Befolkningsoptimum.[1]

Av professor Ragnar Frisch.

1. PROBLEMSTILLINGEN

Når en utvandrerflokk tar nytt land i besittelse — som f. eks. de første europeiske utvandrere til Nord-Amerika — vil de til å begynne med arbeide under enkle og på mange måter trange kår. Redskaper og husdyr kan de bare ha brakt med i begrenset mengde. Husene de bygger i den første tiden må bli primitive, og nybyggerne har ingen av de fordelene som følger med den høyt utviklede økonomiske organisasjon i de gamle land. Til gjengjeld har de naturressurser i overflod. Det er kanskje uvisst hvor varierte disse er, det vil først vise seg etter som landet blir utforsket. Men det vil sikkert være noen naturherligheter som allerede straks er nyttbare, og som er til stede i overflod i forhold til nybyggernes behov. Slik vil det iallfall være så sant utvandringen ikke har vært et fullstendig feilgrep.

Etter som det nye landet blir bygd ut og folkemengden vokser, vil de produktive foretakene og hele den økonomiske organisasjon ellers bli utformet i en større skala. Og det

[1] Denne avhandlingen er skrevet vesentlig med sikte på de økonomiske studerende ved Universitetet, men vil kanskje ha interesse også for andre som beskjeftiger seg med befolkningsspørsmålet. Den behandler bare rent prinsipielle ting. De fleste av dem kan fremstilles i tilknytning til den generelle produksjonsteori. Det får være min unnskyldning for at jeg i det hele tatt har befattet meg med temaet. Jeg betrakter meg ellers på ingen måte som befolkningsteoretiker.

Formuleringen av ekskurset er påvirket av flere stimulerende samtaler med studentene, særlig med Harald Bugge og Olav Egeberg, og med cand. oecon. Sten Nilson. En særlig takk retter jeg til stud. oecon. Eivind Erichsen som har gått igjennom hele manuskriptet. Forf.

gjør den økonomiske virksomhet mer *effektiv*. Det kan gjennomføres en stadig mer vidtdreven arbeidsdeling, produktive anlegg kan bygges med større kapasitet og det betinger mindre enhetsomkostninger; oppkomsten av den ene slags industri vil hjelpe den annen både som kunde og som leverandør osv. Det vil kort sagt utvikle seg alle de *internal* og *external economies* som Alfred Marshall har skildret. Alt dette bevirker at innbyggernes realinntekt og levestandard etter hvert heves. De rettsformer som utvikler seg, særlig måten hvorpå eiendomsretten utformes, kan kanskje bevirke en mer eller mindre ujamn *fordeling* av de økonomiske goder, og de åndelige og karaktermessige egenskaper hos folket vil kanskje ikke holde skritt med den materielle framgangen. Men dette er spørsmål for seg som vi ikke skal gå inn på i denne forbindelse.

Samtidig med at den økonomiske utvikling går framover slik at levestandarden heves, blir landets *naturherligheter* tatt mer og mer i bruk. På mange områder er kanskje allerede den grense nådd hvor vedkommende herlighet går over fra et fritt gode til et økonomisk gode med pris. Uttrykt produksjonsteoretisk: vedkommende gode er ikke lenger en faktor som kan tilsettes *maksimalt* dvs. så langt at dens grenseproduktivitet blir null. En må husholde med den, altså stanse bruken av den på et punkt hvor den har en *positiv* grenseproduktivitet. Etter hvert vil flere og flere av naturfaktorene komme i denne stilling; de blir *knapphetsfaktorer* som gjør at den videre utvidelse av produksjonen bare kan skje under et relativt avtagende utbytte. Dette er en ny tendens som oppstår og som *går imot* den tendensen til øket levestandard som blir skapt ved internal og external economies. Den omstendighet at landets naturherligheter er begrenset, setter på denne måte *en bestemt skranke for hvor intensivt det vil være fordelaktig å utbygge og befolke landet*. Hvis utbyggingen og befolkningen ikke er ført langt nok, vil de internal og external economies som kan oppnås ved å øke utbygging og befolkning, gjøre det mulig å heve levestandarden ytterligere. Men går en for langt i utbyggingen og befolkningen, vil levestandarden bli trykket ned på grunn av den tendens til avtagende utbytte som framkommer fordi naturressursene er begrenset. Det finnes altså et punkt

imellom, hvor levestandarden blir *høyest mulig*. Den befolkningsstørrelse som gir denne høyest mulige levestandard kalles den *optimale befolkning* på vedkommende landeområde, dvs. på vedkommende sum av naturressurser.

Begrepet befolkningsoptimum er altså framkommet ved at en ser befolkningsstørrelsen i forhold til de naturressurser som befolkningen rår over. Men problemet ligger ikke bare i det *relative* størrelsesforholdet mellom disse to faktorer. Presisere uttrykt: forholdet er ikke så enkelt at det stilisert kan gjengis ved å betrakte nasjonens totalprodukt som en funksjon av befolkning og naturressurser, idet disse to variable antas å virke som produksjonsfaktorer i en todimensjonal *paripassulov* (dvs. en produksjonslov som er slik at produktet m-dobles hvis begge faktorer m-dobles). Hvis produksjonsloven var så enkel, ville selve pointet ved befolkningsoptimumsproblemet forsvinne. Da kunne en jo nemlig til enhver tid sørge for bare å ta *så meget* av naturressursene i bruk at forholdet mellom disse naturressurser og den på dette tidspunkt gitte befolkning var nettopp lik *det* forhold som ved denne produksjonslov gjorde levestandarden — oppfattet som kvotienten mellom produktmengde og befolkning — størst mulig. Den således bestemte levestandard ville, om produksjonsloven var en paripassulov, ikke kunne økes ved en øking av befolkningen. Den ville ganske enkelt holde seg *konstant*, uavhengig av befolkningens størrelse, forutsatt bare at naturressursene alltid ble tilsatt i samme konstante mengde pr. befolkningsenhet. Noe befolkningsoptimum ville altså ikke eksistere. Enhver befolkning (som er mindre enn den for hvilken naturressursene begynner å bli en knapphetsfaktor) kunne med samme rett oppfattes som optimal. Pointet ligger altså i at produksjonsloven har *ultrapassumkarakter* når den betraktes som en produksjonslov i de to faktorer: folkemengde og naturressurser. Det er altså ikke i og for seg den omstendighet at en økende befolkning tvinger produksjonen ut i et ugunstig kombinasjonsforhold mellom produksjonsfaktorene arbeid og naturressurser, som skaper problemet; men den omstendighet at det *før* en blir nødt til å gå over i denne ugunstige kombinasjon kan oppnås visse fordeler ved internal og external economies.

Dette er problemet om befolkningsoptimum uttrykt i sin aller enkleste form. Problemet må selvsagt utdypes i mange retninger: befolkningsoptimum må ses ikke bare i forhold til en viss sum av naturressurser. En må også undersøke hvorledes det henger sammen med størrelsen av den oppsamlede kapital, og med det nivå som teknikken har nådd osv.

Og en må se spørsmålet ikke bare statisk, men også dynamisk, dvs. en må få inn en jamføring mellom levestandardene på forskjellige tidspunkter, og på denne måte trekke hele oppsparingsproblemet inn. En prøver da å bestemme den til enhver tid gunstigste deling av nasjonalinntekten i en forbruksdel og en sparingsdel under samtidig hensyntagen til den optimale befolkningsutvikling.

I denne avhandlingen skal vi prøve å stille opp en tankemodell hvoretter en kan få klarlagt og avgrenset mot hverandre de viktigste av de mange og høyst forskjelligartede synspunkter som kan anlegges i forbindelse med befolkningsoptimum. Denne tankemodellen er i alt vesentlig bygd opp ved hjelp av de begreper en opererer med i produksjonsteorien, ja en kan si at hele problemet om befolkningsoptimum i prinsippet bare er et eksempel på anvendelsen av det generelle begrepsapparat som er utviklet i produksjonsteorien. Vi begynner med de enkleste forutsetninger og innfører komplikasjonene først etter hvert.

Blant økonomer og demografer har det i de senere år foregått en meget omfattende drøfting av spørsmålet om befolkningsoptimum, og et vell av beskrivende materiale over reallønn, beskjeftigelsesgrad osv. er blitt brakt fram for å belyse spørsmålet, men de prinsipielle linjer og begrepsdannelsen har ikke vært så klar som en kunne ønske.

2. STATISK ANALYSE AV BEFOLKNINGSOPTIMUM

2. a. *Inntektsfunksjonen.*

Vi betrakter et folkehushold og kommer særlig til å få bruk for følgende begreper som beskriver det:

R = nasjonens samlede realinntekt pr år
C = realforbruket (real konsumsjon) pr år
S = realsparingen pr år
K = realkapitalens størrelse
L = naturressursene

N = folkemengden
T = en indeks for det tekniske nivås høyde.

Vi har $R = C + S$, og går ut fra at S er det samme som I = nettoinvesteringen.

Det tekniske nivå oppfatter vi som innbegrepet av de kjente tekniske muligheter som til enhver tid er tilstede. Det er altså den tekniske bakgrunn for produksjonen, slik den er bestemt av oppfinnelser som til da er gjort. Dette er ikke det samme som de tekniske enkeltheter som til enhver tid er tatt i bruk i produksjonen. De tekniske enkeltheter — den konkrete form hvori kapitalen anvendes i produksjonen — vil selvsagt avhenge ikke bare av det som til enhver tid er kjent, men også av hvor stor kapital en arbeider med. Ta f. eks. et gårdsbruk som p. g. a. den særlig billige arbeidskraft på stedet drives lite kapitalintensivt, dvs. med liten kapitalanvendelse pr arealenhet. Skuronna gjøres f. eks. bare med ljå og håndbinding av kornnekene. Hvis bruket skal gå til mer kapitalintensiv drift, la oss si til en tredobling av kapitalen, vil det selvsagt ikke skje ved at det anskaffes tre ganger så mange ljåer. Det vil skje ved at det anskaffes en slåmaskin med selvbinder, kanskje også en traktor til driften. Allikevel kan vi si at denne forandring i kapital«mengden», nemlig tredoblingen, er foregått «under konstant teknikk», for hele det tekniske nivå i samfunnet kan ha vært det samme. Selvbinder og traktor kan ha vært vel kjent hele tiden, men kom bare ikke til anvendelse på dette bruket på grunn av de spesielle forhold det arbeidet under. Det er i denne forstand en må oppfatte «en variasjon av K under konstant T».

Kapitalmengdebegrepet K kan ytterligere presiseres ved å angi hvorledes en skulle måle det statistisk. Det måtte skje ved at en først bestemte verdien av de reelle kapitalgjenstander som til enhver tid kom til anvendelse, regnet f. eks. i kroner, og deretter foretok en deflatering av denne verdien ved å dividere den med en prisindeks for disse kapitalgjenstandene. Det framkomne ville bli en mengdeindeks for kapitalen og kunne tas som et statistisk mål for K. Hvis vi følger de forandringer som skjer over tiden, kan det selvsagt godt hende at dette statistiske mål tatt for et land under ett forandrer seg — ja kanskje forholdsvis raskt — mens «det tekniske nivå» ikke endres eller iallfall bare endres lite. Da har vi hatt «en variasjon av K under konstant T».

K kan altså defineres som en tallmessig størrelse. Og variasjoner i denne størrelse kan gjøres til gjenstand for optimaliseringsbetraktninger av lignende art som dem en gjør gjeldende for produksjonsfaktorene i den generelle produksjonsteori. Disse betraktninger rommer noe av det vesentlige ved problemet om befolkningsoptimum. Hele det økonomiske spenningsforholdet mellom nåtid og framtid i befolkningen kommer inn her, altså det spenningsforholdet som bestemmer befolkningens forsyning med produserte produksjonsmidler. Derfor opptar drøftelsene av variasjonene i K en bred plass i det følgende.

Det tekniske nivå T får mer karakteren av en indikator for visse kvalitativt forskjellige alternativer. I denne indikator kan forøvrig også tenkes inkludert det gjeldende system av samfunnsmessig gitte institusjoner (eiendomsrett, reguleringer av næringslivet osv.). Disse kvalitativt forskjellige aternativer kan nok grupperes etter hverandre, slik at en kan tale om at et teknisk nivå er «høyere» enn et annet. Men et statistisk mål for hvor meget høyere er vanskelig å konstruere. (Jfr. «indikatoren» i valghandlingsteorien). T kan altså ikke måles ved noe enkelt tall på samme enkle måte som K.

Dertil kommer at det konkret sett er en bestemt forskjell mellom variasjonene i K og T. For K kan det forekomme både stigninger og fall. En nasjons realkapital vil øke når bruttooppsparingen mer enn dekker depresieringen (kapitalslitet). Men i motsatt fall vil realkapitalen minske. For ikke å snakke om at en nasjons realkapital kan bli redusert ved krig eller naturkatastrofe. Variasjonene i T derimot, altså i den bakgrunn av teknisk kunnskap som den økonomiske produksjon til enhver tid bygger på, er i alt vesentlig irreversibel. Historisk sett har den i det vesentlige foregått i én retning, nemlig mot et stadig høyere nivå. Enkelte tekniske kunnskaper er kanskje gått tapt i historiens løp, men det er unntagelser. I det vesentlige er det riktig å si at vår tid har alle de tekniske kunnskaper som tidligere tider hadde, og dessuten mange flere. Derfor er det ikke noen fruktbar teoretisk opplegging av problemet å føre inn T som en vari-

abel parameter av samme karakter som K, altså en parameter hvori en tenker seg foretatt optimalitetsvariasjoner. Når en vil drøfte forandringer i T, kan det skje bedre ved å tenke seg at produktfunksjonen i N og K sprenges, så vi får en ny produktfunksjon (med lavere omkostningskurver). Også slike sprengninger er det selvsagt av stor betydning å drøfte i forbindelse med spørsmålet om befolkningsoptimum, ikke minst fordi endringene i folkemengden foregår på så langt sikt at det samtidig kan ha skjedd en større eller mindre hevning i det tekniske nivå. På mange punkter i det følgende vil en derfor finne henvisninger til det som en kan regne med vil skje ved en hevning av det tekniske nivå. For å få en klar innsikt i sammenhengen og for å holde de forskjellige momenter fra hverandre er imidlertid disse sprengninger drøftet ut fra de resultater en kommer til ved først å studere det som ville skje ved variasjoner i N og K under konstant T.

En må skille mellom de historiske (faktiske) variasjoner som kan forekomme i de størrelsene vi nevnte foran og hypotetiske variasjoner i disse størrelser. De hypotetiske variasjoner framkommer ved at vi betrakter forskjellige tenkte alternativer, f. eks. et hvor $R = 100$, $C = 80$, osv., et annet hvor $R = 110$, $C = 85$, osv. Tankegangen er: Hvis $R = 100$, $C = 80$, osv., så vil...... Det er ved hjelp av slike hypotetiske variasjoner, ikke ved hjelp av de faktiske, at begrepet optimumsbefolkning defineres. I den statiske analyse vil de alternativer vi betrakter som regel være forskjellige stasjonære situasjoner. Dvs. hver av de hypotetiske situasjoner vi betrakter vil være karakterisert ved en viss stasjonær størrelse på R, en viss stasjonær størrelse på C, osv. I den dynamiske teori blir de hypotetiske alternativer mer kompliserte.

Vi avgrenser vår analyse på den måten at nasjonalinntekten R tenkes å være en gitt funksjon av N, K, L og T. Vi kaller den inntektsfunksjonen og skriver den

$$R = R(N,K,L,T) \tag{2a.1}$$

Dette er en plausibel forutsetning: Med gitt teknisk nivå vil den nasjonalinntekt som kan framstilles innenfor et visst naturressursområde avhenge av folketallet og kapitalmengden.

Hvis det folkehusholdet vi betrakter ikke er isolert, må vi forutsette at fordelene (og ulempene) ved at det står i handelsforbindelse med andre folkehushold, er innkalkulert i inntektsfunksjonen slik at altså funksjonen gir et uttrykk for hva folket virkelig kan produsere under hensyntagen til alle de forhold hvorunder det arbeider.

N, K og L vil bli betraktet som kontinuerlige variable. Det er særlig variasjonen i folkemengden N og kapitalmengden K vi kommer til å betrakte. En stor del av diskusjonen om befolkningsoptimum er blitt forkludret fordi en ikke klart har regnet med den simultane variasjon i disse to variable (eventuelt i de tre variable N,K,L), men har forsøkt å klare seg med en endimensjonal analyse.

Grenseproduktivitetene m. h. p. henholdsvis folkemengden og kapitalmengden betegner vi

$$R_N = \frac{\delta R(N, K, L, T)}{\delta N} \tag{2 a. 2}$$

$$R_K = \frac{\delta R(N, K, L, T)}{\delta K} \tag{2 a. 3}$$

Det at analysen må gjøres to- (eller fler-) dimensjonal er en helt annen ting, enn det at en må sondre mellom historiske og hypotetiske variasjoner. De to inndelinger krysser hverandre fullstendig. For begge de to variable N og K må en altså skille mellom historiske og hypotetiske variasjoner.

Forbruksstandarden eller levestandarden kan defineres fysisk eller psykisk. Fysisk er det naturlig simpelthen å sette den lik realforbruket pr hode, altså lik

$$c = \frac{C}{N} = \text{realforbruk pr hode} = \text{den fysisk definerte} \tag{2 a. 4}$$

forbruksstandard (levestandard).

Psykisk kan forbruksstandarden (levestandarden) defineres som den totalnytte u(c) som realforbruket c skaper hos et typisk medlem av folkehusholdet.

Inntektsstandarden kan defineres som

$$r = \frac{R}{N} = \text{realinntekten pr hode} = \text{inntektsstandarden.} \tag{2 a. 5}$$

Hvis vi bare betrakter stasjonære situasjoner, må til enhver tid nettoinvesteringen I (som er tilvekstgraden for kapi-

talen) være null, altså $R = C$ og følgelig levestandarden og inntektsstandarden bli synonyme begreper.

I det stasjonære tilfelle blir det altså likegyldig enten vi legger levestandarden eller inntektsstandarden til grunn for definisjonen av befolkningsoptimum. I det generelle tilfelle vil det derimot bli forskjell. Hvilket av de to begreper bør da legges til grunn? Hvis analysen er lagt an statisk, altså slik at det som skjer eller tenkes å skje innenfor ett år brukes til definisjon av befolkningsoptimum — uten at en foretar noen sammenligninger mellom forskjellige år —, er det åpenbart inntektsstandarden vi må bruke. Et øket forbruk innenfor et enkelt år kan en jo alltid helt vilkårlig få i stand bare ved å bruke opp av en forhåndenværende kapital. En slik vilkårlig oppbruking er noe vi må holde utenfor når vi skal definere det gunstigste forhold mellom folkemengde og naturressurser. Vi må da bare regne med det forbruk som kunne realiseres uten å angripe den gitte kapital, dvs. vi må regne med inntektsstandarden. Men ser vi problemet dynamisk, idet vi både spør om det gunstigste folketall og den gunstigste oppsparing til enhver tid — hvilket selvsagt medfører en sammenligning mellom forskjellige år —, må vi legge forbruksstandarden til grunn. Når en lang årrekke sees i sammenheng, er det jo forbruket det gjelder å maksimere, oppsparingen er bare et middel til senere forbruk. Vi skal først drøfte problemet statisk, og tar derfor først inntektsstandarden som utgangspunkt.

2 b. *Det partielle (ensidige) befolkningsoptimum.*

La oss først tenke oss at både T og L er gitt, og at dessuten kapitalmengden K har en bestemt konstant størrelse. Og la oss se hvorledes under disse omstendigheter inntektsstandarden vil variere om folkemengden N forandres. Hvis (2 a. 1) har karakteren av en produktfunksjon med optimumskarakter i hver av produksjonsfaktorene, vil inntektsstandarden $r = \frac{R}{N}$ få et forløp som i fig. (2 b. 1). Det er altså et visst punkt, dvs. en viss størrelse $\bar{N}$ av befolkningen for hvilken gjennomsnittsproduktiviteten — som nå er representert ved $\frac{R}{N}$ — blir størst mulig (gjennomsnittsoptimum i produksjonsteoretisk terminologi). Vi kaller denne størrelse $\bar{N}$ det partielle ensidige befolk-

ningsoptimum. Vi kan også kalle det befolkningsoptimum i den partielle *egen-variasjon* betydningen for å markere at *befolkningen selv* (altså den størrelse som utgjør nevneren i $\frac{R}{N}$, som altså totalproduktet *ses i forhold* til) tenkes å variere.

I området til venstre for optimumspunktet, altså der $N < \bar{N}$, sier vi at befolkningen er underoptimal, i området til høyre, altså der $N > \bar{N}$, sier vi at den er overoptimal (i egenvariasjonsbetydningen).

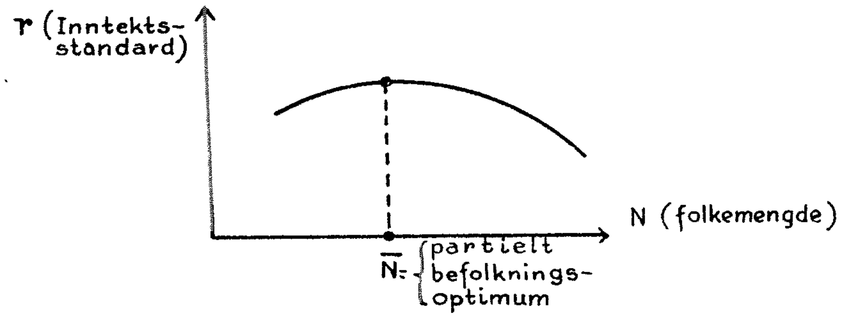

Fig. 2 b. 1.

Det analytiske kriterium på disse tilfellene finnes ved å ta den partielle tilvekstgrad

$$\frac{\delta}{\delta N}\left(\frac{R}{N}\right) = \frac{N\frac{\delta R}{\delta N} - R}{N^2} = \frac{1}{N}\left(R_N - \frac{R}{N}\right) \qquad (2\text{ b. }2)$$

Fra produksjonsteorien vet vi at grenseproduktiviteten er større enn gjennomsnittsproduktiviteten til venstre for optimumspunktet, men omvendt til høyre. Kriteriet på det partielle befolkningsoptimum kan altså uttrykkes slik: Befolkningen er partielt underoptimal, optimal eller overoptimal etter som grenseproduktiviteten m. h. p. folkemengden er større, lik eller mindre enn gjennomsnittsproduktiviteten, altså etter som

$$R_N \gtreqless \frac{R}{N}. \qquad (2\text{ b. }4)$$

Produktmengden er her å oppfatte som nasjonalinntekten R.

Vi kan også uttrykke kriteriet ved hjelp av *optimalkoeffisienten* («grenseelastisiteten», «den virtuelle produktandel»). Den er definert som

$$\varepsilon_N = \frac{\delta R}{\delta N}\cdot\frac{N}{R} = R_N \cdot \frac{N}{R}. \qquad (2\text{ b. }5)$$

Dette er intet annet enn forholdet mellom *grense*produktiviteten m. h. p. folketallet og *gjennomsnitts*produktiviteten. Men ε_N kan også oppfattes som en *grenseelastisitet* som uttrykker hvor *raskt*, prosentvis regnet, produktet stiger i forhold til N i vedkommende punkt. $\varepsilon_N > 1$ betyr altså at det hersker et relativt tiltakende utbytte; og det ubenevnte tall ε_N vil være et mål for *hvor sterkt* tiltakende utbyttet er. Omvendt når $\varepsilon_N < 1$.

Kriteriet på befolkningsoptimum definert ved ensidig variasjon av befolkningen selv kan derfor også uttrykkes slik: Hvis $\varepsilon_N > 1$ (tiltakende utbytte) sier vi at befolkningen er underoptimal, hvis $\varepsilon_N = 1$ (konstant utbytte) sier vi at den er optimal, og hvis $\varepsilon_N < 1$ (avtakende utbytte) sier vi at den er overoptimal (i egenvariasjonsbetydningen).

Da en kan regne med at ε_N synker noenlunde jamt etter som N stiger (og alt annet, inklusive K, er konstant), vil størrelsen av ε_N ikke bare angi *om* befolkningen er under- eller overoptimal (i egenvariasjonsbetydning), men også gi et mål for *hvor sterk* avvikelsen fra optimum er. Den måler styrken av avvikelsen ved den *intensitet* som det tiltakende eller avtakende utbytte har i vedkommende punkt; altså ved ordinaten og ordinatsforandringene på produksjonskurven i fig. (2 b. 1.). I denne forstand kan størrelsen av ε_N tas som en indikator for *tilpasningsmangelen* («degree of maladjustment») ved partiel variasjon av N. Merk at «mangelen» da må tolkes relativt: det er det som folkemengden *ved den gitte kapitalmengde*, det *gitte tekniske* nivå (og ved en statisk betraktning) mangler på å være optimal. Jfr. senere om det dynamiske optimum.

Tilpasningsmangelen kan selvsagt også uttrykkes bare ved hjelp av abscissen på produksjonskurven, nemlig ved forholdet

$$\frac{N - \bar{N}}{\bar{N}} = \frac{N}{\bar{N}} - 1. \qquad (2\text{ b. }6)$$

Men dette forholdstall kan ikke, som ε_N, defineres *intrinsict*, dvs. ved bare å bruke de lokale egenskaper ved produksjonskurven i omegnen av et hvilket som helst vilkårlig valt punkt: (2 b. 6.) får en mening først etter at hele kurven er sett i sammenheng og derved optimumsstørrelsen $\bar{N}$ er beregnet. Derfor er grenseelastisiteten ε_N analytisk sett en mer fundamental størrelse. Det er fortrinsvis den som vil bli brukt i det følgende til utforming av optimumskriteriet. Den spiller på mange måter en lignende rolle som en etterspørselselastisitet. Også etterspørselselastisiteten vil (som regel) være synkende og det punkt hvor den passerer 1 er av særlig betydning.

Det befolkningsoptimum som her er definert avhenger selvsagt av *hvor stor* den gitte kapitalmengden er. Den optimale befolkning som svarer til en stor gitt kapital, vil som regel være *større* enn den optimale befolkning som svarer til en liten gitt kapital. Kapitalens konstans danner nemlig i seg selv en skranke for hvor stor befolkningen med fordel kan gjøres. Det å fjerne denne skranke vil derfor i alle regulære tilfeller føre til at en større befolkning blir den optimale.[1] Grafisk kommer dette til uttrykk deri at vi for hver størrelse på kapitalen får en kurve av lignende form som (2 b. 1), men i stadig større «format» etter som vi betrakter stadig større (men hver gang konstante) størrelser av kapitalen. Siden disse kurvene blir av stadig større «format» får de sitt høydepunkt stadig lenger ut mot høyre. Se fig. (2 b. 7). Optimumsbefolkningen — definert ved egenvariasjon — blir altså en stigende *funksjon av kapitalmengden.*[1] Den blir $\bar{N}_3$ når $K = 3$, $\bar{N}_4$ når $K = 4$, osv. Forbindelseslinjen mellom toppunktene (den sterkt opptrukne kurve i fig. (2 b. 7) skal vi drøfte i (2 c.).

Det er også plausibelt å anta at det til et høyere teknisk nivå svarer en større optimal befolkning enn til et lavere teknisk nivå (med samme K).

Så lenge en bare ser på befolkningens variasjon under en gitt kapitalmengde, er de to uttalelser «befolkningen er underoptimal» og «befolkningen må økes for å bli optimal» ensbetydende. *Men dette blir ikke lenger tifelle når vi regner med at kapitalmengden kan forandre seg.* Overgangen fra X til Y i (2. b. 7) er et eksempel hvor

[1] Bare hvis kapitalen allerede på forhånd er *uhyre stor* (slik at det mer er naturressursene enn kapitalen som setter en skranke for hvor stor befolkningen med fordel kan gjøres) og hvis dessuten kapitalen virker *mer arbeidssparende enn naturbesparende*, kan det tenkes at en ytterligere øking av kapitalen kan føre til at en *mindre* befolkning blir den optimale. Vi skal ikke behandle dette ekstreme tilfellet.

vi ved å *øke* folkemengden kommer fra en situasjon der befolkningen er *overoptimal* til en situasjon der den er *underoptimal* (i egenvariasjonsbetydning). Forklaringen er at kapitalmengden samtidig er øket. Et lignende forhold ville vi selvfølgelig få om enkeltkurvene i (2 b. 7) representerte forskjellige alternativer også m. h. t. teknisk nivå eller andre omstendigheter. Dette får spesiell anvendelse når en har å gjøre med

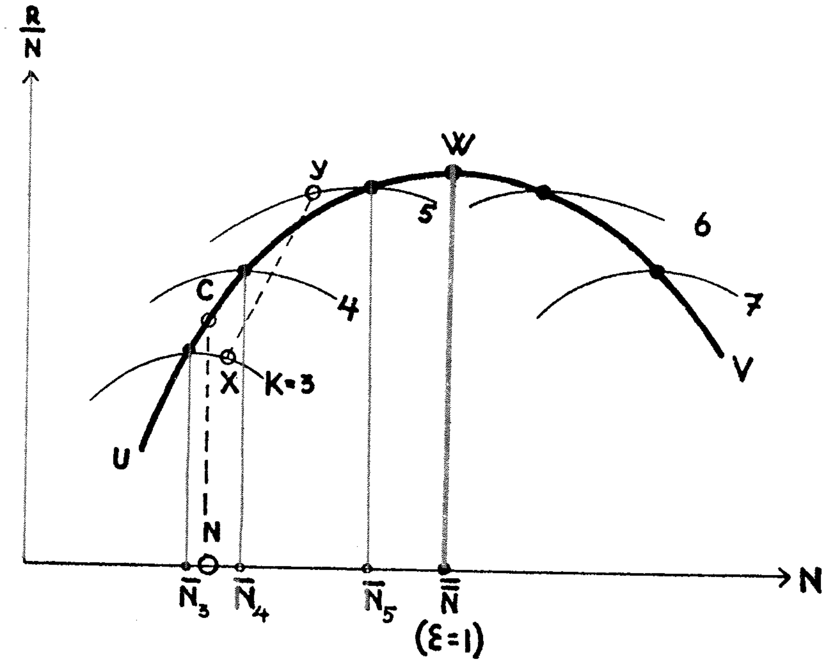

Fig. (2 b. 7).

historiske variasjoner. De vil som regel være karakterisert ved at også slike ting som kapitalmengde, teknisk nivå, o. a. har forandret seg. Av den omstendighet at folkemengden *faktisk* er øket kan en derfor ikke slutte at befolkningen er blitt mer overoptimal (eller mindre underoptimal) enn den var i den første situasjon. Forholdet er analogt det som gjør seg gjeldende for Ricardos formulering av loven om at en etter som jorda blir mer og mer oppdyrket får et stadig avtakende utbytte. Noen forfattere har bestridt denne lovs gyldighet ved å henvise til det historiske faktum at utbyttet er øket i det siste hundreår. Denne innvending bygger på en misforståelse av hvad loven utsier. Utbytteøkingen av jorda i det siste hundre år skyldes fram for alt en forbedret teknikk. Men Ricardos lov sier bare noe om det som ville skje hvis dyrkingen ble utvidet under konstant teknikk.[1]

2 c. *Egenoptimalen og antioptimalen.*

En systematisk undersøkelse av de forholdene som oppstår når både folkemengden og kapitalmengden tenkes å variere, kan best skje ved å tegne faktordiagrammet for de to faktorer N og K og oppfatte R som en produktfunksjon av N og K. Vi må gå ut fra at det hersker en ultrapassumlov i de to faktorer N og K. For det første fordi naturfaktoren L er tenkt holdt konstant. Men dernest også fordi vi må forutsette en ultrapassumlov selv om L blir regnet med blant de spesifiserte faktorer. Ellers får vi ikke fram pointet ved befolkningsoptimumsproblemet. (Jfr. pkt. 1).[2]

Den spisse sektoren i fig. (2 c. 0) er substitusjonsområdet, dvs. det område der begge grenseproduktivitetene, $\frac{\delta R}{\delta N}$ og $\frac{\delta R}{\delta K}$, er positive. Vi er særlig interessert i den kurve langs hvilken

$$\varepsilon_N = 1. \tag{2 c. 1}$$

Et hvilket som helst punkt på denne kurve — f. eks. M — kan tenkes bestemt ved at den til dette punkt svarende kapitalmengde holdes konstant mens folketallet varierer; det gir en bevegelse langs PMQ. Under denne bevegelse vil produktmengden pr. hode $\frac{R}{N}$ ha et forløp som i fig. (2 b. 1). Denne kurven kan tenkes plasert i et snitt gjennom PMQ loddrett på papirets plan. Det ved denne snittkurve bestemte optimumspunkt svarer til M i (2 c. 0). Slik kan ethvert punkt på kurven $\varepsilon_N = 1$ i (2 c. 0) tenkes bestemt. Og disse snittkurver som hver for seg bestemmer et optimum i egenvariasjons-betydningen, er ingenting annet enn alle enkeltkurvene i (2 b. 7). Kurven $\varepsilon_N = 1$ i (2 c. 0) vil vi derfor kalle egen-optimalen. (Jfr. definisjonen av uttrykket egen-variasjon i 2 b.). Den omstendighet at toppunktene på enkeltkurvene i (2 b. 7) ligger stadig lenger

[1] Se f. eks. «Socialøkonomiske utsnitt» s. 50 og s. 224.

[2] Det faktordiagrammet vi får å betrakte, blir altså av samme slag som produksjonsteoriens fig. (10 d. 8). For å lette sammenligningen kopierer vi simpelthen formen på kurvene. Det er gjort i fig. (2 c. 0).

mot høyre, etter som vi går over til kurver som representerer større og større (men for hver kurve konstante) kapitalmengder, kommer til uttrykk i faktordiagrammet (2 c. 0) deri at egenoptimalen stiger (peker mot nordøst).

Hvorledes vil størrelsen av den for hver av enkeltkurvene største produktmengde pr. hode variere etter som kapitalmengden øker? Det er fremstillet ved den sterkt opptrukne kurve UWV som i fig. (2 b. 7) forbinder toppunktene på enkeltkurvene.

Å undersøke variasjonen langs den er det samme som å undersøke variasjonen langs egenoptimalen i faktordiagrammet (2 c. 0) idet vi begynner i den sydvestre ende av denne kurve og går nordøstover. Vi skal betrakte denne bevegelse fra flere forskjellige synspunkter for å bli fullt fortrolig med hva som ligger i den.

Vi bemerker først at under denne bevegelse vil både folkemengden N og kapitalmengden K variere. Er det her mest naturlig å betrakte N eller K som «den uavhengige variable»? Egenoptimalens definisjon består i at vi betrakter stigende kapitalmengder, idet vi for hver kapitalmengde regner med den befolkningsstørrelse, som for denne kapitalmengde ville være optimal (i egen-variasjonsbetydning). Vi har altså tatt K som den uavhengige variable. Men vi kan også — og det er mer instruktivt, når det gjelder å se betydningen av den sterkt opptrukne kurve i (2 b. 7) — fortolke bevegelsen langs egenoptimalen derhen at vi betrakter alternativer med stadig større befolkning (altså befolkningen betraktet som den uavhengige variable) idet enhver av disse befolkninger tenkes å ha et bestemt kapitalutstyr, nemlig et utstyr så stort at befolkningen, når den har dette utstyr, nettopp blir en optimal befolkning (i egen-variasjonsbetydningen). Dette er det samme som å velge et bestemt abscissepunkt (en bestemt befolkning), f. eks. N i (2 b. 7), og gå loddrett opp til den sterkt opptrukne kurve UWV og notere ordinatpunktet, her C. Og vi kan også notere størrelsen av K for den enkeltkurve som har toppunkt i C (ikke tegnet i (2 b. 7)). Det blir det kapitalutstyr som må høre til N for at N skal bli en optimal befolkning (i egenvariasjonsbetydningen). — Det spørsmålet vi har reist er hvorledes R og $\frac{R}{N}$ vil variere etter som vi varierer det abscissepunkt N vi har gått ut fra. Dette er for $\frac{R}{N}$'s vedkommende nettopp illustrert ved UWV i (2 b. 7).

Også den variasjon av R og $\frac{R}{N}$ med N som vi nå får vil ha karakteren av en o p t i m u m s v a r i a s j o n dvs. R s t i g e r med N, men på en slik måte at $\frac{R}{N}$ bare stiger opp til et visst punkt for deretter å avta. Også UWV i (2 b. 7) vil altså ha en lignende form som hver av enkeltkurvene. At det må bli slik kan vi se på følgende måte. La dN og dK være sammenhørende

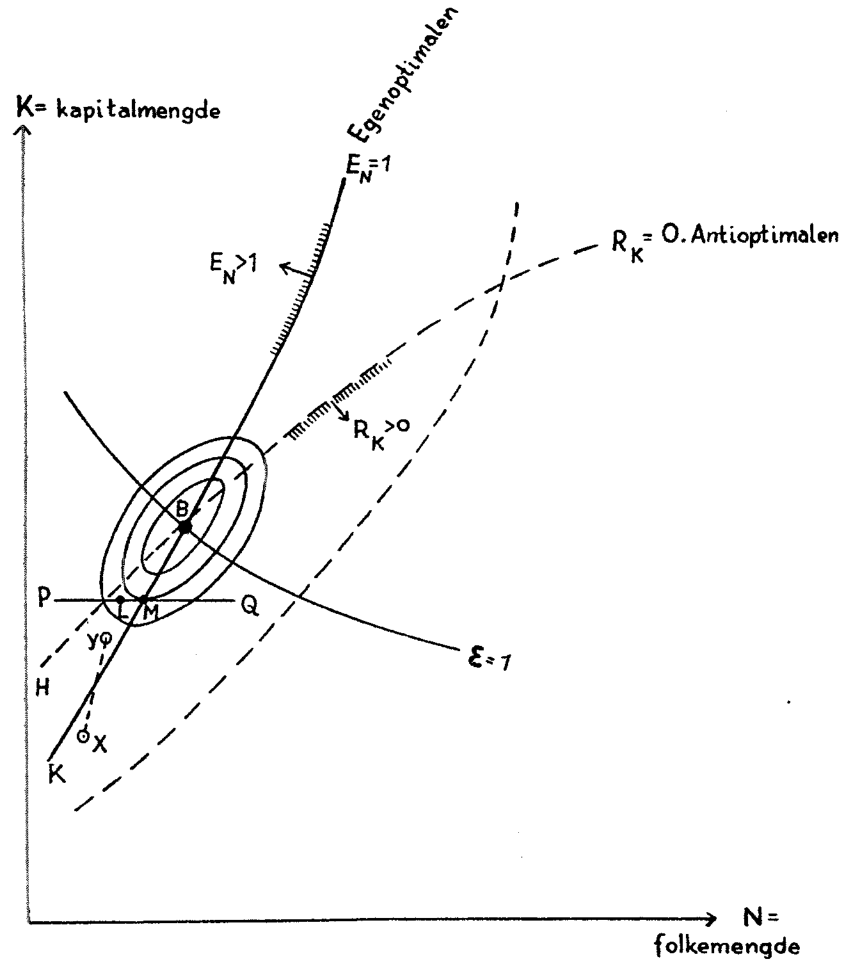

Fig. (2 c. 0).

tilvekster av N og K, og la dR være den til dN og dK svarende tilvekst i produktmengden R, og $d\left(\frac{R}{N}\right)$ tilveksten i produktmengden (inntekten) pr. hode. Da er p. g. a. den marginale tilvekstformel

(2 c. 2) $$dR = R_N\,dN + R_K\,dK$$

tilvekstformel

(2 c. 3) $$d\left(\frac{R}{N}\right) = \left(\frac{dR}{dN} - \frac{R}{N}\right)\frac{dN}{N}.$$

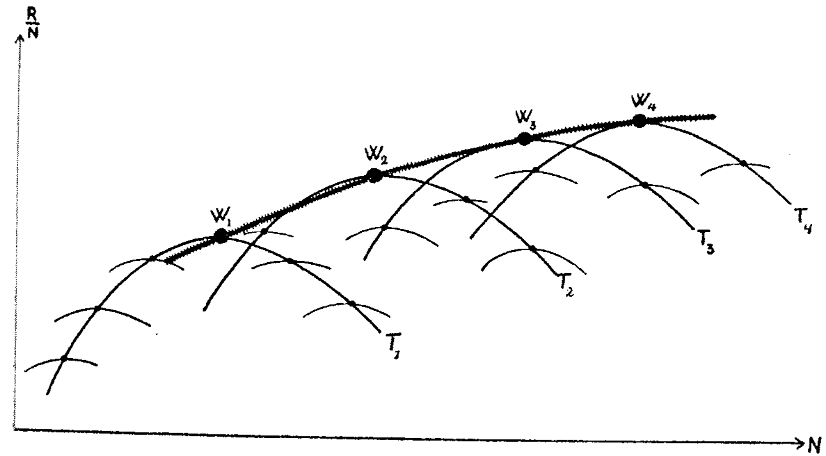

Fig. (2 c. 3).

Det gjelder her bare å finne uttrykk for hva grenseproduktivitetene R_N og R_K er langs egenoptimalen. P. g. a. egenoptimalens definisjon (2 c. 1) har vi langs egenoptimalen $R_N = \frac{R}{N}$. Og R_K kan igjen bestemmes av passusligningen for de to faktorer N og K. Den kan skrives

(2 c. 4) $$NR_N + KR_K = \varepsilon R$$

hvor ε er passuskoeffisienten for produksjonsloven i N og K tatt som helhet. (Må ikke forveksles med ε_N). Av (2 c. 4) får vi når $R_N = \frac{R}{N}$

(2 c. 5) $$R_K = \frac{R}{K}(\varepsilon - 1) \quad \text{(langs egenoptimalen).}$$

Hvilket ved innsetting i (2 c. 3) gir

$$\frac{d\frac{R}{N}}{dN} = \frac{\frac{R}{N}}{N}(\varepsilon - 1) \cdot \frac{dK}{dN} \cdot \frac{N}{K} \quad \text{(langs egenoptimalen).} \tag{2 c. 6}$$

Her er $\frac{dK}{dN}$ tangentbrattheten på egenoptimalen. (Hadde vi overalt brukt elastisitetene istedenfor de absolutte tilvekstgrader kunne, som en ser, formlene vært skrevet enda enklere.)

Vi må forutsette at egenoptimalen er stigende over hele det området som interesserer oss. Jfr. bemerkningen om dette i begynnelsen av dette punkt. (Hvis produksjonsloven hadde vært en paripassulov ville egenoptimalen til og med blitt en rett linje gjennom origo (stigende)). Vi kan altså gå ut fra at $\frac{dK}{dN}$ i (2 c. 6) er positiv overalt langs egenoptimalen. Men da ser vi at langs egenoptimalen må $\frac{R}{N}$ stige med N sålenge egenoptimalen går gjennom det for produksjonsloven som helhet føroptimale område ($\varepsilon > 1$), men begynne å synke når egenoptimalen er kommet ut i det for produksjonsloven som helhet etteroptimale område ($\varepsilon < 1$). Hvis produksjonsloven har de vanlige egenskaper, vil den stigende egenoptimal etter hvert gå gjennom områder med stadig synkende ε. M. a. o. kurven UWV i (2 b. 7) må ha den typiske form med ett topp-punkt, og toppunktet nås der egenoptimalen skjærer gjennom den kurve i faktordiagrammet (2 c. 0) hvor $\varepsilon = 1$. Dette punkt er merket B i (2 c. 0).

Vi har hittil betraktet først en partiell variasjon av N, med konstant K, og så har vi på grunnlag av det derved definerte optimum betraktet en variasjon av N hvorunder også K fulgte med. Vi kan imidlertid også se på befolkningsoptimum under en annen synsvinkel: vi kan begynne med en partiell variasjon av K. Vi går ut fra et hvilket som helst gitt faktorpunkt (NK) og lar derfra K variere under konstant N. En slik variasjon kaller vi en anti-variasjon i motsetning til egenvariasjonen. Siden ved anti-variasjonen nevneren i $\frac{R}{N}$ er konstant, er det klart at optimum — dvs. størst mulig $\frac{R}{N}$ — nå uten videre blir bestemt som det punkt der grenseproduktiviteten m. h. p. kapitalen, altså $R_K = \frac{\delta R}{\delta K}$, er null. Dette resonnement kan gjennomføres for en hviken som helst størrelse på befolkningen. Forbinder vi de således bestemte punkter, får vi en bestemt kurve i faktordiagrammet, nemlig den langs hvilken

$$R_K = 0. \tag{2 c. 7}$$

Det er simpelthen substitusjonsområdets øvre grense. For å markere dens befolkningsmessige betydning kaller vi den antioptimalen. Se fig. (2 c. 0). En variasjon langs antioptimalen kan oppfattes på den måten at befolkningen varierer under den forutsetning at enhver befolkning — stor eller liten — skal være utstyrt med så meget kapital som den overhodet kan nyttiggjøre, altså så meget at kapitalens grenseproduktivitet blir null.

Hvis produksjonsloven i N og K hadde vært en paripassulov, ville det befolkningsoptimum som er definert ved antivariasjon og det som er definert ved egenvariasjon falt sammen. Da ville m. a. o. antioptimalen og egenoptimalen vært en og samme linje. Av passusligningen (2 c. 4) sees nemlig straks at hvis $\varepsilon = 1$, vil $R_K = 0$ da og bare da når $\varepsilon_N = 1$. Dette er det samme forhold som produksjonsteoretisk uttrykkes ved å si at «der den ene faktor er tilsatt optimalt er den annen tilsatt maksimalt».[1] Langs den øvre grensen av substitusjonsområdet er her (ved en paripassulov) samtidig $\varepsilon_N = 1$ og $R_K = 0$, (da er forresten denne øvregrensen en rett linje). Når det gjelder befolkningsoptimum har vi imidlertid sett at produksjonsloven må antas å være en ultrapassumlov. Her blir det derfor forskjell på antioptimalen og egenoptimalen. Bare i ett punkt skjærer nå disse to kurver hverandre, nemlig i punktet B i (2 c. 0).[2]

Nordvest for egenoptimalen er $\varepsilon_N > 1$, befolkningen altså underoptimal (i egenvariasjonsbetydning). Omvendt i sydøst. Sydøst for antioptimalen er $R_K > 0$, befolkningen altså overoptimal i antivariasjonsbetydning, omvendt i nordvest.

2d. *Statistiske kriterier på befolkningens optimalitet.*

Ved iakttagelse av nasjonalinntektens, befolkningens og kapitalens utvikling kan en statistisk få konstatert samhø-

[1] Vi ville da fått en figur som fig. (10 d. 1) i Produksjonsteorien (1937-utgaven).

[2] Det er også betegnet B i Produksjonsteoriens (10 d. 8).

rende størrelser av R, N og K. Kanskje kan en få årlige eller femårlige data over en viss periode. Av et slikt materiale kan en på mange måter plukke ut et par observasjoner, f. eks. et år og det etterfølgende, eller et år og det som kommer fem år etter osv., og iaktta forandringen i de tre størrelser fra den første til den annen observasjon. La som før inntekten pr. hode være $r = \frac{R}{N}$, og la $r_0\, N_0\, K_0$ og $r_1\, N_1\, K_1$ være to observasjoner. De absolutte forandringer i de tre størrelser r, N og K ved overgangen fra den ene til den annen observasjon vil da være

(2 d. 1) $$dr = r_1 - r_0 \qquad dN = N_1 - N_0 \qquad dK = K_1 - K_0$$

og de relative forandringer kan måles ved

(2 d. 2) $$\frac{dr}{r} \qquad \frac{dN}{N} \qquad \frac{dK}{K}$$

hvor r, N og K er gjennomsnittsstørrelsene

(2 d. 3) $$r = \frac{r_0 + r_1}{2} \qquad N = \frac{N_0 + N_1}{2} \qquad K = \frac{K_0 + K_1}{2}.$$

Beregningsmessig kan en også bruke uttrykkene

(2 d. 4) $$\frac{dr}{r} = log\ r_1 - log\ r_0$$

$$\frac{dN}{N} = log\ N_1 - log\ N_0$$

$$\frac{dK}{K} = log\ K_1 - log\ K_0$$

hvor log betegner den naturlige logaritme. En kan lett overbevise seg om at hvis de relative forandringer er nokså små, vil de uttrykkene en får av (2 d. 4) og de en får av (2 d. 2) ved innsetting av (2 d. 1) og (2 d. 3) gi praktisk talt samme resultat.

Hvis en skulle treffe til å få to observasjoner hvor kapitalmengden K var den samme, altså $dK = 0$, og hvis en kunne gå ut fra at det tekniske nivå og naturressursene var omtrent de samme (en forutsetning som det ofte vil være plausibelt å gjøre, hvis observasjonene ikke ligger for langt fra hverandre i tid), så vil disse to observasjoner gjøre det mulig å beregne optimalitetskoeffisienten ε_N direkte etter definisjonen (2 b. 5).

Som regel vil observasjonssettene ikke være av denne art. Allikevel vil en tilnærmet statistisk måling kunne være mulig såsant det foreligger flere par av observasjoner. For å se det kan vi ta utgangspunkt i den generelle marginale tilvekstformel

(2 d. 5) $$dr = \frac{\delta r}{\delta N} dN + \frac{\delta r}{\delta K} dK$$

$\frac{\delta r}{\delta N}$ er gitt ved (2 b. 2). Uttrykkes her R_N ved ε_N etter (2 b. 5), og innføres grenseelastisiteten m. h. t. kapitalen

(2 d. 6) $$\varepsilon_K = R_K \frac{K}{R}$$

så kan (2 d. 5) skrives

(2 d. 7) $$\frac{dr}{r} = (\varepsilon_N - 1)\frac{dN}{N} + \varepsilon_K \frac{dK}{K}.$$

Med andre ord: Hva de relative tilvekster av r, N og K enn måtte være, må det alltid bestå en viss lineær relasjon mellom dem, nemlig (2 d. 7) (så lenge produktfunksjonen (2 a. 1) er uforandret). Og koeffisientene i denne relasjon er direkte uttrykk for grenseelastisitetene m. h. p. de to variable N og K. Av en rekke foreliggende observasjoner over de relative tilvekster av r, N og K må det derfor kunne gå an å trekke visse konklusjoner om størrelsen av grenseelastisitetene. Spesielt må det kunne trekkes visse konklusjoner om optimalitetskoeffisienten for befolkningen. Hvis vi f. eks. har observert nasjonalinntekten pr hode og folkemengden i to år som viser samme størrelse på nasjonens realkapital, og nasjonalinntekten pr. hode og folkemengden i disse to år har forandret seg i samme retning, f. eks. begge steget, så må befolkningen være underoptimal i egenvariasjonsbetydningen. Settes nemlig $dK = 0$ i (2 d. 7) ser vi at ε_N må være større enn 1, så sant $\frac{dr}{r}$ og $\frac{dN}{N}$ har samme tegn. Har $\frac{dr}{r}$ og $\frac{dN}{N}$ motsatt tegn må befolkningen være overoptimal i egenvariasjonsbetydningen.

Anta dernest at $\frac{dK}{K}$ er forskjellig fra null,, men at vi har en rekke observasjonspar:

Første observasjonspar gir:

$$\text{(2 d. 8)} \qquad \frac{dr}{r} = x_1 \qquad \frac{dN}{N} = y_1 \qquad \frac{dK}{K} = z_1$$

Annet observasjonspar gir:

$$\text{(2 d. 8)} \qquad \frac{dr}{r} = x_2 \qquad \frac{dN}{N} = y_2 \qquad \frac{dK}{K} = z_2$$

osv.

x, y og z er tall utregnet på grunnlag av det foreliggende statistiske materiale (f. eks. første par dannet av årene 1900 og 1905, annet par av årene 1905 og 1910 osv.). Ethvert sett av tall x,y,z skal tilfredsstille (2 d. 7), men det er strengt tatt ikke de samme størrelser ε_N og ε_K som inngår hele tiden. Både ε_N og ε_K vil jo være funksjoner av N og K. Imidlertid, hvis N og K ikke har variert meget over den betraktede periode (men dog nok til å gjøre det mulig å foreta en utsagnskraftig beregning av tallene (2 d. 8)), så vil vi få en tilnærmet bestemmelse av ε_N og ε_K ved å regne som om det var de samme størrelser ε_N og ε_K som inngår hele tiden. Ja selv om det har foregått temmelig store forandringer i N og K vil en slik beregning allikevel ha en klar mening. Den vil gi en gjennomsnittsstørrelse av henholdsvis ε_N og ε_K over det N, K området som forekommer i materialet.

Anta da at vi har to observasjonspar $x_1 y_1 z_1$ og $x_2 y_2 z_2$. Innsettes dette i (2 d. 7) får vi to ligninger til bestemmelse av ε_N og ε_K. Det gir:

$$\text{(2 d. 9)} \qquad \varepsilon_N = 1 + \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{y_1 z_2 - y_2 z_1}$$

$$\text{(2 d. 10)} \qquad \varepsilon_K = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{y_1 z_2 - y_2 z_1}$$

Hvis $z_1 = 0$ reduserer (2 d. 9) seg til det enkle tilfellet vi før nevnte da $dK = 0$.

Allerede to observasjonspar er altså nok til i prinsippet å beregne ε_N og ε_K. Men resultatet vil bli sikrere hvis vi har mange par, altså mange data av formen x_t y_t z_t $(t = 1,2,3,\ldots)$.

Da kan vi foreta en lineær regressionsanalyse, idet vi bestemmer koeffisientene a og b i den statistiske relasjon

$$\text{(2 d. 11)} \qquad x = ay + bz$$

Når a og b er bestemt på denne måten vil

$$\text{(2 d. 12)} \qquad \varepsilon_N = 1 + a$$

$$\varepsilon_K = b$$

De således bestemte ε_N og ε_K vil være gjennomsnittsstørrelsene av grenseelastisitetene over det angjeldende område. Spesielt hvis a er positiv betyr det at befolkningen har vært underoptimal (i egenvariasjonsbetydningen), hvis a er negativ betyr det at den har vært overoptimal.

Foreligger det lengere tidsrekker over r, N og K, vil en kunne foreta løpende beregning av $\frac{dr}{r}$, $\frac{dN}{N}$ og $\frac{dK}{K}$ (f. eks. med tidsinterdistanse 5 år). På de derved fremkomne tidsrekker kan en så foreta en bevegelig regressionsanalyse hvis lengde (det bevegelige korrelasjonsområdes lengde) gjøres så kort som det kan gjøres uten at resultatet blir altfor usikkert. Hvis materialet er godt, skulle en da kunne få en tidsrekke for optimalitetskoeffisienten ε_N, og den ville da til enhver tid gjelde under forutsetning av det tekniske nivå og de naturressurser som gjennomsnittlig var tilstede over den tidsperiode for hvilken korrelasjonsberegningen ble utført.

2 e. *Det totale optimum.*

Innenfor området KBH i fig. (2 c. 0) er befolkningen underoptimal i egenvariasjonsbetydning, men overoptimal i antivariasjonsbetydning. Dette område er av særlig interesse. Det er nemlig i dette område at begge tilvekstgradene av forholdet $\frac{R}{N}$, altså både tilvekstgraden m. h. p. N og den med hensyn på K, er positive. Vi har nemlig

$$\text{(2 e. 1)} \qquad \frac{\delta}{\delta N}\left(\frac{R}{N}\right) = \frac{R}{N^2}(\varepsilon_N - 1)$$

og

$$\text{(2 e. 2)} \qquad \frac{\delta}{\delta K}\left(\frac{R}{N}\right) = \frac{R_K}{N}.$$

Hvis vi altså betrakter $\frac{R}{N}$ i stedet for R som «produktet», er det KBH som blir «substitusjonsområdet». Og nivålinjene for $\frac{R}{N}$ blir som de ellipselignende kurver omkring B. Egenoptimalen og antioptimalen blir kurver langs hvilke disse nivålinjer er henholdsvis vannrette og loddrette. I punktet B selv — altså der hvor samtidig $\varepsilon_N = 1$ og $R_K = 0$, dvs. der begge tilvekstgradene av $\frac{R}{N}$ er null — vil forholdet $\frac{R}{N}$ ha den største størrelse som det overhodet kan få, når en tillater både N og K å variere. Den til dette punkt svarende befolkningsstørrelse kaller vi det totale eller absolutte (statisk definerte) befolkningsoptimum. Det er altså en fast størrelse for vedkommende naturressursområde og vedkommende tekniske nivå. Derimot var det egenvariasjonsdefinerte befolkningsoptimum ikke en fast størrelse, men en funksjon av kapitalmengden (funksjonsforholdet var definert ved egenoptimalen). Også det antivariasjonsdefinerte befolkningsoptimum er en funksjon av kapitalmengden (funksjonsforholdet definert ved antioptimalen).

Vi kan tenke oss at vi nærmer oss det totale optimumspunkt B ad forskjellige veier. Både egenoptimalen og antioptimalen er veier som fører gjennom B. Det følger ganske enkelt av at B er bestemt som det punkt der samtidig

$$\frac{\delta}{\delta N}\left(\frac{R}{N}\right) = 0 \text{ og } \frac{\delta}{\delta K}\left(\frac{R}{N}\right) = 0, \text{ dvs. der samtidig } \varepsilon_N = 1 \text{ og } R_K = 0.$$

Forutsetningen under dette resonnementet er at det tekniske nivå T er konstant. (Husk at vi med T ikke mener de tekniske enkelthetene som er realisert, men de tekniske muligheter som til enhver tid er tilstede). Hvis vi et øyeblikk tenker oss en rekke alternative høyder på det tekniske nivå, T_1 T_2 T_3 osv., så vil vi for hver slik høyde få en figur som (2 b. 7). Samles disse i et diagram, får vi en framstilling som i fig. (2 c. 3). Optimumspunktene, W_1 W_2 W_3 osv. er her forbundet til en kurve som viser hvorledes den optimale befolkning varierer med de tenkte alternative høyder av det tekniske nivå.

Det er mest sannsynlig å anta at denne kurven stiger mot nordøst dvs. at både den optimale befolkning og størrelsen av

levestandarden i optimumspunktet stiger med stigende teknisk nivå. Men absolutt sikkert er det ikke. Det kan tenkes at optimumsbefolkningen vil avta og optimumslevestandarden stige når det tekniske nivå heves, dvs. at kurven W_1 W_2 .... til slutt svinger tilbake og stiger videre mot nordvest. At optimumslevestandarden skulle synke ved hevning av det tekniske nivå er neppe tenkelig; kurven kan altså ikke synke mot sydøst. I alle tilfelle er det optimum vi her taler om et totalt optimum definert ved variasjon både av befolkningen og kapitalen. Kurven W_1 W_2 .... viser hvorledes dette totale optimum forandrer seg ved en forandring i det tekniske nivå.

Vil det totale (statisk definerte) optimum — altså B i fig. (2 c. 0) — ha noen praktisk betydning? Vil det være økonomisk rasjonell politikk å sikte på dette punkt? Det vil det ikke være medmindre kapitalen er et fritt gode. Det følger ganske enkelt av at i B er $R_K = 0$. Kapitalen er imidlertid ikke et fritt gode i noe vanlig forekommende tilfelle. En økonomisk rasjonell befolkningspolitikk kan derfor ikke ta sikte på det totale optimum representert ved B. Det gjelder likegyldig om samfunnet er ordnet privatkapitalistisk eller sosialistisk. Det ville også gjelde for en isolert nybyggerkoloni som var organisert som en eneste stor produksjons- og forbruksgruppe uten pengehusholdning. Forskjellen ville bare være at vurderingskoeffisienten for kapitalen rent konkret ville manifestere seg på forskjellige måter i disse tilfelle. En viss begrensning i kapitaltilgangen må vi altså regne med. Men hvilken?

2 f. *Kapitalutstyrskurven og det betingede optimum.*

Den enkleste måten å føre inn et kapitalbegrensende prinsipp på er naturligvis bare å ta kapitalmengden som et datum og spørre etter den befolkningsmengde som gir optimum for denne kapital. Det fører uten videre til det egenvariasjonsdefinerte optimum. Men dette er å gå utenom problemet. Spørsmålet er jo nettopp hvor meget kapital det er økonomisk rasjonelt at en viss befolkningsstørrelse utstyres med. La oss et øyeblikk tenke oss at dette spørsmålet var besvart. Til enhver gitt folkemengde ville da være fastlagt en viss kapitalmengde. Vi ville m. a. o. få en kapitalutstyrskurve gjennom faktordiagrammet. Hvis denne kurven går gjennom det totale optimumspunktet B, som f. eks. kurven SQB i fig. (2 f. 1), sier vi den er totaloptimumsmuliggjørende; i motsatt fall, som f. eks. kurven PQR, sier vi den er ikke-

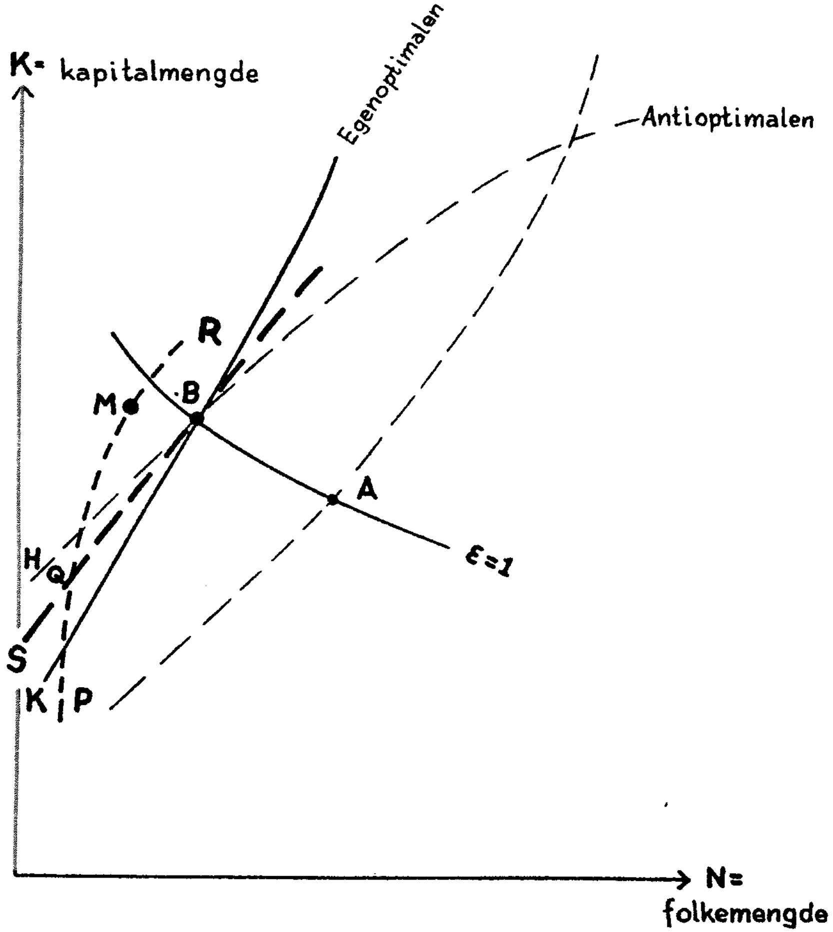

Fig. (2 f. 1).

totaloptimumsmuliggjørende. Strukturen av faktordiagrammet i (2 f. 1) er tegnet identisk med den i fig. (2 c. 0), egenoptimalen og antioptimalen osv. har altså nøyaktig samme form.

Det punkt langs en slik gitt kapitalutstyrskurve hvor inntektsstandarden, $\frac{R}{N}$, blir størst mulig kaller vi et betinget optimum. Ved en totaloptimumsmuliggjørende kurve blir

det selvsagt det samme som det totale optimumspunkt B. Ved en ikke-totaloptimumsmuliggjørende kurve — som f. eks. PR — vil det bli det punkt hvor kapitalutstyrskurven tangerer en av nivålinjene for levestandarden $\frac{R}{N}$. Det innses ved samme slags resonnement som når en i produksjonsteorien f. eks. vil søke størst produktmengde under bevegelsen langs en gitt omkostningslinje, eller omvendt søke minst mulige omkostninger under en gitt produktmengde. Hvis en tenker seg nivålinjene for $\frac{R}{N}$ overført fra (2 c. 0) til (2 f. 1) ser en at tangeringen vil skje omtrent i punktet M.

En kapitalutstyrskurve som går gjennom B, altså en kurve som SQB, spiller en lignende rolle som substitumalen (ekspansjonsveien) i den vanlige produksjonsteori. Substitumalen i den vanlige produksjonsteori definerer nemlig en produksjonsfaktorsammenheng som er en slags mellomting mellom øvre og nedre grense for det område hvor begge grenseproduktiviteter er positive. Og noe lignende gjelder om kapitalutstyrskurven SQB, idet denne kurve definerer en mellomting mellom egenoptimalen (nedre grense for det område KBH hvor begge de partielle tilvekstgrader av levestandarden $\frac{R}{N}$ er positive) og antioptimalen (øvre grense for dette område).

Substitumalen i den vanlige produksjonsteori blir fastlagt ved prisene på de to produksjonsfaktorer (eller mer generelt ved prisfunksjonene hvis de to faktorpriser avhenger av faktormengdene). I befolkningsteorien finnes ikke prisbegrepet i samme forstand. I et samfunn hvor befolkningen ikke behandles som slaver har det ingen mening å spørre hvor mange befolkningsenheter en vil gi i bytte for en kapitalenhet. Selv i et normalt samfunn kommer det allikevel inn en avveiing mellom den tilstedeværende befolkning og kapitalen. Det skjer indirekte ved avveiingen mellom nytten av den løpende konsumsjon og nytten av sparingen. Og denne avveiing vil føre til fastlegging av en kapitalutstyrskurve som kan jamføres med substitumalen i den vanlige produksjonsteori. Det er dette som vil gi den endelige løsning av optimumsproblemet for befolkningen. Denne kapitalutstyrskurven kan imidlertid først bli bestemt ved den dynamiske analyse i § 3.

Før vi går over til det skal vi gi en komplettering av den statiske analyse ved å se på befolkningens fordeling på næringsgrener.

2 g. *Befolkningens optimale fordeling på næringsgrener.*

Vi skal ikke behandle spørsmålet helt generelt, men nøye oss med å betrakte to bransjer og se hvilke prinsipielle synspunkter som kommer inn når en spør etter den optimale befolkning under samtidig hensyntagen til optimal fordeling på bransjene. Vi bruker ordet bransje istedenfor næring da branjse vil passe bedre i de terminologiske ordsammenstillinger som vi senere skal bruke. Vi kan konkretisere bransjene som jordbruk og industri. Befolkningens fordeling på disse er et viktig befolkningspolitisk spørsmål.

Den inntekt en bransje produserer kan ses i forhold til det antall personer som bransjen beskjeftiger. En betrakter da inntektsstandarden i denne bransje tatt for seg. Hele resonnementet om en slik bransjeinntektsstandard og dens største høyde kan gjennomføres på nøyaktig samme måte som vi foran gjorde det for nasjonens inntektsstandard under ett uten bransjespesifisering. Vi kan altså konstruere en egenoptimal og en antioptimal osv. for denne bransje. Optimum i denne forstand kaller vi bransjeoptimum i motsetning til det nasjonale optimum.

Når det gjelder to bransjer vil vi som regel måtte regne med at den ene er mer effektiv enn den andre. Skulle en gi en uttømmende forklaring av hva som ligger i en slik forutsetning, måtte en bruke et nokså vidløftig begrepsapparat. En måtte f. eks. ta stilling til spørsmålet om de vurderingskoeffisienter ved hjelp av hvilke produktene for de to bransjer blir jamført, og det rommer flere problemer. Hvis f. eks. den ene bransje produksjonsteknisk er mindre «effektiv» enn den annen, men har meget «nyttige» produkter, vil vurderingskoeffisientene for disse måtte bli høye, og det gjør at den første bransje økonomisk sett allikevel kanskje framtrer som meget «effektiv». Vi skal ikke gå nærmere inn på disse spørsmål, men bare forutsette at et system av vurderingskoeffisienter er gitt. Mange praktisk viktige tilfelle kommer inn under et slikt teoretisk skjema. En behøver bare å tenke på forhol-

dene i et lite land som i det vesentlige får sitt relative prisnivå mellom jordbruksprodukter og industriprodukter bestemt utenfra, fra verdensmarkedet. Når det er tilfellet, vil vurderingskoeffisientene — om vi bruker prisene som vurderingskoeffisienter — være uavhengige av produktmengdene i de to bransjer. Den inntektsskapende evne i de to bransjer vil da i alt vesentlig være gitt ved de tekniske produksjonsforhold. Og det har da en bestemt mening å sammenligne denne inntektsskapende evne hos de to bransjer, f. eks. spørre om landet er mest skikket for jordbruk eller for industri. Svaret vil være gitt ved å undersøke om omkostningskurven for produksjonen av en inntektsenhet ligger høyere i den ene av disse bransjer enn i den andre.

Mer generelt: Selv om vurderingskoeffisientene varierer med produktmengdene i de to bransjer (ved sterk øking av jordbruksproduksjonen kan f. eks. grensenytten av jordbruksproduktene synke), så vil en sammenligning mellom bransjene allikevel kunne gjøres så sant bare vurderingskoeffisientenes variasjonsmåte er gitt. Da kan nemlig denne variasjon innkalkuleres i det begrep som måler hva de to bransjer yter.

Vi kan derfor forutsette at de inntekter R_1 og R_2 som skapes i de to bransjer kan måles ved ensbenevnte tall slik at nasjonalinntekten R simpelthen blir summen av bransjenes, altså

$$R = R_1 + R_2 \tag{2g.1}$$

Bransjeinntektene forutsettes å være visse funksjoner av de befolkninger N_1 og N_2 og de kapitalmengder K_1 og K_2 som er knyttet til bransjene. Vi skriver disse funksjoner

$$R_1 = R_1(N_1 K_1) \qquad R_2 = R_2(N_2 K_2) \tag{2g.2}$$

De naturressurser de to bransjer legger beslag på forutsettes gitt. Det å innføre naturressursene L_1 og L_2 som variable i problemet gir for øvrig ikke meget av prinsipielt nytt, men det gjør analysen mer uoversiktlig. Også det tekniske nivå forutsettes konstant gjennom hele denne analysen. En annen høyde på det tekniske nivå vil heller ikke føre inn noe prinsipielt nytt i analysen, men det kan selvsagt lede til at funksjonene (2 g. 2) får en annen form. En endring i det tekniske nivå kan f. eks. berøre den ene bransjen mer enn den andre, forholdet mellom deres effektivitet kan bli forskjøvet. Vi bare nevner dette her, men går i den videre drøfting ut fra forutsetningene om at den inntektsskapende evne i de to bransjer er gitt ved to funksjoner av formen (2 g. 2).

Størrelsene

(2 g. 3) $$N = N_1 + N_2 \quad \text{og} \quad K = K_1 + K_2$$

er henholdsvis den samlede befolkning og den samlede kapitalmengde.

Hvis den ene av de to bransjer er meget mer effektiv enn den annen i den forstand at en viss innsats av arbeide og kapital er mer givende det ene sted enn det andre, dvs. at $R_1(N, K) > R_2(N, K)$ for hele det NK-område som interesserer, så er det klart at den høyeste levestandard oppnås ved at b a r e d e n f ø r s t e b r a n s j e d r i v e s, og befolkningen ikke gjøres større enn det som svarer til optimum for denne bransje tatt isolert. Som oftest vil imidlertid en slik løsning bare være en abstrakt mulighet uten praktisk interesse fordi situasjonen h i s t o r i s k har utviklet seg slik at begge (eller flere) bransjer faktisk drives med visse kapitalutstyr, og kanskje også bevisst holdes oppe av ideelle eller andre ikke-økonomiske grunner. Det spørsmål som har størst interesse er derfor: Hva er den optimale fordeling av befolkningen på de to bransjer under forutsetning av at begge bransjer skal drives?

La

(2 g. 4) $$R_{1N} = \frac{\delta R_1}{\delta N_1}, \qquad R_{2N} = \frac{\delta R_2}{\delta N_2}$$

$$R_{1K} = \frac{\delta R_1}{\delta K_1}, \qquad R_{2K} = \frac{\delta R_2}{\delta K_2}$$

være grenseproduktivitetene innenfor hver bransje tatt isolert, og la

(2 g. 5) $$\varepsilon_{1N} = \frac{\delta R_1}{\delta N_1} \cdot \frac{N_1}{R_1} \qquad \varepsilon_{2N} = \frac{\delta R_2}{\delta N_2} \cdot \frac{N_2}{R_2}$$

være bransjeoptimalitetskoeffisientene, dvs. grenseelastisitetene tatt partielt m. h. p. befolkningene innenfor hver bransje. En bransje er altså underoptimal, optimal eller overoptimal i den partielle egenvariasjonsbetydning alt etter som

(2 g. 6) $$\varepsilon_{1N} \gtreqless 1 \quad \text{og} \quad \varepsilon_{2N} \gtreqless 1.$$

Disse kriterier viser hvorledes de høyeste inntektsstandarder

(2 g. 7) $$r_1 = \frac{R_1}{N_1} \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{R_2}{N_2}$$

blir å realisere i hver bransje tatt for seg.

Hvis en ikke ser bransjene isolert, men tar nasjonen under ett, blir spørsmålet om hvorledes den samlede inntektsstandarden

(2 g. 8) $$r = \frac{R}{N} = \frac{R_1 + R_2}{N_1 + N_2}$$

kan gjøres størst mulig.

Vi forutsetter at kapitalmengdene K_1 og K_2 er gitt. Problemets to variable er da N_1 og N_2. Så lenge grenseproduktivitetene R_{1N} og R_{2N} er f o r s k j e l l i g e går det an å øke den samlede nasjonalinntekt R simpelthen ved å o v e r f ø r e en del av befolkningen fra en bransje til en annen. Forutsetningen er da selvfølgelig at tidsrommet er såpass langt at den overførte befolkning får tid til å tilpasse seg i den nye bransje. Inntektsfunksjonene (2 g. 2) må tenkes definert under denne forutsetning. Siden en slik overføring øker nasjonalinntekten uten å forandre den samlede folkemengde, må den åpenbart ha medført en øket nasjonal inntektsstandard. Likevekt vil først inntre når de to grenseproduktivitetene er like. Betingelsen for o p t i m a l b e f o l k n i n g s f o r d e l i n g under gitt kapitalutstyr for bransjene K_1 og K_2 og gitt totalbefolkning N kan derfor skrives

(2 g. 9) $$R_{1N} = R_{2N}$$

Betingelsen (2 g. 9) framkommer når en ser på h y p o t e t i s k e alternativer, med forskjellige fordelinger av befolkningen, men med samme kapitalutstyr og samme tekniske nivå. I det f a k t i s k e begivenhetsforløp vil det selvsagt ofte være slik at alle disse ting forandrer seg samtidig. For å få klargjort sammenhengen må vi imidlertid se på virkningen av de enkelte omstendigheter tatt hver for seg. Derfor defineres også her ved bransjefordelingsproblemet optimaliteten på grunnlag av befolkningsforandringer under konstant kapital og teknikk.

I et $N_1 N_2$ diagram definerer (2 g. 9) en kurve. R_{1N} avhenger nemlig av N_1 og K_1, og R_{2N} avhenger av N_2 og K_2. Men K_1 og K_2 er gitt, altså er (2 g. 9) én ligning mellom de to variable N_1 og N_2. Denne kurve — antydet ved AM i fig. (2 g. 10) — viser hvilken samvariasjon det må være mel-

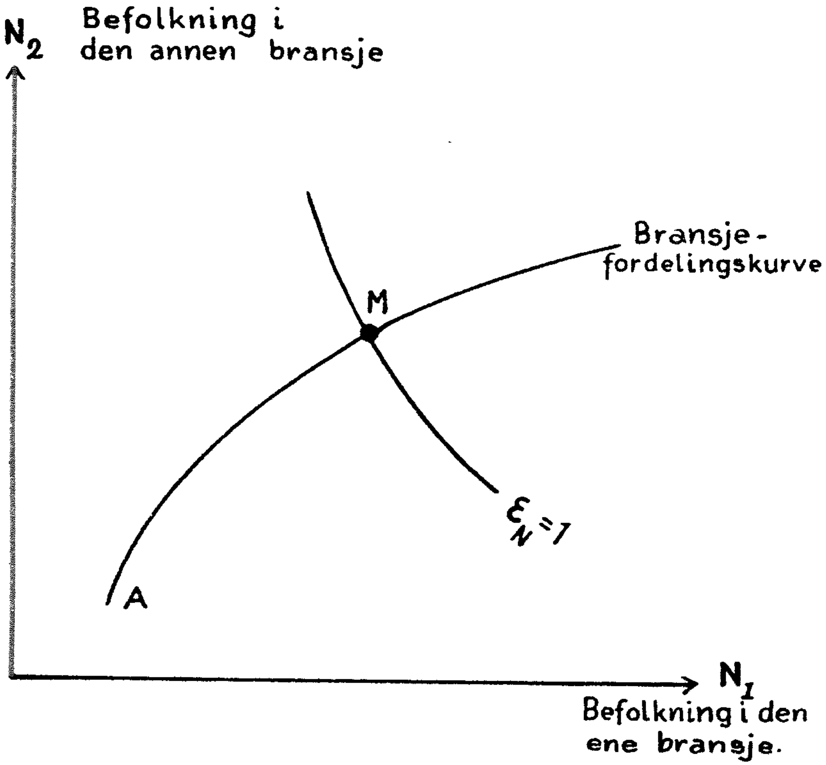

Fig. (2 g. 10).

lom befolkningen i de to bransjer for at befolkningsfordelingen mellom bransjene til enhver tid skal være optimal. Vi kaller den bransjefordelingskurven. En variasjon langs denne kurve er ensbetydende med en variasjon av den totale (stadig optimalt fordelte) befolkning N. Hvis vi studerer variasjonen i $\frac{R}{N}$ langs denne kurve, får vi derfor svar på spørsmålet om befolkningen tatt som totalstørrelse er underoptimal, optimal eller overoptimal (ved de gitte bransjekapitalutstyr K_1 og K_2). Sannsyn-

ligvis vil det være så at inntektsstandarden $\frac{R}{N}$ også under denne variasjon har et lignende forløp som i fig. (2 b.1). Det punkt der $\frac{R}{N}$ blir størst under denne variasjon kan bestemmes ved å beregne tilvekstgraden $\frac{d}{dN}\left(\frac{R}{N}\right)$ tatt langs bransjefordelingskurven (et lignende resonnement som i (2 c. 6), nå bare med de to variable N_1 og N_2, i stedet for de to variable N og K). Men det søkte punkt kan også bestemmes ved å bemerke at det må bli det samme som det punkt som framkommer ved å betrakte N_1 og N_2 som to uavhengig variable og søke den største størrelse av $\frac{R}{N}$ under denne forutsetning. (Lignende resonnement som i pkt. 2 c hvor det ble vist at optimumspunktet for en variasjon langs en av kurvene gjennom B i fig. (2 c. 0) må bli det samme som det absolutte optimumspunkt bestemt ved fri variasjon av de to variable). Kriteriet for at $\frac{R}{N}$ er størst mulig under fri variasjoner i N_1 og N_2 er at de partielle tilvekstgrader

$$\frac{\delta}{\delta N_1}\left(\frac{R}{N}\right) = \frac{1}{N}\left(R_{1N} - \frac{R}{N}\right)$$

(2 g. 11) og

$$\frac{\delta}{\delta N_2}\left(\frac{R}{N}\right) = \frac{1}{N}\left(R_{2N} - \frac{R}{N}\right)$$

begge er null. Altså: Det punkt på bransjefordelingskurven hvor den totale befolkning er optimal, er det punkt der de to grenseproduktiviteter R_{1N} og R_{2N} ikke bare er like (som de er langs hele bransjefordelingskurven iflg. (2 g. 9)), men hvor dessuten deres felles størrelse nettopp er lik nasjonens samlede gjennomsnittsproduktivitet (inntektsstandarden) $\frac{R}{N}$, altså der

(2 g. 12) $$R_{1N} = R_{2N} = \frac{R}{N}$$

Analogien med velkjente produksjons- og prislikevektsbetingelser er åpenbar. (2 g. 9) er en «substitusjonsbetingelse» (mellom bransjene), og den i (2 g. 12) tilførte nye betingelse sier noe om «produksjonsskalaens absolutte størrelse».

Under variasjonen langs bransjefordelingskurven sier vi at den samlede befolkning er underoptimal, optimal eller overoptimal, etter som

(2 g. 13) $$R_{1N} = R_{2N} \gtreqless \frac{R}{N}.$$

Alt etter som vi har øvre, midtre eller nedre tegn til høyre i (2 g. 13) vil nemlig $\frac{R}{N}$ stige, være (lokalt) konstant eller synke ved bevegelsen langs bransjefordelingskurven, dvs. etter som N stiger.

La R_N betegne den felles størrelse på de to grenseproduktiviteter R_{1N} og R_{2N} (som er like overalt langs bransjefordelingskurven). Da kan (2 g. 13) skrives i en form helt analog (2 b. 4) som gjaldt for den samlede befolknings optimum (uten bransjespesifikasjon) under gitt kapitalutstyr. Sammenhengen er for øvrig ikke bare formell, ti den R_N som nå betegner den felles størrelse på de partielle grenseproduktiviteter R_{1N} og R_{2N}, er det samme som den totale tilvektsgrad av nasjonalinntekten m. h. p. totalbefolkningen under en variasjon langs bransjefordelingskurven. Lar vi nemlig d betegne tilvekster langs bransjefordelingskurven, så får vi ved den marginale tilvekstformel

(2 g. 14) $$dR = R_{1N}dN_1 + R_{2N}dN_2$$

Langs bransjefordelingskurven er imidlertid de to grenseproduktiviteter like, slik at vi her får

$$dR = R_{kN}(dN_1 + dN_2) = R_{kN}dN.$$

Altså:

(2 g. 15) $$\frac{dR}{dN} = R_{kN} = R_N \quad \text{(langs bransjefordelingskurven)}$$

hvor k er en vilkårlig av fotskriftene *1* og *2*.

Siden R_N har denne betydning kan det optimale punkt på bransjefordelingskurven også bestemmes slik. Ved enhver variasjon av R med N har vi:

(2 g. 16) $$d\left(\frac{R}{N}\right) = \left(\frac{dR}{dN} - \frac{R}{N}\right)\frac{dN}{N}$$

altså langs bransjefordelingskurven

(2 g. 17) $$N\frac{d\left(\frac{R}{N}\right)}{dN} = R_{kN} - \frac{R}{N}$$

hvilket viser at $\frac{R}{N}$ stiger eller synker med N etter som R_{kN} — eller, hva der kommer ut på det samme, R_N — er større eller mindre enn $\frac{R}{N}$.

Hvorledes vil optimalitetssituasjonen for de enkelte bransjer, tatt isolert, være i de forskjellige punkter langs bransjefordelingskurven? Det ser vi ved å uttrykke betingelsene (2 g. 9) og (2 g. 12) ved hjelp av bransjeoptimalitetskoeffisientene (2 g.5). Det gir følgende form for kriteriene:

(2 g. 18) $$\frac{\varepsilon_{1N}}{\nu_1} = \frac{\varepsilon_{2N}}{\nu_2} \quad \text{(svarer til (2 g. 9))}$$

(2 g. 19) $$\frac{\varepsilon_{1N}}{\nu_1} = \frac{\varepsilon_{2N}}{\nu_2} \gtreqless 1 \quad \text{(svarer til (2 g. 13))}$$

Her betegner

(2 g. 20) $$\nu_1 = \frac{N_1}{R_1} : \frac{N}{R} \quad \text{og}$$

(2 g. 21) $$\nu_2 = \frac{N_2}{R_2} : \frac{N}{R}$$

de relative arbeidskoeffisienter for de to bransjer, eller kortere bransjearbeidskoeffisientene, dvs. de koeffisienter som sier hvor meget arbeide (hvor stor befolkning) som er «inkorporert» i hver av de inntektsenheter som er produsert i vedkommende bransje, sett i forhold til det samme tall for nasjonen under ett. Bransjens effektivitet kan direkte måles ved dens arbeidskoeffisient: desto mindre denne arbeidskoeffisienten er, desto større er vedkommende bransjes effektivitet i forhold til nasjonens samlede effektivitet. Når det er to bransjer og arbeidskoeffisientene er uttrykt relativt, må den ene arbeidskoeffisienten være større enn *1* hvis den annen er mindre enn *1*. Vi kan også se det slik: Gjennomsnittet av de to koeffisientene ν_1 og ν_2 — tatt med de produserte totalinntekter R_1 og R_2 som vekter — er alltid lik *1*. Av definisjonsligningene (2 g. 20) og (2 g. 21) følger nemlig straks

$$\frac{R_1 \nu_1 + R_2 \nu_2}{R_1 + R_2} = 1. \tag{2 g. 22}$$

Men gjennomsnittet av to tall må — når vektene er positive — ligge mellom det største og det minste av de to tall.

(2 g. 18)—(2 g. 19) formuleringen av optimumskriteriet kan uttrykkes slik: For å gjøre nasjonens inntektsstandard tatt under ett $\frac{R}{N}$ høyest mulig under gitte bransjekapitalutstyr K_1 og K_2 og gitt totalbefolkning, må fordelingen av befolkningen på de to bransjer gjøres slik at bransjeoptimalitetene blir proporsjonale med bransjearbeidskoeffisientene. Hvis dessuten den totale befolkning kan varieres, må den gjøres så stor at bransjeoptimalitetene ikke bare blir proporsjonale med, men direkte blir lik arbeidskoeffisientene.

Når den ene bransje er mer effektiv, mer givende enn den annen (i betydningen av at den har mindre arbeidskoeffisient), må den ene av koeffisientene ν_1 være mindre enn *1* og den annen større enn *1*. I ethvert punkt på bransjefordelingskurven (altså der vi har (2 g. 18)) må følgelig bransjeoptimalitetene ε_{1N} og ε_{2N} være forskjellige. Og i det punkt der den samlede befolkning er optimal, kan vi til og med si at den ene av optimalitetene må være større enn *1*, den annen mindre enn *1*. Eller uttrykt bare med ord: Hvis fordelingen av den gitte totalbefolkning på to ulike-effektive bransjer er gjort optimal, og en i den derved framkomne situasjon bedømmer bransjene hver for seg, må det vise seg at de befinner seg på forskjellige optimalitetsstadier. Kanskje er den ene bransje (tatt isolert) i et stadium av tiltakende og den annen (tatt isolert) i et stadium av avtakende utbytte; kanskje er utbyttetendensen i begge tiltakende eller i begge avtakende, det kan vi ikke si noe om. Men vi kan si at intensiteten i utbyttetendensen (målt ved forholdet mellom en prosentvis øking i inntekten og den tilsvarende øking i befolkningen innen- vedkommende bransje) må være forskjellig i de to . Hvis ikke bare fordelingen, men også befolk- olutte størrelse er gjort optimal, og en i omne situasjon bedømmer bransjene hver for g ikke bare at intensiteten i utbyttetendensen er forskjellig, men vi kan nå mer presist si at jen (tatt isolert) er befolkningsmessig under-

optimal og den annen (tatt isolert) befolkningsmessig overoptimal. Den mest givende bransje må presses så langt at den, betraktet isolert, blir befolkningsmessig overoptimal, mens den annen må gjøres befolkningsmessig underoptimal. Først når en slik fordeling er istandbrakt blir nasjonens samlede levestandard $\frac{R}{N}$ størst mulig (ved de gitte bransjekapitalutstyr.)

En analogi til dette har vi i bruken av to maskiner som kan levere samme produkt, men er ulike effektive. Hvis en trenger å bruke begge maskiner samtidig, vil det lønne seg å presse den mest effektive av dem hardest.

Så sant to bransjer er ulike effektive er det altså prinsipielt umulig samtidig å realisere det nasjonale optimum og optimum i hver bransje. Og hvis en finner et folkehushold hvor en bransje er presset over det for denne bransje befolkningsoptimale punkt, mens en annen bransje ikke er befolket opp til sitt optimum, må en ikke derav slutte at dette er en «uriktig» fordeling og at nasjonens samlede inntektsstandard ville kunne heves ved en overføring av befolkning fra den bransje som isolert sett er overoptimal til den som isolert sett er underoptimal. Dette er et viktig forhold som en ikke må overse når en drøfter befolkningsoptimum. Kriteriet for den nasjonalt riktige bransjefordeling ligger ikke i at bransjene har samme optimalitetssituasjon, men i at de har samme grenseproduktivitet. Hvis en vil uttrykke kriteriet ved optimalitetssituasjonen for hver bransje tatt isolert, må det derfor bli i formen (2 g. 19).

Det foranstående refererer seg til det tilfellet da det er gitt at begge bransjer skal drives. Det optimumspunkt vi da får blir et sekundært optimum på en lengere optimumskurve i hvis første del en finner det primære optimum som svarer til at bare den mest givende bransje drives. Sammenhengen her kan illustreres ved at vi tegner opp en kurve som viser variasjonen i inntektsstandarden $\frac{R}{N}$, som funksjon av den samlede befolkning N når bare den mest givende bransje drives, og en annen kurve som viser variasjonen i $\frac{R}{N}$ som funksjon av N ved kombinert drift av bransjene og da under forutsetning av en stadig optimal fordeling av befolkningen.

La *SABD* og *PQAF* i fig. (2 g. 23) være henholdsvis gjennomsnitts- og grenseproduktiviteten i bransje nr. 1, tatt for seg. Og la *EF* og *HKG* i fig. (2 g. 24) være de tilsvarende kurver i bransje nr. 2 — de siste tegnet baklengs, altså med abscisseaksen pekende mot venstre. Bransje nr. 2 er tegnet som litt mindre givende enn bransje nr. 1. Dens kurver har ca. 10 %

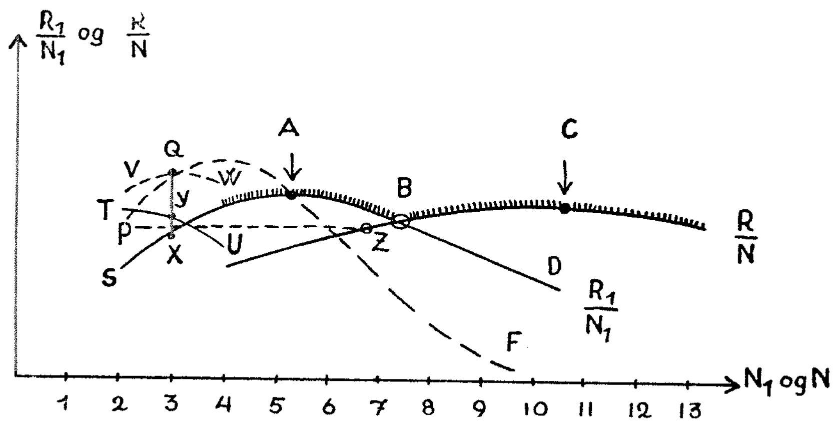

Fig. (2 g. 23).

mindre ordinat enn kurvene i bransje nr. 1 for samme arbeidsinnsats (befolkning). Hvis h e l e befolkningen settes inn i bransje nr. 1 vil den isolerte kurve for denne bransje, altså *SABD*, bli optimumskurven også for nasjonen. For en så stor befolkning som $N = 7$ (f. eks. millioner) er ordinatene på denne kurve kommet så langt ned at det kan bli spørsmål om det vil lønne seg å ta opp den annen bransje i stedet for å fortsette presset på første bransje. Hvorledes vil den optimale f o r d e l i n g mellom de to bransjer bli om det er gitt at begge bransjer skal drives og den totale befolkning er *7*? Det finnes ved å kalkere av fig. (2 g. 24) på et gjennomsiktig papir og legge den o v e r (2 g. 23) på en slik måte at summen av tallene langs abscisseaksen overalt blir lik *7*. F. eks. tallet 4 på (2 g. 24) abscisseaksen skal dekke tallet 3 på (2 g. 23) abscisseaksen, tallet 5 på (2 g. 24) abscisseaksen skal dekke tallet 2 på (2 g. 23) abscisseaksen osv. I (2 g. 23) er inntegnet små stykker — henholdsvis *TU* og *VQW* — av den gjennomsnitts- og grenseproduktivitetskurve i bransje nr. 2 vi da får. Holder vi begge figurer i denne stilling og tenker oss et punkt bevege seg langs abscisseaksen

mot venstre eller høyre, så vil vi få illustrert forskjellige alternative måter hvorpå en kan f o r d e l e den gitte totalbefolkning $N = 7$ på de to bransjer. Og de fire kurvene vil uttrykke hva grense- og gjennomsnittsproduktivitetene blir i de to bransjer ved enhver slik alternativ fordeling. La oss spesielt se på den delingen som gir s a m m e grenseproduktivitet i de to bran-

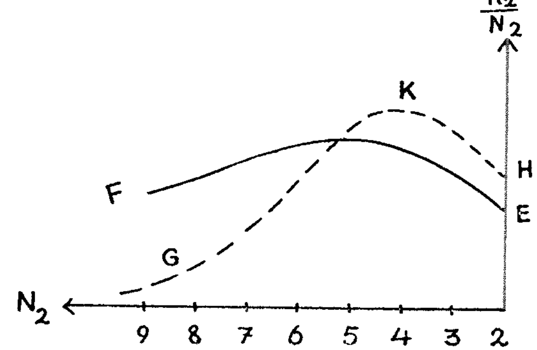

Fig. (2 g. 24).

sjer. Den er gitt ved skjæringspunktet *Q*. Her er altså betingelsen (2 g. 9) oppfylt. I dette punkt er gjennomsnittsproduktivitetene $\frac{R_1}{N_1}$ og $\frac{R_2}{N_2}$ gitt ved de to ordinater *X* og *Y*. Det blir liten forskjell på dem da vi har regnet med at det ikke er stor forskjell på bransjenes effektivitet. Nasjonens gjennomsnittsproduktivitet kan oppfattes som g j e n n o m s n i t t e t av de to ordinater *X* og *Y* tatt med vektene *3* og *4*. Vi har nemlig identiteten

(2 g. 25) $$\frac{R}{N} = \frac{N_1\left(\frac{R_1}{N_1}\right) + N_2\left(\frac{R_2}{N_2}\right)}{N_1 + N_2}.$$

Avsetter vi nå dette gjennomsnitt mellom *X* og *Y* (som i figuren blir nesten lik *X* og *Y* selv) som ordinat i abscissepunktet $N = 7$, så får vi punktet *Z*. Den samme konstruksjon kan gjøres om den totale befolkning ikke er *7*, men *8* eller *9* eller *10*, osv. Det gir kurven *ZBC*. Denne kurve viser variasjonen i $\frac{R}{N}$ med *N* når befolkningen til enhver tid er optimalt fordelt; når altså N_1 og N_2 varierer s a m m e n etter den bransjefordelingskurve som følger av de bransjeproduktivitetskurver som er gitt i (2 g. 23) og (2 g. 24). Kurven ZBC har sitt høyeste punkt i C. Her er altså (2 g. 12), eller — hva der kommer ut på det samme — (2 g. 9) oppfylt. Av figuren er det for øvrig lett å se at dette toppunktet må ligge et steds mellom N (totalbefolkning) = ca. *10* og ca. *11*. La oss nemlig ta utgangspunkt i optimum A for bransje nr. 1. Av figuren avleses at det svarer til N_1 = ca. *5,2*. Den abscisse som i bransje nr. 2 gir samme høyde på grenseproduktiviteten som A, er N_2 = ca. *4,8*, altså i alt $N = N_1 + N_2$ = ca. *10*. For mindre N vil da grenseproduktivitetsskjæringspunktet ligge over den høyeste av ordinatene $\frac{R_1}{N_1}$ og $\frac{R_2}{N_2}$ og må derfor sikkert ligge over det positiv-veiede gjennomsnitt av $\frac{R_1}{N_1}$ og $\frac{R_2}{N_2}$ som er $\frac{R}{N}$. Konstater dette ved å trekke et kalkerpapir med påtegnet (2 g. 24) langsomt fram og tilbake over (2 g. 23). Når den felles størrelse på R_{1N} og R_{2N} er større enn $\frac{R}{N}$, må imidlertid $\frac{R}{N}$ være i stigning. Det følger av (2 g. 17). I punktet N = ca. *10* må altså $\frac{R}{N}$ framleis befinne seg i stigning. På lignende måte ses at til høyre for punktet N = ca. *11* må den felles størrelse på R_{1N} og R_{2N} være noe mindre enn den minste av ordinatene $\frac{R_1}{N_1}$ og $\frac{R_2}{N_2}$ og følgelig også mindre enn $\frac{R}{N}$, dvs. $\frac{R}{N}$ må her befinne seg i synking. Toppen C må altså ligge et sted mellom ca. *10* og ca. *11*. I dette område ligger den felles størrelse på grenseproduktiviteten mellom den største og den minste av gjennomsnittsproduktivitetene $\frac{R_1}{N_1}$ og $\frac{R_2}{N_2}$. Det er bare et annet uttrykk for den ting at toppunktet C må ligge i et område der den ene bransje, tatt isolert, er befolkningsmessig overoptimal og den annen befolkningsmessig underoptimal. Grensene N = ca. *10* og N = ca. *11* kan også karakteriseres ved å si at den første er den totalbefolkning for hvilken befolkningen i første bransje (den mest givende) blir optimal, mens den annen er den totalbefolkning for hvilken befolkningen i den annen bransje (den minst givende) blir optimal. Også dette er et uttrykk for den omstendighet at i det punkt der det nasjonale optimum er

realisert vil den ene bransje, tatt isolert, være overoptimal og den annen underoptimal.

Fig. (2 g. 23) kan gi opplysning om det som vil skje om befolkningen stiger fra en ganske liten størrelse og en ikke gjør noen forutsetning om at begge bransjer skal være i drift, men forutsetter at en under alle forhold bare tar sikte på å gjøre $\frac{R}{N}$ størst mulig. Vi får da følgende utvikling. Hvis N = *3* à *4* eller mindre, vil bare bransje nr. 1 komme i drift, og befolkningen her vil bli underoptimal. Bransje nr. 1 alene har altså kapasitet nok til å oppta en stigende befolkning og det ennogså med stigende levestandard. Det skjer opp til N = *5,2* hvor optimum nås. Fortsetter befolkningen å stige, vil levestandarden synke, men det vil allikevel lønne seg å presse bransje nr. 1 ytterligere, foreløpig uten å sette bransje nr. 2 i drift. Først ved N = ca. *7,3*, altså i punktet B der kurven $SABD$ for gjennomsnittet $\frac{R_1}{N_1}$ i den isolerte bransje nr. 1 skjærer kurven ZBC for den $\frac{R}{N}$ som oppnås ved kombinert drift av begge bransjer, vil det lønne seg å sette begge bransjer i drift. Det vil — i prinsippet — skje ved et diskontinuerlig sprang hvorved en større del av befolkningen føres over til bransje nr. 2. Det skal — i prinsippet — føres over så mange at bransje nr. 1 igjen blir befolkningsmessig underoptimal. Og bransje nr. 2 vil også være det. Tilsammen vil de for hele befolkningen tatt under ett skape den samme inntektsstandard som bransje nr. 1 tatt alene gjorde før overføringen. Men ved en videre utvikling av folkemengden vil det nå bli en forskjell. Ved hjelp av den kombinerte drift får vi nå til å begynne med en stigende inntektsstandard, mens vi ville fått en stadig synkende standard om vi bare hadde holdt oss til bransje nr. 1. Stigningen fortsetter til punktet C. Den absolutte høyde i C er visstnok mindre enn i A, men dog meget høyere enn hva den ville blitt uten bransje nr. 2. Den samlede utvikling fra meget små til meget store befolkningsstørrelser vil altså ha form som den skyggelagte kurve: Først stigning til det primære optimum ved A, så synking til B, og derfra ny stigning til det sekundære optimum ved C, og derfra definitiv nedgang.

Om det hadde vært flere bransjer som etter hvert kunne bli opptatt, ville vi fått nye stigninger i kurven for den kombinerte drift, men ethvert nytt optimum ville blitt lavere enn det forangående. T r e n d e n ville altså gått nedover.

Under bevegelsen langs bransjefordelingskurven så vi at bransjeoptimalitetskoeffisientene ε_{1N} og ε_{2N} var forskjellige. Det er da en nærliggende tanke å ta et g j e n n o m s n i t t av dem og betrakte det som et uttrykk for hvorvidt bransjene «stort sett» arbeider med stigende eller synkende utbytte (altså underoptimalt eller overoptimalt). Det er naturlig å ta gjennomsnittet på den måten at hver bransjeoptimalitet veies med vedkommende bransjes andel av nasjonalinntekten. Vi setter altså den n a s j o n a l e gjennomsnittsoptimalitet lik

$$\varepsilon_N = \frac{R_1\varepsilon_{1N} + R_2\varepsilon_{2N}}{R_1 + R_2}. \tag{2 g. 26}$$

Denne størrelse kan defineres i ethvert punkt $(N_1 N_2)$ likegyldig om det ligger på bransjefordelingskurven eller ikke. Men det har størst interesse å betrakte den langs bransjefordelingskurven. Tar vi nemlig summen av (2 g. 17) for $k = 1$ og $k = 2$ idet vi bruker N_1 og N_2 som vekttall, får vi

$$\frac{d\left(\frac{R}{N}\right)}{dN} \cdot \frac{N}{\frac{R}{N}} = \varepsilon_N - 1. \tag{2 g. 27}$$

$\varepsilon_N - 1$ — hvor ε_N er gjennomsnittsoptimaliteten definert ved (2 g. 26) — er altså simpelthen elastisiteten av $\frac{R}{N}$ m. h. p. N l a n g s bransjefordelingskurven; $\varepsilon_N \gtreqless 1$ karakteriserer derfor uten videre t o t a l b e f o l k n i n g e n s underoptimalitet, optimalitet eller overoptimalitet under en slik variasjon av totalbefolkningen hvor f o r d e l i n g e n på bransjene hele tiden er optimal.

Den foranstående drøfting av befolkningsoptimum ved bransjedelt økonomi har forutsatt gitt bransjekapitalutstyr. Hele analysen svarer derfor bare til det skritt i pkt. 2 c. da et enkelt punkt på egenoptimalen ble definert. En videre analyse av bransjeoptimumsproblemet må ta omsyn til virkningen av

k a p i t a l m e n g d e v a r i a s j o n e n i de to bransjer. Det kan i det vesentlige gjøres ved anvendelsen av de samme synspunkter som vi la an i pkt. 2 c. Vi skal ikke gå nærmere inn på det.

§ 3. DYNAMISK ANALYSE AV BEFOLKNINGSOPTIMUM

3 a. *Sparingsoptimalen og det sparingsdynamiske befolkningsoptimum.*

Vi går ut fra et visst tidspunkt som vi konvensjonelt betegner $t = 0$. Perioden mellom $t = 0$ og $t = 1$ kaller vi første år, den mellom $t = 1$ og 2 annet år, osv. I stedet for år kan vi selvsagt bruke en hvilken som helst annen tidsenhet (måned, dag, minutt).

Den i n n t e k t som realiseres i løpet av første år, altså mellom tidspunktene 0 og 1, betegnes R_1, den som realiseres i løpet av annet år, altså mellom tidspunktene 1 og 2, betegnes R_2, osv. For enkelhets skyld går vi ut fra at hele årets inntekt forfaller som et samlet beløp ved s l u t t e n av året. Det stemmer best med alminnelig bokføringspraksis. Det årsregnskap hvorved inntekten bestemmes, avsluttes jo pr. årets siste dag. Men en må være klar over at dette bare er en forenklet oppstilling. De økonomiske begivenheter som er å r s a k til inntektens framkomst kan i virkeligheten være fordelt mer eller mindre kontinuerlig over tiden.

Siden vi går ut fra at inntekten forfaller ved årets slutt, er det naturlig å regne med at også den del av årets inntekt som ikke forbrukes, altså s p a r i n g e n, forfaller ved årets slutt, og blir tillagt kapitalen d a. Ved slutten av første år blir altså sparingsdelen av R_1 — vi betegner den S_1 — tillagt kapitalen, ved slutten av året 2 blir S_2 tillagt kapitalen, osv. Kapitalens størrelse s t r a k s e t t e r at beløpet S_1 er tillagt betegner vi K_1, dens størrelse straks etter at S_2 er tillagt betegnes K_2, osv. Siden S_1 tenkes å forfalle ved slutten av første år, og K_1 skal være kapitalen s t r a k s e t t e r, vil K_1 betegne kapitalen ved b e g y n n e l s e n av det annet år. Tilsvarende vil K_2 betegne kapitalen ved begynnelsen av det tredje år, osv. Og K_0 vil være kapitalen ved begynnelsen av det første år.

Vi lar C_1 betegne den s a m l e d e konsumsjon i løpet av første år, uten å gjøre noen forutsetning om dens fordeling over året. Tilsvarende lar vi C_2 betegne den samlede konsumsjon i løpet av annet år, osv. Summen av årets konsumsjon og sparing er pr definisjon lik den hele inntekt, altså

(3 a. 1) $$R_t = S_t + C_t$$

Hvis konsumsjonen foregår i årets løp, mens inntekten først forfaller ved årets slutt, må konsumsjonen forskudteres av kapitalen. I løpet av første år vil derfor kapitalen synke fra størrelsen K_0 ved begynnelsen av året til størrelsen $K_0 - C_1$ ved slutten av året. Da tilkommer første års inntekt med den følge at kapitalen plutselig springer opp til

$$K_0 - C_1 + R_1 = K_0 + S_1$$

som etter den fastlagte betegnelse blir K_1. Tilsvarende vil $K_1 + S_2 = K_2$, osv., altså generelt

(3 a. 2) $$K_t = K_{t-1} + S_t.$$

Grafisk kan dette framstilles som i fig. (3 a 3).

Kurvestykkene innenfor hvert år beskriver konsumsjonens gang innen året.

Ved å bruke (3 a. 2) for *t*, *t—1*, osv. får vi

(3 a. 4) $$K_t = K_0 + S_1 + S_2 \ldots\ldots + S_t$$

For tidspunktene f o r a n *0* får vi

(3 a. 5) $$K_{-t} = K_0 - (S_0 + S_{-1} + \ldots\ldots + S_{-(t-1)}).$$

F o l k e m e n g d e n på tidspunktet *t* betegner vi N_t. Den i n n t e k t som produseres et bestemt år antar vi er en viss gitt funksjon av folkemengden og kapitalutstyret θ år i forveien (f. eks. $\theta = 1$ år, eller $\theta = 2$ år). θ er et uttrykk for p r o d u k s j o n s p e r i o d e n s g j e n n o m s n i t t l i g e l e n g d e. Konkret sett vil naturligvis sammenhengen være mer komplisert. Produksjonsresultatet et bestemt år vil avhenge ikke bare av innsatsen det bestemte år som ligger θ år forut, men vil for en viss dels vedkommende, f. eks. for 20 %, avhenge av innsatsen e t t år forut, for en viss annen dels vedkommende, f. eks. 50 %, avhenge av innsatsen to år forut osv. Vi vil altså ha en f o r d e l t t i d s f o r s k y v n i n g («distributed lag»). For enkelte spesielle spørsmål kan det også være nødvendig å se nærmere

på den ting at θ er sammensatt av to deler, en del som skyldes kapitalgjenstandenes b y g g e t i d, og en del som skyldes deres s l i t n i n g s t i d. Hovedsaken kommer imidlertid fram om vi regner bare med den g j e n n o m s n i t t l i g e tidsforskyvning θ.

Hvis vi foreløpig bortser fra den omstendighet at nasjonens produktivkraft avhenger av aldersfordelingen, og bare ser på

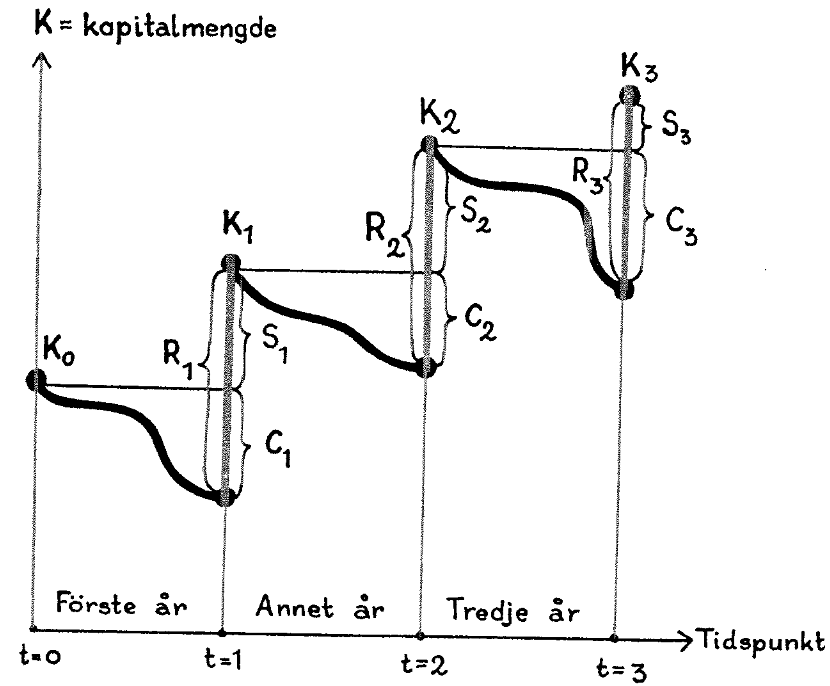

Fig. (3 a. 3). Kapitalens forandring med tiden.

de store trekk i sammenhengen mellom folkemengde, kapitalutstyr og nasjonalprodukt (nasjonalinntekt), så kan vi skrive denne sammenheng

(3 a. 6) $$R_t = R(N_{t-\theta}, K_{t-\theta}).$$

R_t på venstre side i (3 a. 6) er s t ø r r e l s e n av inntekten i året *t*, og *R* på høyre side er et f u n k s j o n s t e g n for produktfunksjonen, altså for det a v h e n g i g h e t s f o r h o l d som nasjonalinntekten står i til folkemengde og kapitalutstyr. Denne produktfunksjon forutsetter vi er den samme for hele den tid som betraktes.

Forbruket pr hode vil vi beregne som årets totalforbruk satt i forhold til folkemengden ved slutten av året. Helt nøyaktig er dette ikke hvis forbruket fordeler seg ut over året og folkemengden har vært i vekst eller synking, men det er nøyaktig nok for vårt formål. En lignende beregning gjør vi for inntekten. Forbruket pr. hode og inntekten pr. hode i år nr. t blir altså

(3 a. 7) $$c_t = \frac{C_t}{N_t} \quad \text{og} \quad r_t = \frac{R_t}{N}.$$

Vi betrakter et typisk individ i befolkningen. Dets forbruk skaper en viss totalnytte u som vi antar avhenger av forbrukets størrelse c på den måte som en vanligvis regner med i verdilæren, dvs. slik at grensenytten u' (totalnyttens tilvekstgrad m. h. p. forbruket) avtar med stigende forbruk.

Her hvor det gjelder sammenligningen mellom forskjellige tidspunkter må vi dessuten spesifisere hvorledes grensenyttekurvene for de forskjellige år ser ut i forhold til hverandre. Alle bedømmelser foretas ut fra det faste bedømmelsestidspunkt *0*. Da kan vi regne med at grensenyttekurven for forbruket første år ligger over den for annet år, og denne igjen over den for tredje år, osv. De framtidige grensenytter gjør seg altså — når de alle sammen bedømmes ut fra tidspunktet *0* — bare gjeldende i en stadig sterkere perspektivisk forkortning (Böhm-Bawerk). Forholdet er fremstillet i fig. (3 a. 8).

Grensenyttefunksjonene skriver vi

(3 a. 9) $$u' = u'_t(c).$$

På venstre side her betegner u' en størrelse av grensenytten, nemlig den som svarer til forbruksstørrelsen c. Og på høyre side betegner u'_t det avhengighetsforhold som svarer til grensenyttekurven for år nr. t. Den tilsvarende totalnytte betegner vi

(3 a 10) $$u = u_t(c).$$

Som et spesialtilfelle kan vi tenke oss at den perspektiviske forkorting er proporsjonal for alle årene framover, dvs. grensenyttekurven for år nr. 2 framkommer av den for år nr. 1 ved å dividere alle ordinater med en fast faktor $(1 + i)$. Og grensenyttekurven for år nr. 3 framkommer av den for år

nr. 2 ved igjen å dividere med $(1 + i)$, osv. Tallet i kan da kalles den perspektiviske rentefot. I dette tilfelle er det nok å angi én av grensenyttekurvene, f. eks. den for år *1*. De andre vil da være gitt ved at

(3 a. 11) $$u'_t(c) = \frac{1}{(1+i)^{t-1}} u'_1(c) \quad \text{(for enhver } c\text{).}$$

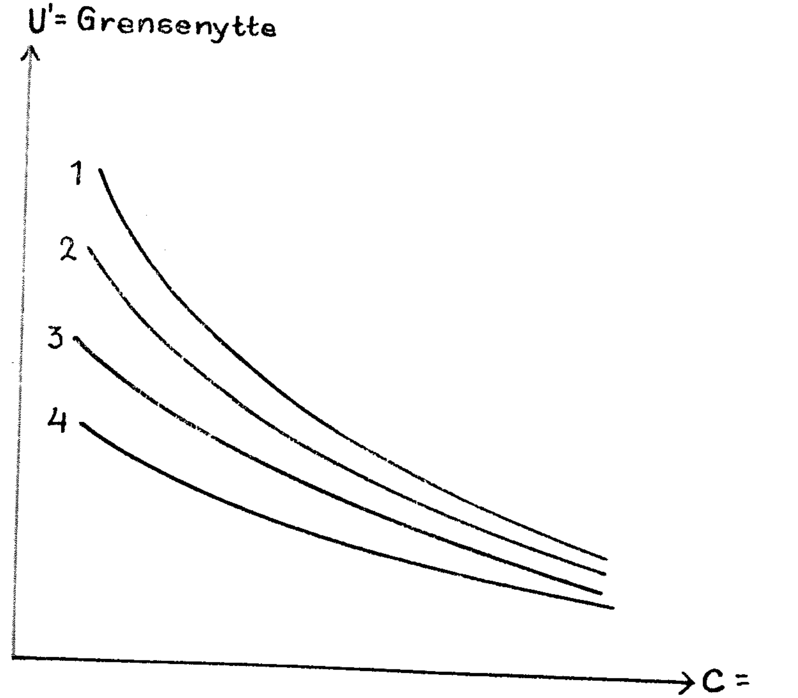

Fig. (3 a. 8). Grensenyttekurve for år nr. 1, 2, 3 og 4.

Foreløpig skal vi imidlertid regne med den generelle form (3 a. 9).

Vi betrakter det typiske individs konsumsjon i årene framover. Den vil være gitt ved en tidsrekke hvis første ordinat er c_1, annen ordinat c_2 osv. Et typisk individ vil selvfølgelig ikke eldes og dø. Som type vil det til enhver tid være tilstede og — gjennom totalnyttefunksjonen $u_t(c)$ — gi et uttrykk for behovsstrukturen hos nasjonen. Summen

(3 a. 12) $$U = u_1(c_1) + u_2(c_2) + \ldots \text{ ad inf.} = \sum_{\tau=1}^{\infty} u_\tau(c_\tau)$$

vil derfor gi et uttrykk for den samlede nytte av all framtidig konsumsjon for et typisk individ. Det synes naturlig å ta størrelsen av denne sum som en indikator på hvorvidt utviklingen av befolkningen og kapitalen er optimal, dvs. vi definerer den optimale befolknings- og kapitalutvikling som den som gjør summen (3 a. 12) størst mulig. Merk at vi tar totalnyttesummen utstrakt over tiden for ett enkelt typisk individ som indikator, ikke totalnyttesummen for alle nasjonens individer. Det svarer til at vi i den statiske teori tok inntektsstandarden pr hode $\frac{R}{N}$ som indikator, ikke den absolutte inntekt R.

Hvilke variable vil (3 a. 12) avhenge av?

Vi har $c_\tau = \frac{C_\tau}{N_\tau} = \frac{R_\tau - S_\tau}{N_\tau}$. Og R_τ er en funksjon av $N_{\tau-\theta}$ og $K_{\tau-\theta}$. Innføres videre uttrykket for $K_{\tau-\theta}$ hentet fra (3 a. 4), så får vi til slutt

$$U = \sum_{\tau=1}^{\infty} u_\tau \left(\frac{R(N_{\tau-\theta}, K_0 + S_1 + \ldots S_{\tau-\theta}) - S_\tau}{N_\tau} \right). \qquad (3\text{a.}13)$$

Under sumtegnet står her det gitte funksjonstegn u_τ og det gitte funksjonstegn R. Folkemengden og kapitalmengden på tidspunktet 0 og på de forangående tidspunkter forutsettes gitt. Dette danner den historisk gitte situasjon ut fra hvilken den framtidige befolknings- og kapitalutvikling skal bedømmes. Men da vil som en ser (3 a. 13) avhenge av de to sett av variable $N_1, N_2 \ldots . . N_\infty$ og $S_1, S_2 \ldots . . S_\infty$. M. a. o. (3 a. 13) vil avhenge av den tidsrekke som angir det framtidige forløp av sparingen og den tidsrekke som angir den framtidige befolkningsutvikling. Disse to tidsrekker blir nå problemets variable. Spørsmålet blir: Hvilken form på befolkningstidsrekken framover og på sparingstidsrekken framover er det som vil gjøre totalnytteindikatoren (3 a. 13) størst mulig? Dette er den dynamiske formulering av problemet om befolkningsoptimum.

Ved første øyekast synes dette problemet så generelt at det er uråd å angripe. Men i virkeligheten kan det gjøres nokså enkelt. For å undersøke betingelsene for maksimum av funksjonen U får vi bare på vanlig måte å ta de partielle tilvekst-

grader m. h. p. de variable.[1] La oss først ta den partielle tilvekstgrad m. h. p. folketallet N_t i det spesielle år t, idet folketallene i de andre år tenkes konstante, og alle sparingsbeløpene $S_1, S_2 \ldots . . S_\infty$ tenkes konstante. Rent konkret sett er det naturligvis ikke mulig å forandre folketallet i et bestemt år uten iallfall i noen grad å forandre folketallet i de forangående. Men det er et annet spørsmål. Først må vi undersøke hvorledes totalnytteindikatoren ville bli hvis dens forskjellige variable antok de og de størrelser. Siden får vi se på det praktiske spørsmål om hvorledes det er mulig å realisere det teoretiske ideal. Når det først blir spørsmål om praktiske befolkningspolitiske foranstaltninger, reiser det seg forresten en mengde andre spørsmål også. Jfr. 3 c.

Vi tenker oss altså at N_t i (3 a. 13) får en partiell variasjon. Anta f. eks. at det er N_3 vi varierer. Hvis $\theta = 2$, vil N_3 forekomme i nevneren i leddet for tredje år ($\tau = 3$) og i telleren i leddet for femte år ($\tau = 5$). Generelt: N_t forekommer i nevneren i leddet $\tau = t$ og i telleren i leddet $\tau = t + \theta$, men forekommer ikke i noe annet ledd. I hvert ledd blir den søkte tilvekstgrad lik u'_τ (som er tilvekstgraden av u_τ m. h. p. abscissen for u_τ) gange tilvekstgraden av det som står etter funksjonstegnet u_τ (det som nå er abscissen for u_τ), altså den store brøken. I det første av de to leddene, altså for $\tau = t$, hvor N_t bare forekommer i nevneren, bli telleren konstant; dvs. tilvekstgraden av brøken, m. h. p. N_t blir her

$$-\frac{R(N_{t-\theta}, K_0 + S_1 + \ldots + S_{t-\theta}) - S_t}{N_t^2} = -\frac{C_t}{N_t^2}. \qquad (3\text{a.}14)$$

I det annet ledd, altså for $\tau = t + \theta$ forekommer N_t bare i telleren, nemlig etter funksjonstegnet R. Tilvekstgraden av brøken m. h. p. N_t blir her

$$\frac{R_N(N_t, K_0 + S_1 + S_2 + \ldots . + S_t)}{N_{t+\theta}} = \frac{R_{N,t+\theta}}{N_{t+\theta}} \qquad (3\text{a.}15)$$

hvor R_N er grenseproduktiviteten av (3 a. 6) m. h. p. folkemengden. Denne grenseproduktivitet er selvfølgelig en funksjon av de samme to variable hvorav R selv avhenger, nemlig folke-

[1] Vi må da forutsette at de funksjonene vi har med å gjøre er slike at det er tillatt å bruke de vanlige regler for regning med partielle tilvekstgrader selv her hvor antallet av variable er uendelig.

mengden og kapitalmengden θ år forut. De størrelser hvorav R_N i dette tilfelle kommer til å avhenge er markert i (3 a. 15) Den derved framkomne størrelse av R_N er simpelthen R_N slik den blir i tidspunktet $t+\theta$ når befolkningskurven har formen $N_1, N_2 \ldots N_\infty$ og sparingskurven har formen $S_1, S_2, \ldots S_\infty$. Denne størrelse av R_N er for korthets skyld betegnet $R_{N,t+\theta}$.

Alt ialt blir altså tilvekstgraden av første ledd ($\tau = t$) lik u'_t gange (3 a. 14) og av annet ledd ($\tau = t + \theta$) lik $u'_{t+\theta}$ gange (3 a. 15), dvs.

$$\frac{\delta U}{\delta N_t} = u'_{t+\theta} \cdot \frac{R_{N,t+\theta}}{N_{t+\theta}} - u'_t \cdot \frac{C_t}{N_t^2}. \tag{3 a. 16}$$

La oss dernest ta den partielle tilvekstgrad av U m. h. p. S_t idet de andre $S_1, S_2, \ldots S_\infty$ er konstante og alle $N_1, N_2, \ldots N_\infty$ er det. Her vil vi forutsette $t > \theta$ så vi slipper å se særskilt på de aller første leddene der det kan forekomme noen av S-ene foran tidspunktet 0, altså noen av de størrelser som er gitt når vi ser framover fra 0. S_t vil forekomme etter funksjonstegnet R i telleren i (3 a. 13) for alle leddene $\tau = t + \theta$, $t + \theta + 1$, $\ldots \infty$. Dessuten vil S_t forekomme i subtrahenden i det ene ledd $\tau = t$. Ved å ta tilvekstgraden på lignende måte som foran får vi

$$\frac{\delta U}{\delta S_t} = \sum_{\tau=t+\theta}^{\infty} u'_\tau \cdot \frac{R_{K\tau}}{N_\tau} - u'_t \cdot \frac{1}{N_t} \tag{3 a. 17}$$

hvor R_K er grenseproduktiviteten m. h. p. kapitalmengden, og $R_{K\tau}$ er denne størrelse i tidspunktet τ.

La oss så se på betingelsene for likevekt. De to tidskurver N_1, $N_2, \ldots N_\infty$ og S_1, $S_2, \ldots S_\infty$ må være valt slik at det ikke er mulig ved noen forandring av enkelte av ordinatene N_1, $N_2, \ldots N_\infty$ eller S_1, $S_2, \ldots S_\infty$ å gjøre U større. Men det vil si at både (3 a. 16) og (3 a. 17) må være null for enhver t. Dvs. vi må ha

$$R_{N,t+\theta} \cdot \frac{u'_{t+\theta}}{N_{t+\theta}} = \frac{C_t}{N_t} \cdot \frac{u'_t}{N_t} \tag{3 a. 18}$$

og

$$u'_t = N_t \sum_{\tau=t+\theta}^{\infty} u'_\tau \cdot \frac{R_{K,\tau}}{N_\tau}. \tag{3 a. 19}$$

Ved å bruke (3 a. 19) for t og $t+1$ og subtrahere de derved framkomne ligninger, får vi betingelsen på den enklere form

$$R_{K,t+\theta} \cdot \frac{u'_{t+\theta}}{N_{t+\theta}} = \frac{u'_t}{N_t} - \frac{u'_{t+1}}{N_{t+1}}. \tag{3 a. 20}$$

I prinsippet gir (3 a. 18) og (3 a. 20) en fullstendig løsning. Skriver vi nemlig u' eksplisit som funksjon av de forskjellige størrelser som inngår (slik vi gjorde det i (3 a. 13)), og gjør vi det samme for R_N og R_K, så ser vi at (3 a. 18) og (3. a. 20) er et system av to ligninger som inneholder de variable N_1, $N_2, \ldots$ og S_1, $S_2 \ldots$ opp til $N_{t+\theta}$ og $S_{t+\theta}$ som de siste. Men da må systemet kunne brukes til å beregne N-rekken og S-rekken skritt for skritt. Hvis N og S-rekkene allerede er kjent til og med $N_{t+\theta-1}$ og $S_{t+\theta-1}$, vil de to ligninger (3 a. 18) og (3 a. 20) bestemme de to ukjente $N_{t+\theta}$ og $S_{t+\theta}$. Ved hjelp av de samme to ligninger anvendt for $t+1$ kan så $N_{t+\theta+1}$ og $S_{t+\theta+1}$ bestemmes osv.[1]

På denne måten kan i prinsippet den optimale befolknings- og kapitalutvikling framover beregnes ut fra en hvilkensomhelst historisk gitt situasjon. I denne form er imidlertid løsningen så generell at det er vanskelig å få oversikt over hva det ligger i den. Men ved å spesialisere spørsmålet kan vi få fram ting av meget stor interesse. Vi kan f. eks. spørre: Hvorledes må en historisk gitt stasjonær befolknings- og kapitalsituasjon være for at den skal holde seg uforandret selv om en fra et visst tidspunkt dirigerer den framtidige utvikling optimalt. Hvis den gitte stasjonære utgangssituasjon har denne egenskap sier vi at den er dynamisk optimal eller tydeligere: sparingsdynamisk optimal. Siden den befolkningen vi betrakter er stasjonær, må selvsagt alle S-ene der være null og alle N-ene like. M. a. o. situasjonen vil være helt karakterisert ved utgangskapitalmengden K og utgangsbefolkningen N. Hvis vi ved innsetting av disse konstante størrelser finner at (3 a. 18) og (3 a. 20) er oppfylt, da er befolkningen dynamisk optimal. Hvis derimot (3 a. 16) er positiv, sier vi at den stasjonære befolkning er dynamisk underoptimal, og er (3 a. 16) negativ sier vi den er

[1] Noen spesielle hensyn må tas i begynnelsen hvor en må nytte de første N og S størrelser som er problemets data og ikke har inngått i de partielle variasjoner som førte til (3 a. 16) og (3 a. 17).

dynamisk overoptimal. Dette er en under- og overoptimalitet tatt i egenvariasjons betydning. På lignende måte kan vi definere en dynamisk under- og overoptimalitet i antivariasjons betydning ved å se om (3 a. 17) er negativ eller positiv.

I det stasjonære tilfelle kan kriteriene omskrives til en så enkel form at deres betydning blir umiddelbart innlysende. I stedet for grenseproduktiviteten m. h. p. befolkningen vil det nå være mere praktisk å innføre grenseelastisiteten, dvs. den partielle optimalitetskoeffisient m. h. p. befolkningen under konstant kapital, altså

(3 a. 21) $$\varepsilon_N = \frac{\delta R(N, K)}{\delta N} \cdot \frac{N}{R} = R_N \cdot \frac{N}{R}$$

hvor R er produktfunksjonen (3 a. 6). For enkelhets skyld forutsetter vi nå at den perspektiviske forkorting skjer etter en fast proporsjonalitetsfaktor. Da kan vi bruke (3 a. 11). Vi innfører nå dette i (3 a. 18) og (3 a. 20) idet vi bemerker at når $S = 0$ blir $C = R$. Det gir følgende form for kriteriene

(3 a. 22) $$\varepsilon_N = (1 + i)^{\theta}$$

(3 a. 23) $$R_K = i(1 + i)^{\theta - 1}$$

Dette er to fundamentalformler. De gir kriteriene for det totale (stasjonære) dynamiske optimum. I det stasjonære tilfelle er den optimalitetskoeffisient ε_N og den grenseproduktivitet R_K som her inngår, identisk med de størrelsene ε_N og R_K vi studerte i 2 b og 2 c og som tjente til definisjon av egenoptimalen ved $\varepsilon_N = 1$ og av antioptimalen ved $R_K = 0$. De kriteriene (3 a. 22) og (3 a. 23) vi nå er kommet fram til tillater derfor en umiddelbar sammenligning med de kriterier vi fikk ved den statiske analyse. Forskjellen ligger som en ser i de to fundamentale parametre θ og i som uttrykker henholdsvis den gjennomsnittlige produksjonsperiode og den perspektiviske rentefot.

Hvis den perspektiviske rentefot er null — og bare da — faller det dynamiske optimum sammen med det statiske totaloptimum B i fig. (2 c. 1). Hvis produksjonsperiodens lengde er null, faller det dynamiske optimum på egenoptimalen, nærmere bestemt i det punkt på egenoptimalen der kapitalens grense-

produktivitet er lik den perspektiviske diskontofot. (Hvis i er den perspektiviske rentefot, så er $\frac{i}{1+i}$ den perspektiviske diskontofot).

Det regulære tilfelle vil være det hvor både i og θ er større enn null. I dette tilfelle må iflg. (3 a. 22) det dynamiske optimum falle i et punkt der befolkningen er underoptimal tatt i den statiske egenvariasjons betydning. Ved første øyekast synes dette paradoksalt. Hvis vi er i en situasjon f. eks. L i fig. (2 c. 0) der befolkningen er underoptimal i egenvariasjonsbetydning, vil vi kunne øke inntekten pr. hode ved å øke folkemengden, men beholde det samme kapitalutstyr. Hvorfor skal vi ikke foreta en slik tilpasning som kan skje uten noe økonomisk offer? Forklaringen ligger i produksjonsperiodens utstrekning og den perspektiviske forkorting og de overgangsfenomener som knytter seg til dem og som ikke kommer til uttrykk i den framstillingen som bare sammenligner forskjellige alternativer som hver for seg er stasjonære. Hvis vi bare ser på det stasjonære sluttresultat, kan vi ganske riktig si f. eks. at i den stasjonære situasjon som er representert ved pkt. M i fig. (2 c. 0) er inntekten pr. hode større enn i den stasjonære situasjon som er representert ved L. Og ellers er det bare den forskjell at folkemengden er større i M enn i L. Men spørsmålet er hvorledes vi skal komme fra L til M? Her kommer virkningen av produksjonsperiodens lengde og den perspektiviske forkorting inn. Ved å ta L som en historisk gitt situasjon og derfra øke folkemengden vil vi til å begynne med øke nevneren i den brøk $\frac{R}{N}$ som angir levestandarden, mens telleren — på grunn av produksjonsperiodens lengde — foreløpig er uforandret. Vi vil altså til å begynne med senke levestandarden. Visstnok vil senere R gå opp så meget at brøken kommer høyere enn den var før. Men dette blir — bedømt ut fra utgangstidspunktet — ikke verdsatt høyt nok på grunn av den perspektiviske forkorting. Omvendt: Ved å gå fra M til L ville vi til å begynne med heve levestandarden, og det vil på grunn av den perspektiviske forkorting — når L bedømmes fra M — framtre som mer attråverdig enn den senere senking av levestandarden som vi får når vi er falt til ro i L. Disse forskjellige krefter blir nettopp avveiet mot hverandre ved det formelapparatet som ledet til (3 a. 18) og som fikk sitt forenklede uttrykk i (3 a. 22). Derfor er det (3 a. 22), og ikke den tilsvarende statiske betingelse $\varepsilon_N = 1$, som går inn i den dynamiske likevekt. Hvor meget denne likevektsstillingen i praksis vil avvike fra det statisk definerte optimum, altså fra $\varepsilon_N = 1$, er ikke godt å si uten nærmere statistisk undersøkelse, men det er all sannsynlighet for at det vil bli en merkbar størrelse.

Strukturen av den dynamiske løsningen får en best oversikt over ved å tegne inn i N, K-faktordiagrammet de kurver som er definert ved (3 a. 22) og (3 a. 23). La oss f. eks. anta at produksjonsperioden er $\theta = 2$ år, og la oss under denne forutsetning betrakte forskjellige størrelser på den perspektiviske rentefot i. For $i = 0{,}03$ (3 % p. a. perspektivisk rente) blir (3 a. 22) lik $1{,}03^2 = 1{,}061$ og (3 a. 23) lik $0{,}03 \,.\, 1{,}03 = 0{,}031$. For $i = 0{,}05$ blir de tilsvarende tall $1{,}103$ og $0{,}053$ osv. Det første alternativ, $i = 0{,}03$, definerer ved $\varepsilon_N = 1{,}061$ en kurve som i sin hovedform følger egenoptimalen, men ligger et stykke til venstre for den. Til venstre for egenoptimalen ligger nemlig de punkter hvor befolkningen er underoptimal i egenvariasjonsbetydning ($\varepsilon_N > 1$). Vi skal nå plukke ut alle de punkter hvor underoptimalitetens styrke, dvs. intensiteten i den tiltakende utbyttetendensen, er $1{,}061$. Denne kurven er tegnet i fig. (3 a. 24). Likeledes er tegnet den hvor $\varepsilon_N = 1{,}103$. Også den kommer i det vesentlige til å følge egenoptimalens form, men bare enda lenger til venstre. På lignende måte er tegnet forbindelseslinjen mellom de punkter hvor kapitalens grenseproduktivitet er $R_K = 0{,}031$, og forbindelseslinjen mellom de punkter der $R_K = 0{,}053$. Disse kurver vil stort sett følge formen på antioptimalen, men ligge lenger til høyre. F o r m e n p å d e t o k u r v e s k a r e n e v i h e r f å r k a r a k t e r i s e r e r s t r u k t u r e n a v d e t d y n a m i s k e o p t i m u m.

La oss først jamføre hver kurve i den første skare med den tilsvarende kurve i den annen skare idet vi parrer dem etter størrelsen av i. Den ytterste kurven i første skaren er egenoptimalen, den ytterste kurven i den annen skare er antioptimalen. Disse svarer til hverandre, de danner kurveparret for $i = 0$. Deretter følger kurveparrene for de andre størrelsene av i. De derved framkomne s k j æ r i n g s p u n k t e r er markert i fig. (3 a. 24). Dette er de punkter i faktordiagrammet der s a m t i d i g (3 a. 22) og (3 a. 23) er oppfylt. Forbindelseskurven mellom disse skjæringspunkter kaller vi s p a r i n g s o p t i m a l e n. Det blir en kapitalutstyrskurve idet den for hver

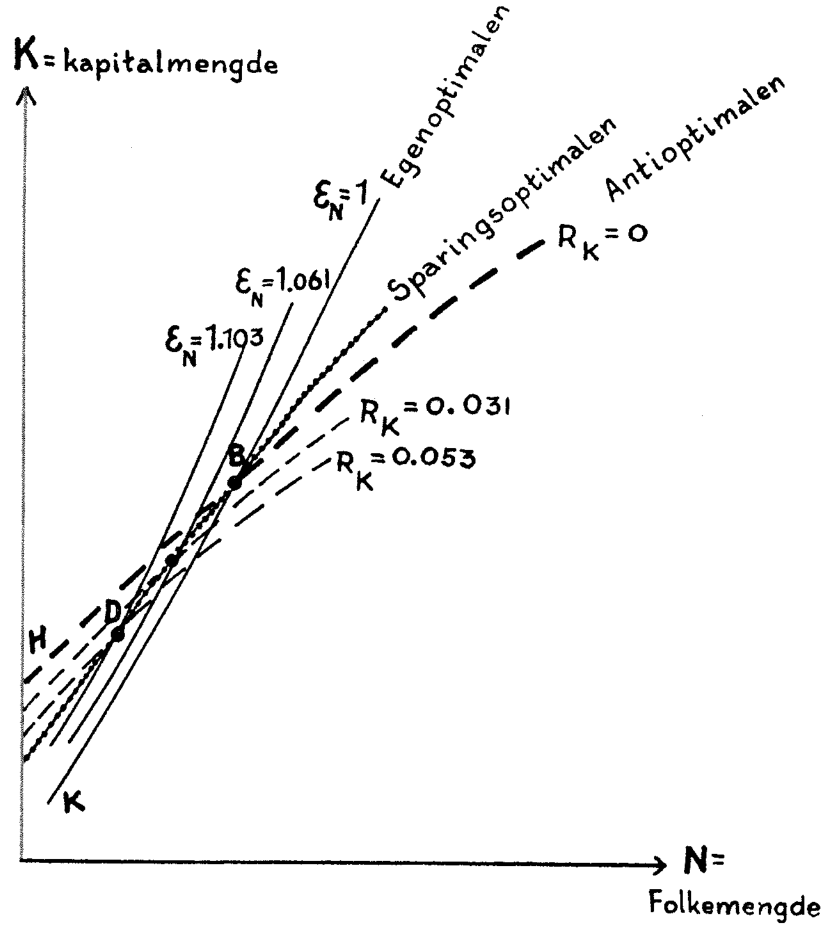

Fig. (3 a. 24). Det dynamiske optimum.

N bestemmer den tilsvarende K. Kurven må åpenbart gå gjennom det statiske totaloptimum B.

Den har i flere henseender en lignende betydning som substitumalen i den vanlige statiske produksjonsteori. Den definerer et kompromiss mellom øvre og nedre grense for substitusjonsområdet (når $\frac{R}{N}$ betraktes som «produktmengde»). Og dette kompromiss er fastlagt ved en gitt «relativ faktorpris». Denne relative «faktorpris» er nå produksjonsperiodens lengde. Til enhver størrelse på θ svarer en bestemt sparingsoptimal. Likesom i den statiske produksjonsteori vil også her størrelsen av «den relative faktorpris» — i dette tilfelle θ — bestemme hvor i substitusjonsområdet substitumalen (sparingsoptimalen) kommer til å ligge. Hvis θ er meget liten, vil sparingsoptimalen ligge kloss inntil egenoptimalen og den vil falle helt sammen med egenoptimalen når θ er lik *0*. Jo større θ er, desto mer vil sparingsoptimalen ligge forskjøvet bort fra egenoptimalen. En bevegelse fram og tilbake langs en gitt sparingsoptimal betyr at vi betrakter forskjellige alternative situasjoner, men under stadig samme konstante «relative faktorpris», dvs. samme produksjonsperiode.

Hvor på sparingsoptimalen vil så den endelige likevekt danne seg? Det bestemmes på lignende måte som i den statiske produksjonsteori ved «produktprisens» høyde. Og produktprisen er nå den perspektiviske rentefot i. Til ethvert punkt på sparingsoptimalen svarer en viss størrelse på i. Disse størrelser kan tenkes anbrakt langs sparingsoptimalen som påskrevne kotetall. Kotetallene vil være i stadig avtaking etter som vi går utover sparingsoptimalen mot nordost. I punktet B er $i = 0$. Prinsipielt er det for øvrig ingenting i veien for å regne med negative størrelser på i, hvilket svarer til en fortsettelse av sparingsoptimalen også utenfor B. Når den perspektiviske rentefot i er utenfra gitt, kan det endelige dynamiske optimum tenkes bestemt ved at vi foretar en bevegelse langs sparingsoptimalen inntil vi treffer det kotetall som er like den gitte i. Det blir f. eks. D i fig. (3 a. 24).

Det å oppfatte i som et uttrykk for «produktprisen» er naturlig. Jo lavere i er, desto mer kan vi nemlig si at vi «får for» den produktmengde som skapes ved en viss dosis av arbeide og kapital. Det vi «får for» produktet er nemlig en viss nyttesum, og den blir desto større jo mindre perspektivisk rentefot, altså jo mindre forkortning som skjer mellom det tidspunkt da produksjonsfaktorene settes inn og produktet foreligger.

I hele 3 a er det tekniske nivå T forutsatt konstant. Hvis T endres i løpet av den perioden som betraktes — hvis m. a. o. produktfunksjonen sprenges — vil dette selvsagt ikke bare virke

inn på forløpet av egenoptimalen og antioptimalen, men gjennom i og θ også på sparingsoptimalen.

Hvis produksjonsloven er slik at substitusjonsområdet KBH — eller som det nå er mer naturlig å kalle det optimalområdet — danner en meget trang sektor, vil

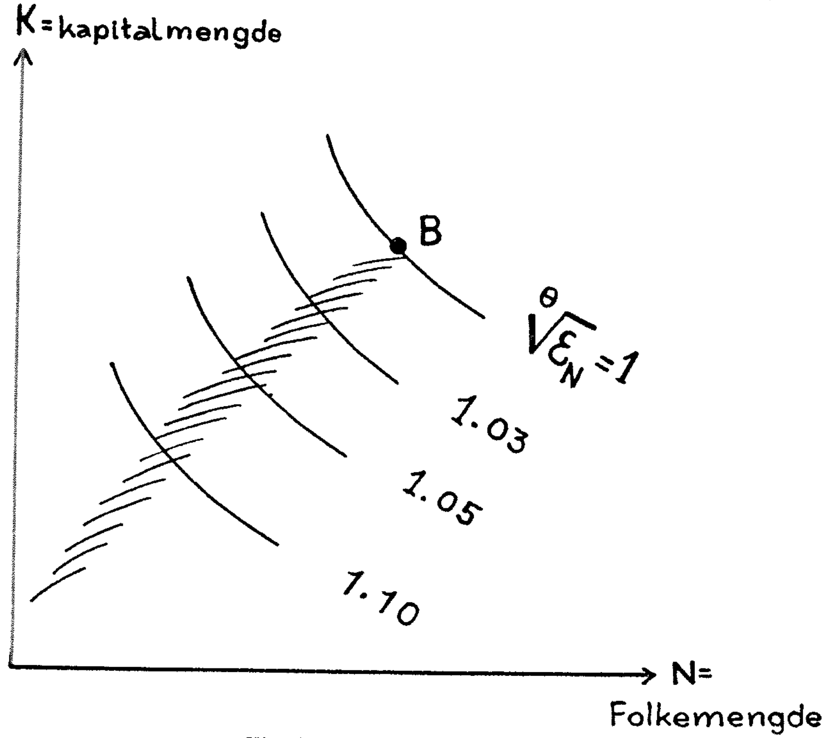

Fig. (3 a. 25). Optimalområdet.

det, som en ser, bli meget liten forskjell mellom de tre optimaler. Ved en første grovanalyse vil en da kunne nøye seg med å se på formen på optimalområdet definert mer eller mindre nøyaktig f. eks. som det skyggelagte område i fig. (3 a. 25). Dette område vil krysses av kurver langs hvilke $\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon_N}}$ har gitte verdier f. eks. *1,03* osv. som antydet i fig. (3 a. 25). Alle disse ting kan avledes av produksjonsprosessens karakter uten i det hele tatt å bringe inn spørsmålet om den perspektiviske forkorting. En struktur som den i fig. (3 a. 25) skulle derfor være enkel nok til at en kunne forsøke å bestemme den tilnærmet ved statistiske data. Når det er gjort, kunne en bestemme den optimale befolknings-kapitalsituasjon som det «grovpunkt» i det skyggelagte område hvor de tverrgående kurvene svarte til $1+i$ hvor i er en gitt perspektivisk diskonto. Og nå behøvde en ikke å spesifisere enten en mente optimum i egenvariasjons betydning eller i antivariasjons betydning eller i den dynamiske betydning. Alle disse tre begreper ville nå — innenfor den nøyaktighet som er gitt ved det skyggelagte område — falle sammen.

I denne forbindelse kan vi ikke ta opp spørsmålet om hvorledes i selv blir bestemt. Det kan ikke gjøres uten å utvikle en fullstendig renteteori.

3 b. *Befolkningens alderssammensetning og vekstkinematikk.*

Vi har hittil karakterisert befolkningen bare ved et enkelt tall folkemengden, og betraktet denne størrelse som en produksjons- og konsumsjonsfaktor. I en grovanalyse kan dette gi verdifulle synspunkter, men det skjuler en viktig ting: befolkningens alderssammensetning og de spesielle økonomiske spørsmål som knytter seg til dem. Vi kan ikke her gå inn på disse spørsmål i sin fulle bredde, men noen av dem er så viktige i forbindelse med spørsmålet om den optimale befolkning at vi iallfall må nevne dem. Det er særlig tre grupper av momenter som her kommer inn.

For det første er det produktiviteten i dens avhengighet av aldersfordelingen. Den relative størrelsen av de arbeidsføre aldersklasser er en viktig faktor i det kompleks som bestemmer tilbudet av arbeide. Det virker både som en øvre grense for den oppnåelige levestandard for hele befolkningen, og den henger sammen med arbeidsløshetsspørsmålet.

For det andre er det behovsstrukturen i dens avhengighet av aldersfordelingen. En befolkning som i overveiende grad består av voksne trenger f. eks. relativt flere leiligheter (småleiligheter) og relativt mindre skolerom enn en hvor det er mange barn. Dette får betydning for byggevirksomheten og dens dirigering. Også behovet for mange slags daglige konsumvarer påvirkes av aldersfordelingen. Nedgangen i melkeforbruket i Norge i de senere år skyldes f. eks. sikkert for en del nedgangen i barnetallet.

For det tredje er det kjøpekraften i dens avhengighet av aldersfordelingen. Realinntekten pr. hode (eller pr. forbruksenhet) i en familie blir selvfølgelig større om barnetallet er mindre og familieinntekt større. Det trekker — ved konstant produktivitet og behovsstruktur — med seg alle de typiske forandringer i etterspørselen som vi vet følger med en øket inntektsstandard, f. eks. overgangen fra brødspise til mer kjøtt, og for de enda mer velstående til finere grønnsaker og frukt. (Engels lov, og Engelelastisiteten, dvs. elastisiteten av det etterspurte kvantum m. h. p. inntekten under konstante priser.)

Et viktig spørsmål i disse sammenhenger er hvorledes aldersammensetningen i en befolkning på ett tidspunkt avhenger av den på et tidligere tidspunkt. En gitt befolkning vil i og med sin aldersoppbygging og de herskende fruktbarhets- og dødelighets- (og eventuelt vandrings-) forhold inneholde de bestemmende faktorer for utviklingen i ganske lang tid framover. Vi har her et utpreget treghetsfenomen som skaper en sammenheng mellom fortid og framtid i befolkningen og som gjør at mange av de ting som foran ble nevnt: arbeidskrafttilgangen, boligbehovet, etterspørselen etter visse forbruksvarer osv. kan forutberegnes med en større eller mindre grad av sikkerhet. Og en slik forutberegning må selvsagt være et viktig ledd i dirigeringen av befolkningsutviklingen henimot optimum.

I drøftelsen av befolkningens vekstlover kan en skille mellom to synspunkter: det kinematiske og det i egentlig forstand dynamiske. Begge knytter en forbindelse mellom fortid og framtid, men det siste søker å gå dypere ned i årsaksforholdet enn det første. Den kinematiske analyse består i at en tar fruktbarhets-, dødelighets- (og eventuelt vandrings-) forholdene for gitt, og på det grunnlag bestemmer befolkningens vekstlov. Den i egentlig forstand dynamiske analyse søker å oppstille et årsakskompleks som også kan forklare utviklingen i fruktbarhet, dødelighet (og eventuelt vandringer). Analogien med mekanikken er klar: De faktorer som påvirker fruktbarheten, dødeligheten (og vandringene) er de egentlige «drivende krefter» i befolkningsutviklingen. Hvis vi tar opp også dette spørsmålet kan vi si at vi har innført kraftbegrepet, men ellers ikke. Og sondringen mellom kinematikken og dynamikken på den rasjonelle mekanikks område ligger nettopp i at ved den siste er kraftbegrepet innført, men ikke ved den første. Vi skal ganske kort utvikle de viktigste formler for befolkningens vekstkinematikk.

La $N_t^0, N_t^1, \ldots . N_t^x, \ldots . N_t^\infty$ være antallet av personer i de forskjellige aldersklasser x ved slutten av året t. For enkelhets skyld betrakter vi bare helårige aldersklasser. Formelt lar vi aldersgruppene løpe opp til ∞, men det er klart at i praksis vil tallene N bryte av i det endelige.

La $f_t^0, f_t^1, \ldots . f_t^x, \ldots . f_t^\infty$ være f r u k t b a r h e t s t a l l e n e, dvs. det relative antall av fødsler som faller pr. år innenfor de forskjellige aldersklasser. Ved en nærmere analyse måtte en se koeffisientene f i forbindelse med ekteskapshyppigheten, med ekteskapenes varighet, med konjunktursituasjonen og kanskje med andre faktorer. Vi skal bare se dem i deres avhengighet av aldersfordelingen, det dekker iallfall det vesentligste av det vi her trenger å få fram. Formelt regner vi med koeffisienter for alle aldersgrupper, men i praksis er det klart at bare noen av dem vil være forskjellig fra null.

Antallet av f ø d s l e r, altså antallet av 0-årige som tilkommer i n e s t e å r s aldersoppbygging (om vi bare holder oss til hele årsklasser) blir da produktsummen

$$f_t^0 N_t^0 + f_t^1 N_t^1 + \ldots .$$

altså

(3 b. 1) $$N_{t+1}^0 = f_t^0 N_t^0 + f_t^1 N_t^1 + \ldots + f_t^\infty N_t^\infty = \sum_{x=0}^{\infty} f_t^x N_t^x .$$

Dette er t i l g a n g s f o r m e l e n for befolkningen når en bortser fra vandringer.

A v g a n g e n er bestemt av d ø d e l i g h e t e n (eventuelt med korreksjon for vandringer). La $q_t^0, q_t^1, \ldots$ være dødssannsynlighetene innenfor de forskjellige aldersgrupper. Antallet av døde i aldersgruppen x vil da være $q_t^x N_t^x$ og antallet av dem som i k k e dør vil være $p_t^x N_t^x$, hvor

(3 b. 2) $p_t^x = 1 - q_t^x =$ levesannsynligheten for en x-årig på t.

De x-årige på t som i k k e dør er naturligvis de som framstår som $x+1$årige på $t+1$, altså

(3 b. 3) $$N_{t+1}^{x+1} = p_t^x N_t^x \quad (\text{for } x = 0, 1, 2 \ldots \infty).$$

Dette kan vi kalle f r a m s k y v i n g s f o r m e l e n. Den viser hvorledes en aldersklasse på ett tidspunkt avhenger av den foranstående aldersklasse på et tidligere tidspunkt. Hvis fruktbarhetstallene f og levesannsynlighetene er gitt, så kan vi beregne hvorledes en på tidspunktet 0 gitt utgangsbefolkning $N_0^0, N_0^1, \ldots . N_0^\infty$ vil utvikle seg. D e t t r e n g s i k k e n o e m e r e n n d e t o f o r m l e n e (3 b. 1) og (3 b. 3). Ved (3 b. 3) kan vi nemlig beregne aldersklassene $x = 1, 2, \ldots .$ på tidspunktet 1, altså $N_1^1, N_1^2, \ldots . N_1^\infty$. Og ved (3 b. 1) kan vi beregne N_1^0 slik at hele alderssammensetningen på 1 dermed blir kjent. Ved hjelp av den kan vi så beregne hele sammensetningen på tidspunktet 2, osv. Ved suksessiv anvendelse av (3 b. 3) kan vi også stille opp den eksplisite formel

3 b. 4) $$N_{t+1}^{x+1} = p_t^x p_{t-1}^{x-1} \ldots p_{t-x}^0 \, . \, N_{t-x}^0 .$$

Her kan om ønskes også innsettes uttrykket for N_{t-x}^0 hentet fra (3 b. 1).

At befolkningen er s t a s j o n æ r vil si at alle størrelsene er uavhengige av fotskriften t. I dette tilfelle er som en ser av (3 b. 3) levesannsynligheten p^x simpelthen forholdet mellom antallet av $x+1$ årige og x årige i den tilstedeværende befolkning.

3. c. *Befolkningsoptimum under hensyntagen til aldersfordelingen.*

Vi skal til slutt gi et eksempel på en optimalitetsbetraktning hvor aldersfordelingen kommer inn. Vi regner med at hver aldersgruppe har en typisk nyttefunksjon som viser denne gruppes behovsstruktur. Det kan kanskje være vanskelig å tallfeste formen på disse funksjonene, men de rommer et problem som en ikke kommer utenom, og som en på en eller annen måte må ta stilling til når en tar opp spørsmål i forbindelse med forbruket. Beregningen av «forbruksenheter» f. eks. er et primitivt forsøk på å tallfeste forskjellighetene i behovsstrukturen hos de forskjellige aldersklasser. (Et barn i en viss aldersklasse settes da lik en viss prosent av en voksen mann osv. Flere forskjellige skalaer for dette har vært anvendt.)

Vi går altså ut fra at hver aldersgruppe x har sin typiske totalnyttefunksjon.

3 c. 1) $$u^x = u_t^x(c^x).$$

u_t^x er et funksjonstegn for hvorledes totalnyttefunksjonen for det typiske x-årige individ ser ut når det tidspunkt som bedømmes er t og bedømmelsen skjer ut fra det fastlagte tidspunkt 0. Tilsvarende er u'^x_t grensenyttefunksjonen. Jfr. fig. (3 a. 8).

Nasjonalinntekten R deles som før i en konsumsjonsdel C og en sparingsdel S. Konsumsjonsdelen C må nå splittes videre i de deler C^0, C^1, . . . C^∞ som går til de enkelte aldersgrupper. Spesielt på tidspunktet t bruker vi betegnelsen

(3 c. 2) $$C_t = C_t^0 + C_t^1 + \ldots + C_t^\infty .$$

Hvis $N_t^0, N_t^1, \ldots N_t^\infty$ er antall personer i de forskjellige aldersgrupper på t, blir altså forbruket pr. hode i disse grupper lik

(3 c. 3) $$c_t^x = \frac{C_t^x}{N_t^x}$$

og grensenyttene følgelig lik $u'^x_t\left(\frac{C_t^x}{N_t^x}\right)$.

Hvilken fordeling av nasjonens samlede forbruk på de forskjellige aldersgrupper bør tilsiktes? Det må avgjøres ut fra en eller annen sammenligning mellom de grensenytter som derved skapes. En slik sammenligning har bare en mening når det er fastsatt visse v u r d e r i n g s k o e f f i s i e n t e r som bringer grensenyttene for personer i ulike aldrer på samme benevning. Om et sett av slike koeffisienter μ^0, μ^1 osv. er gitt, blir konsumsjonsfordelingen over de forskjellige aldersgrupper å bestemme ved et system av G o s s e n s k e ligninger

(3 c. 4) $$\frac{u'^0_t\left(\frac{C_t^0}{N^0}\right)}{\mu^0} = \frac{u'^0_t\left(\frac{C_t^1}{N_t^1}\right)}{\mu^1} = \ldots .$$

Antallet av ligninger er her e n mindre enn antallet av aldersklasser. M. a. o. hvis aldersfordelingen N_t^0, N_t^1 . . . . er gitt, kan ved (3 c. 4) i alminnelighet alle konsumsjonsfordelingstallene C_t^0, C_t^1 . . . . uttrykkes ved et enkelt av dem. Eller vi kan uttrykke alle ved nasjonens s a m l e d e konsumsjon C_t idet vi også trekker inn ligning (3 c. 2). I stedet for C_t kan vi innføre sparingsdelen S_t av nasjonalinntekten. Men dermed er problemet redusert til et problem av lignende art som det vi drøftet i pkt. 3 a, bare med den forskjell at vi nå har fått inn befolkningens a l d e r s f o r d e l i n g på hvert tidspunkt i stedet for den totale befolkning. Den prinsipielle behandling av problemet kan da skje slik. Vi danner en totalnyttesum

(3 c. 5) $$U = \sum_{\tau=1}^{\infty}\left[\omega^0 u_\tau^0\left(\frac{C_t^0}{N_t^0}\right) + \omega^1 u_\tau^1\left(\frac{C_t^1}{N_t^1}\right) + \ldots\right]$$

hvor $\omega^0, \omega^1 \ldots$ er b e t y d n i n g s t a l l som vi tillegger de enkelte aldersklasser. Vi kan f. eks. legge særlig stor vekt på barnas konsumsjon. Disse betydningstallene k a n gi uttrykk for den samme vurdering som kom inn i (3 c. 4), ved koeffisientene $\mu^1, \mu^2 \ldots$ men de behøver ikke gjøre det. Her er det spørsmål om å sammenligne klassene s o m s å d a n n e under hensyntaken også til deres s t ø r r e l s e. I (3 c. 4) derimot var bare spørsmål om en sammenligning mellom det typiske individ i en klasse og det typiske individ i en annen.

Hvis konsumsjonsfordelingstallene på hvert tidspunkt er uttrykt ved den samlede nasjonale konsumsjon på dette tidspunkt — ved (3 c. 4) — og den samlede konsumsjon igjen er uttrykt som differensen mellom inntekt og oppsparing, og vi går ut fra en lignende produktfunksjon for inntekten som i 3 a., blir problemet nå å bestemme tidsrekken $S^1, S^2, \ldots$ og alle tidsrekkene

(3 c. 6) $$\begin{matrix} N_1^0, N_2^0, N_3^0 \ldots . . \\ N_1^1, N_2^1, N_3^1 \ldots . . \end{matrix}$$

slik at U blir størst mulig.

Herunder kan vi i k k e regne med alle størrelsene (3 c. 6) som uavhengige variable. Tvertimot er de nå k n y t t e t s a m m e n på grunn av den befolkningsvekstlov vi utledet i 3 b. Bruker vi nå også den, ser vi at hvis utgangsbefolkning og aldersfordeling er gitt, blir problemets variable bare s p a r i n g e n representert ved tidsrekken S_1, S_2 . . . . . f r u k t b a r h e t e n representert ved koeffisientene $f_1^x, f_2^x, \ldots$, og d ø d e l i g h e t e n representert ved dødssannsynlighetene $q_1^x, q_2^x, \ldots$ . . Dette blir de tre sett av variable som vi kan innvirke på for å realisere den optimale utvikling, altså den som gjør U størst mulig. Denne oppleggingen av problemet er tilstrekkelig realistisk til å klarlegge de viktigste angrepspunkter hvor en rasjonell befolknings p o l i t i k k må sette inn. Det må bli på slike ting som kan virke på sparingen, fruktbarheten og dødeligheten. En videre drøfting av det ligger imidlertid utenfor rammen for denne artikkel.