precedenti della differenza e del rapporto siano applicati non all'utilità totale, ma all'utilità marginale della moneta. Non sembra che vi siano considerazioni teoriche ben fondate che conducano ad una simile definizione della giustizia, ma le conseguenze che possono derivare dai principii marginali hanno, in apparenza almeno, altrettanto valore euristico che quelle derivate dal corrispondente principio per l'utilità totale. Di più, i principii marginali sono già stati introdotti nella letteratura, sicchè appare opportuno stabilire esattamente quale sia la loro natura.

III. *Il principio della differenza marginale*. — In base a questo principio, l'aumento assoluto subito dall'utilità marginale della moneta in conseguenza

di un prelevamento di imposta, sarà il medesimo per tutti i contribuenti. In altre parole, dovrà essere:

$$(11, 45) \quad w(r - s) = w(r) + c.$$

Risolvendo la (11, 45) otteniamo:

$$(11, 46) \quad \Phi(r) = 1 - \frac{r[w(r) + c]}{r}$$

dove $r(w)$ è la funzione inversa definita dalla (11, 15). Abbiamo dunque:

$$(11, 47) \quad \check{\Phi} = \frac{r - s}{s} \left(1 - \frac{\check{w}(r) \cdot w(r)}{\check{w}(r - s) \cdot w(r - s)} \right).$$

Sviluppando la (11, 46) in serie di potenze di c otteniamo:

$$(11, 48) \quad \Phi = \frac{c}{(-\check{w})w} + \dots$$

e quindi, per aliquote infinitesimali di imposta:

$$(11, 49) \quad \varphi = \frac{c}{(-\check{w})w}.$$

e

$$(11, 50) \quad \check{\varphi} = (-\check{\check{w}}) + (-\check{w})$$

dove $\check{\check{w}}$ è la flessibilità marginale di secondo ordine della moneta, definita dalla (11, 44). Dalla (11, 50) deduciamo che: condizione perchè l'imposta infinitesima sia progressiva (quando sia adottato il principio della differenza marginale) è che la flessibilità marginale della moneta (presa algebricamente col proprio segno) aumentata della flessibilità marginale di secondo ordine della moneta risulti negativa. Questa è anche la condizione perchè il prodotto $(-\check{w})w$ sia decrescente. La (11, 45) dice che se essa è soddisfatta, anche l'imposta in misura finita deve essere progressiva.

Poichè tutte le nostre rivelazioni statistiche mostrano che tanto $(-\check{w})$ quanto w sono decrescenti, il prodotto $(-\check{w})w$ deve esserlo *a fortiori*. Abbiamo quindi una buona ragione per dire che: il principio della differenza marginale conduce ad una imposta progressiva, praticamente in ogni punto di quella parte dell'intervallo dei redditi per il quale si dispone attualmente di osservazioni sull'utilità della moneta.

La condizione qui considerata può evidentemente essere formulata anche dicendo che la derivata logaritmica:

$$(11, 51) \quad - \frac{d w (r)}{d \log r}$$

deve essere decrescente.

IV. *Il principio del rapporto marginale.* — In base a questo principio l'imposta dovrebbe essere determinata in modo che, dall'applicazione di essa, l'utilità marginale della moneta fosse aumentata nella stessa proporzione per tutti i contribuenti. In altre parole, si dovrebbe avere:

$$(11, 52) \quad w(r - s) = (1 + c) w(r)$$

c essendo una costante.

Questo principio ha costituito la base della teoria di K. SCHÖNHEYDER (1), teoria particolarmente interessante perchè costruita sulle due ipotesi che: 1° - la flessibilità della moneta (presa positivamente) sia decrescente in tutto l'intervallo di reddito che si considera; 2° - la flessibilità della moneta (presa positivamente) sia inferiore all'unità per tutti gli individui eccetto che per i poveri. Queste ipotesi, in perfetto accordo coi risultati statistici di cui ora si dispone, sono notevoli soprattutto perchè in opposizione con ciò che la maggior parte degli economisti teorici avevano creduto prima che lo SCHÖNHEYDER le enunciasse. Ancora nel 1920 l'EDGEWORTH scriveva (2) esservi fortissime ragioni per presumere che « la soddisfazione, in quanto dipenda dal reddito, aumenti secondo un rapporto più rapidamente decrescente che la quota di aumento della funzione semplice proposta dal BERNOULLI... » e che « questa presunzione è ora comunemente, se pure non universalmente, accettata ». In altre parole, era « comunemente, se pure non universalmente ammesso » che la flessibilità della moneta (presa col segno positivo) fosse maggiore dell'unità. (Nella funzione originale di utilità del BERNOULLI non è fatta alcuna detrazione per il minimo di esistenza; sicchè, quando si parta da questa funzione, il valore assoluto della flessibilità della moneta è costantemente eguale all'unità. È questo il fatto al quale l'EDGEWORTH si riferisce).

Dalla (11, 52) deduciamo:

$$(11, 53) \quad \Phi = 1 - \frac{r[(1 + c) w(r)]}{r}$$

e conseguentemente:

$$(11, 54) \quad \check{\Phi} = \frac{r - s}{s} \left(1 - \frac{\check{w}(r)}{\check{w}(r - s)} \right)$$

(1) « Statsökonomisk Tidsskrift », Oslo (1907). Meno chiaramente lo stesso principio era stato stabilito da ROBERT MEYER nel suo libro *Die Prinzipien der gerechten Besteuerung* (1884); cfr. in particolare le pag. 312 e 332. Cfr. anche OSKAR JÄGGER, *Finanslaere*, Oslo, 1930, pag. 269. Le affermazioni del MEYER sono piuttosto vaghe; le sue espressioni *Intensitätsdifferenz*, *kleinere Schritte*, ecc., fanno ritenere che egli pensi qui al principio della differenza marginale.

(2) « Economic Journal » (1920, pag. 399).

Sviluppando la (11, 53) in serie di potenze di c otteniamo:

$$(11, 55) \quad \Phi = \frac{c}{(-\check{w})} + \dots$$

e quindi anche:

$$(11, 56) \quad \varphi = \frac{c}{(-\check{w})}.$$

L'ultima formula può essere dedotta direttamente osservando che, se l'imposta è infinitesima, la percentuale della quale l'utilità marginale della moneta aumenta in conseguenza dell'applicazione di essa, è un multiplo secondo $(-\check{w})$ della percentuale di cui il reddito diminuisce. Questa non è altro che la definizione della flessibilità marginale della moneta. Facendo costante la percentuale di aumento dell'utilità marginale della moneta in conseguenza dell'applicazione dell'imposta, cioè ponendo:

$$(-\check{w}) \varphi = c,$$

si giunge alla (11, 56). E da questa si deduce immediatamente la relazione:

$$(11, 57) \quad \check{\varphi} = (-\check{w})$$

la quale mostra come, quando si adotti il principio del rapporto marginale, condizione necessaria e sufficiente perchè l'imposta infinitesima sia progressiva in qualunque punto di un certo intervallo di reddito è che la flessibilità della moneta, presa col segno positivo, sia decrescente in ogni punto dell'intervallo stesso. In conseguenza della (11, 54), questa è anche una condizione sufficiente perchè sia progressiva un'imposta in misura finita.

Lo SCHÖNHEYDER giunse in modo rigoroso a stabilire questa condizione, ma commise un errore ritenendo che, quando si adotti il principio del rapporto delle aree, la condizione per la progressività dell'imposta sia che la flessibilità marginale della moneta (presa col segno positivo) debba essere *crescente*. Come abbiamo veduto, la condizione che si ricava dall'adozione del principio del rapporto delle aree riguarda la *misura* e non il *senso* della variazione della flessibilità marginale della moneta. In base alla (11, 44) la condizione è infatti che: il valore assoluto della flessibilità marginale della moneta aumentato del rapporto tra l'utilità rettangolare e l'utilità totale sia maggiore dell'unità.

Poichè tutti i risultati statistici riguardanti l'utilità della moneta indicano che il valore assoluto di essa decresce in modo monotono (almeno entro gli intervalli di reddito ai quali si estendono le nostre esperienze) la conseguenza dell'adozione del principio del rapporto marginale dovrebbe essere un'imposta progressiva.

V. *Principio del livellamento completo* (principio del sacrificio minimo). — I principi considerati finora sono stati più o meno di tipo euristico. Nessuno di essi è basato su un'analisi a fondo del comportamento del contribuente nelle condizioni di fronte alle quali egli viene effettivamente a trovarsi, cioè che l'imposta sia prelevata per *ciascuna* situazione di reddito. Se si adotta questa ipotesi più conforme alla realtà, si è condotti ad un principio di « giustizia » di natura del tutto differente.

Supponiamo che l'individuo sappia che in due diverse occasioni egli sarà nelle situazioni di reddito r_1 ed r_2 rispettivamente; che egli debba pagare un'imposta di ammontare totale dato, essendo però lasciato alla sua scelta il frazionamento per il pagamento di essa. Egli pagherà quindi rispettivamente nella prima e nella seconda situazione due quote s_1 ed s_2 legate dalla relazione:

$$(11, 58) \quad s_1 + s_2 = s$$

ma altrimenti arbitrarie. Questo principio può essere considerato una vera espressione della « giustizia » nella tassazione poichè si può giungere ad esso mediante un semplice schema teorico. *L'individuo non sceglie l'ammontare complessivo dell'imposta, ma sceglie la distribuzione di essa.*

Ci si può chiedere ora in qual modo il contribuente determinerà i due valori s_1 ed s_2 . La sua scelta sarà evidentemente fatta in modo da rendere massima l'espressione:

$$(11, 59) \quad \int_r^{r_1 - s_1} w(z) dz + \int_r^{r_2 - s_2} w(z) dz.$$

Il problema sta dunque nel determinare s_1 ed s_2 in maniera da dare alla (11, 59) il valore massimo possibile e da soddisfare nello stesso tempo la (11, 58). Ciò conduce alla condizione:

$$(11, 60) \quad w(r_1 - s_1) = w(r_2 - s_2).$$

Più in generale, se vi è una serie di situazioni di reddito, r_i ($i = 1, 2, \dots$) a ciascuna delle quali corrisponde una certa imposta s_i ($i = 1, 2, \dots$), dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$(11, 61) \quad w(r_i - s_i) = c$$

con c costante indipendente da i ; la (11, 61) definisce s_i come funzione di r_i . E poichè r dipende da i soltanto attraverso le r_i , esso può essere considerato come una variabile continua, ed s come una funzione di r definita da:

$$(11, 62) \quad w(r - s) = c.$$

w è una funzione monotona; la (11, 62) è quindi equivalente all'altra:

$$(11, 63) \quad r - s = r(c) = \text{costante.}$$

In altri termini, secondo questo principio generale, l'imposta sarà determinata in modo che il residuo di tutti i redditi dopo l'applicazione di essa sia costante. *Tutti i redditi sono così semplicemente livellati ad un unico valore $r(c)$.* Questo principio può essere designato col nome di principio della livellazione completa. Esso è stato studiato in particolare da F. Y. EDGEWORTH (1) e da T. N. CARVER (2) ma sembra aver esercitato un'influenza generale sul pensiero in questo campo. Consciamente o inconsciamente, appare alla base di una gran parte delle considerazioni svolte; forse è questo stesso principio che ispira la convinzione del buon senso che l'imposta sul reddito debba essere progressiva. Ciascuno ammetterà naturalmente che nella pratica il principio debba essere modificato in vista degli effetti disastrosi che la rigorosa applicazione di esso avrebbe sull'attività produttiva della società, supposto che l'attività stessa sia organizzata su una base capitalistica privata. Ma si entra qui in una questione diversa. Se si tien conto soltanto del lato del problema che riguarda l'utilità soggettiva, e si ammette che la situazione possa essere abbastanza ben rappresentata da una funzione di utilità $w(r)$ ad una sola variabile, la conclusione conforme al principio qui discusso sarà quella del livellamento completo dei redditi, il quale comporterebbe naturalmente una imposta negativa per i redditi più bassi.

Contro il principio del livellamento può essere obiettato che esso introduce nella tassazione considerazioni sociali e politiche che non hanno nulla a che vedere con le pure considerazioni fiscali. Si può sostenere che ciò è espresso dal fatto che il principio del livellamento non soddisfa al criterio del « lasciateli come li trovate », criterio che — secondo la mia opinione — non ha alcun significato e potrebbe essere rigorosamente applicato in un solo modo: con l'abolizione di ogni imposta. Basta che una sola imposta sia applicata perchè, strettamente parlando, i contribuenti non siano « lasciati come si trovavano »; e se appena si cerca di modificare il criterio in modo che divenga possibile variare sotto qualche aspetto la situazione, ci si trova immediatamente di fronte alla necessità di decidere quali caratteristiche della situazione debbano essere lasciate immutate. E con ciò si è ricondotti alla discussione dei vari principii possibili, la quale mostra poi che, dal punto di vista logico, il principio del livellamento ha almeno altrettanto valore che qualsiasi altro dei principii enunciati.

È ovvio che nella pratica il principio del livellamento dovrebbe essere modificato, non solo in considerazione dell'argomento della produzione capitalistica al quale abbiamo accennato sopra, ma anche perchè l'ipotesi che

(1) *The Pure Theory of Taxation - Part III* - « Economic Journal » (1897), pag. 550.

(2) *The Minimum Sacrifice Theory of Taxation* - « Political Science Quarterly » (1904).

$w(r)$ sia funzione di una sola variabile è troppo particolare: si dovrebbe tener conto, ad esempio, dell'effetto del *reddito abituale* (concetto che sarà definito più completamente nel successivo Capitolo XII). E può darsi benissimo che i risultati di questa e di altre possibili modificazioni portino a concludere che qualche combinazione dei primi quattro principii sopra enunciati offre un'approssimazione conveniente della soluzione rigorosa, suscettibile di essere applicata, anche se il principio del livellamento è adottato come base logica della teoria.

È evidente senza bisogno di ulteriore analisi che il principio del livellamento condurrà ad un'imposta progressiva, con la sola condizione che la utilità della moneta sia decrescente, fatto del quale non si può seriamente dubitare (a rigore, è necessario soltanto supporre che la funzione della utilità della moneta sia monotona, sicchè la sua funzione inversa sia determinata in modo univoco). Tuttavia non basta l'adozione di un criterio per stabilire se l'imposta debba essere progressiva oppur no; è necessario avere anche un'espressione esatta del saggio della progressione; la quale può essere facilmente ottenuta dalla (11, 63). L'espressione esplicita dell'aliquota della imposta fornita da questa equazione è:

$$(11, 64) \quad \Phi(r) = 1 - \frac{r(c)}{r}.$$

E la progressività dell'imposta diviene:

$$(11, 65) \quad \check{\Phi} = \frac{r(c)}{r - r(c)} = \frac{r - s}{s}.$$

In altri termini, l'aliquota dell'imposta è semplicemente rappresentata da un'iperbole equilatera avente per asintoti la retta $\Phi = 1$ e l'asse delle Φ ; essa cresce in modo monotono (per r positivo), passa dal negativo al positivo per $r = r(c)$ e si avvicina all'unità man mano che r cresce. Ove sia adottato il principio del livellamento, non ha significato di parlare di una imposta infinitesima nel senso dato a questa espressione nel caso dell'adozione di uno degli altri principii.

La distinzione fra i vari principii di « giustizia » discussi sopra non è stata sempre tenuta ben chiara. Anche studiosi eminenti dell'imposta progressiva sul reddito, come ad esempio R. A. SELIGMAN, parlano della differenza tra i vari principii con una superficialità sorprendente. Il SELIGMAN dice ad esempio, che la differenza tra la teoria di EML SAX e la teoria della Scuola olandese è « une simple différence de mots » (1) e muove obiezioni di semplice terminologia alla distinzione dello EDGE WORTH tra « eguaglianza dei sacrifici » e « proporzionalità dei sacrifici » (che, sotto questo rapporto si identifica con la distinzione tra la teoria del SAX e quella della Scuola olandese). Sembra

(1) Pag. 229 della edizione francese del libro del SELIGMAN, *Progressive Taxation*.

che nella distinzione dell'EDGEWORTH, il SELIGMAN non abbia veduto altro che una questione di nomenclatura; che egli non si sia reso conto del fatto che i due principii in questione differiscono nei riguardi di una proprietà ben definita la quale importa una differenza sostanziale nelle conseguenze che possono essere dedotte circa la progressività dell'imposta.

VI. *Principio marginale generale.* — Le modificazioni che è necessario apportare nella pratica al principio del livellamento possono essere concepite in diversi modi. Come esempi di questi possono essere considerati sia il principio della differenza marginale, sia il principio del rapporto marginale. Eventualmente potranno esservi anche altre modificazioni meritevoli di uno studio approfondito. Sorge quindi la questione se possa essere formulato un principio generale che comprenda tutte le modificazioni concepibili del principio del livellamento ed offra nello stesso tempo un mezzo utile per classificare queste modificazioni e mettere in evidenza, nella definizione di giustizia adottata, appunto le caratteristiche dalle quali dipende la progressività dell'imposta che ne risulta.

Il procedimento più naturale per la formulazione di un principio di questo genere sarebbe quello di *concentrare l'attenzione sulla natura del rapporto che intercede tra i valori dell'utilità marginale della moneta, prima e dopo l'applicazione dell'imposta.* Il rapporto può essere espresso sotto la forma di una funzione. Siano $w(r)$ e $w(r-s)$ rispettivamente le utilità marginali della moneta prima e dopo il prelevamento dell'imposta; $w(r-s)$ sarà dunque una funzione di $w(r)$ che indichiamo con $G(w)$; ossia:

$$(11, 66) \quad w(r-s) = G[w(r)].$$

L'assumere per $G(w)$ una forma particolare significa adottare un particolare tipo di definizione di « giustizia ». Caratterizzeremo la natura di questa funzione introducendo la sua flessibilità:

$$(11, 67) \quad \check{G}(w) = \frac{dG(w)}{dw} \cdot \frac{w}{G(w)}.$$

Se imponiamo la condizione che l'imposta sia distribuita in modo che l'ammontare residuo di un reddito elevato non divenga mai minore dell'ammontare residuo di un reddito più basso, ed ammettiamo inoltre che $w(r)$ sia una funzione decrescente in modo monotono, la $G(w)$ dovrà essere una funzione ad un sol valore e monotonicamente non decrescente. Esiste in questo caso una corrispondenza univoca tra la funzione $\Phi(r)$ dell'aliquota di imposta e la funzione $G(w)$. Da un lato abbiamo ora:

$$(11, 68) \quad G(w) = w \{ [1 - \Phi(r[w])] r(w) \}.$$

Il primo simbolo w che figura nel secondo membro della (11, 68) è un segno di funzione che esprime in qual modo l'ordinata dipende dall'ascissa nella

curva di utilità marginale della moneta; il secondo ed il terzo simbolo w indicano una variabile, cioè l'argomento di $G(w)$.

D'altro lato abbiamo:

$$(11, 69) \quad \Phi(r) = 1 - \frac{r \{G[w(r)]\}}{r}.$$

La (11, 68) esprime la funzione $G(w)$ in termini della funzione $\Phi(r)$; e la (11, 69) esprime Φ in termini di $G(w)$.

$G(w)$ dà una espressione perfettamente generale della natura della definizione di giustizia. Ad esempio, il principio della differenza marginale, il principio del rapporto marginale ed il principio del livellamento completo possono essere considerati come ottenuti dalla (11, 66) ponendo rispettivamente: $G(w) = w + c$; $G(w) = (1 + c)w$; $G(w) = c$. E la (11, 69) è una espressione generale del modo in cui l'aliquota di imposta dipende dalla definizione di giustizia. Vi sono tre funzioni che entrano in questo problema: la funzione della utilità marginale $w(r)$, la funzione di giustizia $G(w)$ e la funzione dell'aliquota di imposta $\Phi(r)$. Se le prime due di queste funzioni sono note, $\Phi(r)$ può essere determinata a mezzo della (11, 69). Ma la conoscenza della sola $w(r)$ non è sufficiente a determinare $\Phi(r)$. Questo è un altro modo di esprimere il fatto, sul quale abbiamo già insistito, che cioè la nostra curva di utilità della moneta determinata statisticamente non contiene *per se stessa* nè una prova favorevole nè una prova contraria della « giustizia » dell'imposta progressiva; la prova si ha soltanto quando si assume una particolare forma per la $G(w)$.

La flessibilità della (11, 69) è:

$$(11, 70) \quad \check{\Phi} = \frac{r-s}{s} \left(1 - \frac{\check{w}(r)}{\check{w}(r-s)} \check{G}[w(r)] \right).$$

Nel caso che siano adottabili i principii della differenza marginale e del rapporto marginale e del livellamento, rispettivamente, abbiamo:

$$\check{G}(w) = \frac{w}{w+c}; \quad \check{G}(w) = 1; \quad \check{G}(w) = 0.$$

Introducendo questi valori nella (11, 70) otteniamo ordinatamente, come casi particolari di essa la (11, 47), la (11, 54), e la (11, 65).

Se l'imposta s è infinitesima, abbiamo:

$$w(r-s) = w(r) [1 - \check{w}(r) \cdot \varphi]$$

e, introducendo questo valore nella (11, 66):

$$(11, 71) \quad \varphi = \frac{G(w) - w}{(-\check{w})w}.$$

Nel caso che si adotti il principio della differenza marginale o del rapporto marginale, si ha rispettivamente:

$$G(w) = w + e; \quad G(w) = (1 + e) w;$$

ed introducendo queste espressioni nella (11, 71), si ottengono come casi particolari la (11, 49) e la (11, 56).

Dalla (11, 71) deduciamo:

$$(11, 72) \quad \check{\varphi} = \frac{G(\check{G} - 1)}{G - w} \check{w} - \check{w}$$

che dà la condizione generale di progressività. La (11, 50) e la (11, 57) costituiscono dei casi particolari della (11, 72).

Possiamo chiederci se le formulazioni di « giustizia » che abbiamo adottate qui, cioè la (11, 69) e la equivalente (11, 70), abbiano qualche pratica utilità. Ritengo che alla domanda si debba rispondere affermativamente, non perchè la determinazione della natura precisa della funzione $G(w)$ da fondamentali *a priori* mi sembri molto probabile, ma perchè penso che la (11, 69) o la (11, 70) offrano *una formulazione naturale e plausibile del problema di interpolazione inerente alla graduazione dell'aliquota di imposta sul reddito*. Supponiamo, ad esempio che, per considerazioni politiche o sociali, per un giudizio di buon senso, o per qualche altra ragione, sia stato deciso che i tre redditi di 3000, 50.000 e 1.000.000 di dollari siano soggetti rispettivamente ad un'imposta sul reddito dell'1%, del 7% e del 50%. Se la risposta che io credo si debba dare alla domanda che ci siamo posti in principio è giusta, può apparire plausibile il determinare le aliquote intermedie a mezzo di una interpolazione effettuata al modo seguente. Supposta nota l'utilità marginale della moneta attraverso osservazioni statistiche (o, nel caso di serie di redditi più elevati, attraverso il metodo dell'intervista, di cui è fatto cenno nel Capitolo XII), i dati numerici precedenti determineranno in modo univoco, a mezzo della (11, 68), tre punti della curva $G(w)$ i quali consentiranno di interpolare la funzione $G(w)$ con un metodo più o meno empirico, ad esempio, supponendo che la $G(w)$ sia una parabola di secondo ordine (ipotesi che comprende, fra gli altri, come nei casi speciali, i principii della differenza marginale, del rapporto marginale e del livellamento). Determinata così la $G(w)$, risulta determinata anche, in conseguenza della (11, 69), la funzione dell'aliquota di imposta $\Phi(r)$. Questo procedimento comporta innegabilmente una certa arbitrarietà nella forma della curva interpolatrice adottata per $G(w)$; ma tale arbitrarietà è molto meno dannosa di quella che si introdurrebbe interpolando direttamente la funzione dell'aliquota di imposta $\Phi(r)$. Interpolando $G(w)$ utilizziamo, per così dire, la nostra conoscenza della curva di utilità della moneta per trasportare l'arbitrarietà del processo di interpolazione in una parte meno vitale del sistema.

I vari principii di giustizia qui discussi sono riassunti nella tavola VII.

Tavola VII. — PRINCIPI DI « GIUSTIZIA ».

Denominazione del principio	Autore	Definizione di « Giustizia »	Condizioni sotto le quali il principio in questione importa la progressività dell'imposta. (I numeri in parentesi si riferiscono alle formule del testo).
Principio della differenza delle aree (principio della eguaglianza dei sacrifici).	EMIL SAX	$\int_{r-s}^r w(z) dz = c$	$(-\check{w}) > 1$ (11, 37)
Principio del rapporto delle aree (principio della proporzionalità dei sacrifici).	N. G. PIERSON CORT v. d. LINDEN A. G. COHEN STUART	$\int_{r-s}^r w(z) dz = c \int_{\bar{r}}^r w(z) dz$	$\frac{rw}{W} + (-\check{w}) > 1$ (11, 44)
Principio della differenza marginale.		$w(r-s) = w(r) + c$	$(-\check{w}) + (-\check{w}^{\check{v}}) > 0$ (11, 50)
Principio del rapporto marginale.	K. SCHÖNHEYDER ROBERT MEYER	$w(r-s) = (1+c)w(r)$	$(-\check{w}^{\check{v}}) > 0$ (cioè: $(-\check{w})$ decrescente) (11, 57)
Principio del livellamento (principio del sacrificio minimo).	F. Y. EDGEWORTH T. N. CARVER	$w(r-s) = c$	$(-\check{w}) > 0$ (cioè w decrescente)
Principio marginale generale.		$w(r-s) = G[w(r)]$	$G(\check{G}-1)\check{w} > (G-w)w$ (purchè $G > w$) (11, 72)

XII. — ALTRI PROBLEMI.

Nel presente studio, ho evitato, con proposito determinato, tutte le questioni più o meno filosofiche connesse col concetto dell'utilità della moneta considerata come quantità. Ho ritenuto che i risultati statistici stessi, in quanto determinati a mezzo dei metodi impiegati, potessero essere assunti come definizione sufficientemente esatta del concetto di utilità. In conseguenza di ciò, alcuni importanti aspetti del problema sono rimasti fuori del quadro delle nostre considerazioni. È mia intenzione riprendere questi punti nel lavoro cui ho accennato sopra, che dovrà essere pubblicato negli « Atti della Accademia norvegese delle scienze ».

Vi è poi il problema della trasformazione di tutta la teoria da statica in dinamica. Come ho già accennato, una prima considerazione dell'aspetto dinamico della questione è contenuta nella mia memoria *Statikk og Dynamikk i den konomiske Theori* (1) ed una ulteriore elaborazione sarà data nell'accennata memoria di prossima pubblicazione negli « Atti dell'Accademia norvegese delle scienze ». Quanto al problema dei *cambiamenti strutturali*, l'analisi di essi è in qualche modo connessa, ma non identica, all'analisi dinamica. Il concetto al quale qui alludo può meglio essere illustrato con un esempio. Supponiamo di avere un filo a spirale; se attacchiamo un peso all'estremo del filo, osserveremo un allungamento della spirale, e per via sperimentale, potremo trovare una legge precisa che connetta la misura del peso con quella dell'allungamento. Questa legge sarebbe valida per pesi non troppo gravi, e *non lasciati attaccati al filo per un tempo troppo lungo*. Se lasciamo attaccato al filo un peso molto forte per un lungo periodo di tempo, troveremo, ritornando, che la legge originale che connette il peso e l'allungamento è cambiata. In economia si presentano molti fenomeni di natura simile. Ad esempio, se una persona aumenta il suo reddito, il punto rappresentativo sulla sua curva di utilità della moneta si muoverà lungo la curva verso il basso e a destra; ma se il punto è lasciato in questa posizione per un tempo considerevole, ciò avrà l'effetto di *far scorrere tutta la curva verso l'alto*, sicchè l'utilità della moneta, rappresentata dall'ordinata del punto in questione, crescerà di nuovo, anche se il nuovo reddito rimane costante. Vi sono diversi modi di tentare l'analisi di questo fenomeno. Un modo sarebbe quello di considerare l'utilità nominale della moneta w , come funzione non solo del reddito effettivo e del prezzo attuale della vita \bar{P} , ma anche del *reddito abituale* \bar{p} e del prezzo abituale della vita P . Per reddito abituale intendiamo il reddito medio che un individuo ha avuto durante gli ultimi anni. In pratica esso può forse essere definito come una semplice media mobile per gli ultimi 5 o 10 anni.

(1) « Nationalökonomisk Tidsskrift », Copenhagen, 1929, pag. 321-379.

Possiamo anche connettere il concetto di reddito abituale con il concetto dei componenti di una serie storica e definire il reddito abituale del primo ordine come il reddito medio durante l'ultimo ciclo di « 40 mesi »; definire poi il reddito abituale di secondo ordine come il reddito medio durante l'ultimo ciclo di « 10 anni », e così di seguito. Analogamente per il prezzo abituale della vita. Soltanto le indagini future potranno decidere quale di queste nozioni sia più proficua come strumento di analisi ulteriori.

Se si adotta il concetto di reddito abituale, l'espressione dell'utilità nominale della moneta dovrà essere scritta sotto la forma:

$$(12, 1) \quad \omega(\rho, P, \bar{\rho}, \bar{P}).$$

Questa funzione soddisferà ancora ad una equazione di proporzionalità in ρ e in P , analoga alla (2, 13), cioè:

$$(12, 2) \quad \lambda\omega(\lambda\rho, \lambda P, \bar{\rho}, \bar{P}) = \omega(\rho, P, \bar{\rho}, \bar{P});$$

ma in $\bar{\rho}$ e in \bar{P} l'equazione di proporzionalità avrebbe una forma un po' differente. Mancherebbe il fattore λ fuori del segno di funzione, perchè la utilità della moneta w non sarebbe misurata in unità di $\bar{\rho}$; w continuerebbe ad essere misurata in unità di ρ , sicchè avremmo:

$$(12, 3) \quad \omega(\rho, P, \lambda\bar{\rho}, \lambda\bar{P}) = \omega(\rho, P, \bar{\rho}, \bar{P}).$$

Quindi se supponiamo che

$$(12, 4) \quad w(r, \bar{r}) = \omega(r, 1, \bar{r}, 1)$$

sia la speciale funzione che esprime la dipendenza dell'utilità della moneta dal reddito effettivo r e dal reddito abituale \bar{r} , nel caso che tanto il prezzo effettivo della vita quanto il prezzo abituale della vita siano fatti eguali all'unità, dovremo avere:

$$(12,5) \quad \omega(\rho, P, \bar{\rho}, \bar{P}) = \frac{1}{P} w\left(\frac{\rho}{P}, \frac{\bar{\rho}}{\bar{P}}\right).$$

Si è condotti così allo studio di un problema riguardante la funzione di due variabili $w(r, \bar{r})$.

Analogamente, potremmo considerare l'utilità marginale della merce di paragone u , come funzione del consumo effettivo x e del consumo abituale \bar{x} , ed avremmo una equazione di equilibrio della forma:

$$(12, 6) \quad w(r, \bar{r}) = \alpha \cdot u(x, \bar{x})$$

dove $\alpha = \frac{P}{p}$ è, come prima, l'inversa del prezzo relativo. Poichè abbiamo ora attribuito due dimensioni al problema, la determinazione statistica effettiva delle relazioni presenterebbe naturalmente nuove ed interessanti difficoltà.

Anche nella teoria statica, senza complicazioni strutturali, vi è un problema che esige uno studio più profondo di quello presentato nei capitoli precedenti, cioè la determinazione numerica effettiva della flessibilità della moneta nel caso dei redditi molto elevati. In tale studio sarà essenziale — io penso — introdurre quelle che possono essere chiamate *utilità per gruppi*. Possiamo, ad esempio, considerare il gruppo di spese (*A*) consistente soltanto nelle spese *correnti* per vitto, abbigliamento, alloggio, ecc., ossia nelle spese per tutte le cose che entrano nel tipo dei bilanci che hanno costituito la base dello studio statistico del Capitolo VII. Avremmo poi un gruppo di spese (*B*) comprendente tutte le spese che entrano nel gruppo (*A*) ed inoltre certe spese connesse con bisogni che possono essere *cumulati* in intensità per un lungo periodo di anni, ed essere soddisfatti poi in un periodo di tempo relativamente breve, se vi sono mezzi disponibili. Tipico per questo genere di bisogni è quello del viaggiare (per piacere o per studio). Questo tipo di spese occupa un posto importante nella vita delle classi medie. E possono ancora essere classificate nel gruppo (*B*) « spese » del genere del risparmio. In breve (*B*), comprenderà un gran numero di elementi che non sono di tipo corrente e che quindi non possono essere oggetto di una analisi significativa, a meno che non si consideri la relazione tra reddito e bilanci di spese per un lungo periodo di anni. E tuttavia gli elementi che entrano qui in considerazione sono soltanto quelli che hanno una connessione definita con uno scopo ultimo di consumo.

In un terzo gruppo (*C*) dovremmo comprendere non soltanto tutte le spese precedenti, ma anche quelle che non hanno una relazione definita col consumo effettivo dell'individuo, pur avendo per lui grande importanza. Tipiche di questa categoria sono le spese del Sig. Henry Ford. La frazione delle sue spese totali afferente al suo consumo personale è infinitesima. Pensando ai vari elementi dei suoi redditi e delle sue spese, egli non li riferisce al proprio consumo: questi elementi significano piuttosto il successo o il fallimento di una certa attività nella quale ha concentrato tutta la sua vita e la sua ambizione. Egli persegue tale attività, non perchè questa sia un mezzo per « guadagnare la vita », ma perchè l'attività stessa ha avvinto lui. Forse si tratta semplicemente della soddisfazione di vedere i suoi affari espandersi sempre più; forse della sensazione del potere; forse di qualche concetto idealistico di « utilità sociale » della sua impresa; il motivo ispiratore non ha importanza per la nostra indagine. Il fatto essenziale è che il modo in cui Henry Ford considera i suoi redditi e le sue spese non ha nulla a che vedere col suo consumo personale, almeno finchè alla parola consumo si attribuisca il significato consueto. L'attività del Sig. Ford costituisce solo un esempio estremo nella nostra analisi. Ve ne sono di molti altri tipi che si avvicinano a questo: le attività di quasi tutti i grandi uomini di affari o speculatori hanno qualche caratteristica della specie indicata.

Quando si passa dunque ai gruppi di redditi più elevati, è essenziale specificare a quale tipo di utilità della moneta ci si riferisca: occorre speci-

ficare cioè se si tratti della specie di utilità della moneta alla quale si giunge limitando l'uso della moneta a spese del tipo (A); o se si debbano considerare tutte le spese del tipo (B); o ancora tutte le spese del tipo (C). Naturalmente i nostri gruppi (A), (B), (C) sono soltanto gruppi costruiti *grosso modo*, per convenienza. Altri gruppi più specificati possono avere interesse in circostanze particolari. Se i gruppi si specializzano sempre più, si può giungere fino alla utilità μ della merce singola definita nel Capitolo II, cioè alle utilità delle merci singole misurate per dollaro di valore.

Verosimilmente il concetto di utilità della moneta può essere definito in termini esatti anche se si riferisce ad un reddito e a spese del tipo (C). Ma il valore dell'utilità della moneta definito in questo modo varierebbe così profondamente da un momento all'altro, secondo particolari circostanze degli affari nei quali l'individuo si trova, che — nella migliore ipotesi — sarebbe molto difficile far rientrare questo concetto in una analisi teoretica sistematica. La situazione è molto più semplice quando l'utilità della moneta sia dedotta da un complesso di condizioni del tipo (B). E nel caso dell'utilità della moneta dedotta da una situazione del tipo (A), le difficoltà teoriche da affrontare quando si considerano redditi elevati, non sembrano affatto maggiori di quelle che abbiamo affrontate per redditi piccoli. Quando si passa invece alla misura effettiva, il gruppo dei redditi elevati presenta alcune difficoltà, anche pei concetti di utilità della moneta dedotti dalle situazioni (A) e (B). La difficoltà principale sta nella mancanza di dati statistici attendibili. Nel caso di questi redditi, per ottenere informazioni attuali sulla flessibilità della moneta, sarà presumibilmente necessario ricorrere ad una specie di *metodo di intervista*. Ho elaborato questo metodo nel 1922, ed in seguito l'ho sperimentato occasionalmente con amici; alcuni risultati ne sono dati in « Stats-økonomisk Tidsskrift », Oslo 1926, pag. 332. Finora le indagini basate su di esso non sono state condotte in modo esteso e sistematico; pure, me ne sono servito abbastanza per nutrire vive speranze che possa fornire un complemento prezioso dei metodi statistici descritti nei capitoli precedenti, ed un mezzo di riprova di essi. Penso anche che, in un certo senso, i risultati ottenuti col metodo dell'intervista possano essere considerati più attendibili che quelli di qualsiasi altro metodo, perchè sono ottenuti andando più direttamente alla base dei giudizi individuali. Il metodo ha inoltre il vantaggio importante di non richiedere una grande quantità di lavoro; se opportunamente organizzato, esso può quindi essere facilmente applicato su larga scala, per zone geografiche estese ed ampie classi di popolazione.

In breve, il metodo consiste nell'interrogare in un modo fisso e sistematico persone di diverse classi sociali, appartenenti ad intervalli diversi della scala dei redditi, circa la specie delle transazioni di scambio alle quali consentirebbero se, per una ragione o per l'altra, i loro redditi dovessero variare. Con una formulazione intelligente e sistematica delle domande, il valore della flessibilità della moneta può così essere determinato entro limiti di errore molto ristretti.

Le domande possono essere variate in molti modi. In ciascun caso esse dovranno naturalmente essere adattate al grado di intelligenza e di cultura delle persone interrogate. È ovvio, ad esempio, che le domande dovranno essere accompagnate da spiegazioni molto più lunghe e dettagliate quando la persona interrogata è un uomo comune che quando è un economista di professione. Quest'ultimo comprenderà senza dubbio molto più rapidamente di che cosa si tratti; al primo potrà essere necessario dire qualche cosa dello scopo e del significato più profondo delle domande, altrimenti queste potranno anche sembrargli un po' strane. Riporto qui di seguito un breve schizzo di una serie di domande che ho recentemente usato con un mio amico, un professore che vive negli Stati Uniti, ha un reddito di 6000 dollari l'anno, è coniugato e senza figli.

« Voi conoscete il tenore di vita al quale potete mantenervi col vostro reddito attuale. Cercate di rendervi chiaro conto di esso. Pensate solo a quella parte del reddito che abitualmente consumate e non tenete conto dei risparmi. Prescindete anche dalle grandi spese occasionali, come viaggi e simili. Pensate solo all'uso corrente del reddito, per scopi di consumo, e nell'anno in cui lo realizzate. Immaginate ora che nel prossimo anno il vostro reddito sia del 50% più elevato e che nell'anno successivo torni di nuovo al livello abituale. L'aumento di reddito del prossimo anno dovrà essere consumato nell'anno, altrimenti andrà perduto. Non esiste alcuna possibilità di risparmio. (Per agire con più accorgimento si può ricorrere a variazioni percentuali. Ciò è sufficiente per la determinazione della flessibilità. Ma se la persona interrogata non muove obiezioni, è meglio riferirsi a variazioni assolute. Le domande sono allora più facili a formulare. E nei risultati ottenuti figurerà il valore assoluto del reddito in questione).

« *Rebus sic stantibus*, avrete probabilmente il desiderio di trasferire a quest'anno una parte del reddito dell'anno prossimo. In altre parole desidererete probabilmente usare ora qualche quota dell'aumento di reddito, anziché accumulare nel prossimo anno tutti gli aumenti di consumi. Immaginate che sia impossibile per voi, in condizioni normali, ottenere un prestito da una banca. Voi tratterete soltanto con me: sono il solo che possa aiutarvi in questa situazione. Metterò quest'anno a vostra disposizione 500 dollari. Naturalmente non farò ciò senza un forte premio: dovrete restituirmi una somma di denaro maggiore di quella che vi presto. Accettate l'affare se vi chiedo di restituirmi 1000 dollari? (Risposta: no); accettate se vi chiedo di restituirmi l'anno venturo 510 dollari? (Risposta: si); e 800 dollari? (Risposta: no); e 550 dollari?, ecc. ».

È facile comprendere quando è che ci si avvicina al punto di indifferenza. Allora il tempo preso per rispondere alla domanda diventa più lungo. Con un po' di pazienza si può determinare un limite superiore che sarà decisamente rifiutato, ed un limite inferiore che sarà sicuramente accettato. La media tra questi valori massimo e minimo può essere assunta come espressione dell'ammontare del reddito dell'anno prossimo che si trova nel punto di indif-

ferenza nei riguardi di una transazione che consenta un aumento del reddito dell'anno in corso. Nel caso reale qui considerato tale ammontare si aggirava sui 600 dollari. Il rapporto tra l'ammontare ricevuto nell'anno in corso e l'ammontare ceduto nell'anno prossimo esprimerà approssimativamente il rapporto tra le due utilità della moneta, purchè le quantità prese in considerazione non siano troppo alte. Poichè $\frac{600}{500} = 1,2$, la flessibilità media della moneta (presa col segno positivo) in relazione ad un reddito compreso fra 6000 e 9000 dollari per l'individuo interrogato in questo caso risulta approssimativamente eguale a:

$$(-\check{w}) = \frac{\log 1,2}{\log 1,5} = \frac{0,079}{0,176} = 0,448.$$

Tutto il sistema di domande può poi essere ripetuto riferendolo all'ipotesi che il reddito del prossimo anno sia inferiore al reddito di quest'anno, e si possono anche tentare domande con una serie di alternative differenti per il reddito del prossimo anno.

Qualunque sia la natura delle domande, abbiamo la seguente formula generale per la determinazione della flessibilità della moneta:

$$(12, 7) \quad (-\check{w}) = \frac{\log (\delta_2/\delta_1)}{\log (r_2/r_1)}$$

dove r_2 ed r_1 sono rispettivamente il più grande e il più piccolo dei due redditi che ricorrono nelle domande e δ_2 e δ_1 sono rispettivamente il maggiore e il minore dei due ammontari che sono indifferenti allo scambio. In via di approssimazione, la (12, 7) può essere considerata come espressione della *flessibilità puntuale* nel punto corrispondente al valore $r = \sqrt{r_1 r_2}$ del reddito.

Formulando in questo modo una serie di domande su ipotesi che si distribuiscano tra quella che il reddito del prossimo anno sia virtualmente eguale al minimo assoluto di esistenza e quella che il reddito del prossimo anno sia molto elevato, *potrà essere costruita tutta la curva della flessibilità.*

Tutte le curve di flessibilità che ho determinate in questo modo hanno presentato le stesse caratteristiche di quelle determinate statisticamente, cioè un decremento monotono del valore assoluto della flessibilità, da valori maggiori dell'unità per redditi piccoli a valori minori dell'unità per redditi più elevati.