RAGNAR FRISCH
(Da Universidade de Oslo, Noruega)

O PROBLEMA DOS NÚMEROS-ÍNDICE

(SEPARATA DA "REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA" — ANO XI, N.º 42)

RIO DE JANEIRO
SERVIÇO GRÁFICO DO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA
1950

RAGNAR FRISCH
(Da Universidade de Oslo, Noruega)

O PROBLEMA DOS NÚMEROS-ÍNDICE

(SEPARATA DA "REVISTA BRASILEIRA DE ESTATÍSTICA" — ANO XI, N.º 42)

◈

RIO DE JANEIRO
SERVIÇO GRÁFICO DO INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA
1950

RAGNAR FRISCH
(Da Universidade de Oslo, Noruega)

O PROBLEMA DOS NÚMEROS-ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

O problema da construção de um número-índice é tanto de teoria econômica, como de técnica estatística. Realmente, tôdas as discussões acêrca da "melhor" fórmula de índice, dos "mais corretos" pesos etc., têm que ser vagas, indeterminadas, enquanto a significação do índice não fôr exatamente definida. E definição dessa ordem não pode ser dada, evidentemente, com base, apenas, em fundamentos empíricos, porque exige considerações teóricas. Por isso mesmo, parece adequado incluir um sumário comentado desta matéria nos relatórios de Teoria Geral da Economia, de *Econométrica*.

O problema do número-índice surge sempre que se deseja uma expressão quantitativa para um *complexo* composto de mensurações individuais, para as quais não existe uma unidade *física* comum. O desejo de relacionar tais mensurações e o fato de que isto não pode ser feito mediante o emprêgo, sòmente, de princípios físicos, ou técnicos, de comparação, constitui a essência do problema do número-índice, e tôdas as dificuldades se centralizam aí.

Construções dessa sorte podem ser tentadas para muitas e diversas espécies de mensurações: preços e quantidades de bens econômicos, intensidade de tráfegos, fertilidade de solos etc.. Cada modalidade de número-índice admite ser considerada separadamente, ou em conexão com outras espécies, como, por exemplo, quando um índice de preços e um índice de quantidades são usados como elementos na equação de troca [1], de IRVING FISHER ou, mais comumente, quando um número-índice é construído para cada um de certos fatôres, tal o caso considerado por WISNIESKI [2]. Êste aspecto geral do problema não será tratado aqui. *Nosso relatório será limitado sòmente ao problema dos números - índice de preços.*

Mesmo na intimidade dêste campo mais restrito, diversas interpretações são possíveis. A variedade dos fins é bem discutida por WESLEY C. MITCHELL, que diz, entre outras coisas [3]:

> Alguém, por exemplo, deveria compilar uma série especial para prever mudanças nas condições de negócios. O compilador poderia selecionar as utilidades cujos preços no passado assinalaram as mais precoces e regulares indicações de mudanças, que, subseqüentemente, ocorreram nos números-índice; poderia ponderar estas séries de acôrdo com a fidedignidade anterior das mesmas, como barômetros de preço, e ser-lhe-ia lícito usar um método

TEM a REVISTA, em diferentes oportunidades, publicado estudos diversos em tôrno da metodologia estatística dos números-índice. Ainda recentemente (ns. 39 e 40) divulgou no Brasil, mercê de traduções especiais, duas contribuições substanciais de RENÉ ROY, *Presidente da Sociedade de Estatística de Paris e autoridade de projeção internacional no terreno da Econometria.*

Agora, devidamente autorizada pela "The Econometric Society" dos Estados Unidos, a REVISTA, ainda em tradução especial, publica o trabalho que o Professor RAGNAR FRISCH, *da Universidade de Oslo, apresentou àquela Sociedade, a respeito do delicado problema dos números-índice.*

---

1 *The Purchasing Power of Money,* first edition, New York, 1911.
2 *Journ. Am. Stat. Ass.,* March, 1931.
3 *The Making and Using of Index Numbers,* U. S. Bureau of Labor Statistics. Bulletin n.º 284, October 1921, pag. 24.

qualquer com o fim de achar a média das flutuações que desse os melhores resultados para êsse fim. Provàvelmente, tal série não representaria medida fidedigna das variações na capacidade aquisitiva do dinheiro, mas seria, provàvelmente, melhor adaptada ao seu especial propósito.

No presente relato, não se discutirão os números-índice dessa espécie, porque nos limitaremos àqueles cujo objetivo é o de medir, de alguma sorte, o poder de compra. Serão considerados, sòmente, os problemas fundamentais teóricos. Não trataremos de questões práticas ligadas à fidedignidade ou integralidade dos dados, nem discutiremos questões surgidas da necessidade prática de usar um número limitado de artigos *representativos*.

As principais contribuições a êsse terreno são encontradas nas obras de: W. STANLEY JEVONS[4], F. Y. EDGEWORTH[5], C. H. WALSH[6], IRVING FISHER[7], WESLEY C. MITCHELL[8], A. C. PIGOU[9], CORRADO GINI[10], FRANÇOIS DIVISIA[11], RENÉ ROY[12], J. M. KEYNES[13], A. L. BOWLEY[14], GOTTFRIED HABERLER[15], L. V. BORTKIEWICZ[16], A. A. KONÜS[17], R. G. D. ALLEN[18] e HANS STAEHLE[19]. Talvez possa eu acrescentar, também, uma referência a alguns dos meus próprios artigos[20].

A antiga obra-padrão é a de EDGEWORTH. Entre as contribuições mais recentes, a de STAEHLE parece a mais original e construtiva, embora talvez lhe falte alguma simplicidade e penetração.

Resumirei, a seguir, os traços salientes do progresso alcançado por êstes autores no terreno evidenciado, e, em certos pontos, tentarei estender um pouquinho mais a análise.

2. O CRITÉRIO ATOMÍSTICO

Existem dois caminhos fundamentalmente diferentes pelos quais é possível chegar ao problema dos números-índice de preços. Damos a êstes caminhos as denominações de *critério atomístico* e *critério funcional*. No atomístico, os preços $p^1, p^2, \ldots, p^N$, e as quantidades $q^1, q^2, \ldots, q^N$, das várias mercadorias são considerados — ao menos no aspecto principal — como duas coleções de variáveis *independentes*. E o objetivo final é definir determinada função destas $2N$ variáveis capaz de fornecer uma expressão adequada no "movimento geral" dos preços. No funcional, presume-se a existência de certas *relações características* entre preços e quantidades, e isto muda completamente a natureza do problema. Enquanto no atomístico, torna-se impossível uma definição lógica e única do número-índice, tal definição se apresenta exeqüível, como veremos, sob o critério funcional.

Consideremos, primeiramente, o critério atomístico. O exemplo típico é a maneira segundo a qual IRVING FISHER deixa uma balança mecânica ilustrar os dois lados da equação da troca[21]. Num lado estão pendurados, a distâncias diferentes do fulcro, um pão, um balde de carvão, e uma peça de fazenda, equilibra-

---

[4] Separata de trabalhos publicados em *Investigations in Currency and Finance*, Londres, 1909.
[5] Trabalhos diversos publicados na maioria em *Papers Relating to Political Economy* vol. 1, Londres, 1925.
[6] *The Measurement of General Exchange Value*, New York, 1901. Also Quart. J. Ec., 1924.
[7] Loc. cit. and *The Making of Index Numbers*, first edition, Boston, 1922.
[8] Loc. cit.
[9] *Wealth and Welfare*, London, 1912, Chap. III, second edition, 1924, Chap. V.
[10] *Metron*, July, 1924, and Feb., 1931.
[11] "L'indice monetaire et la théorie de la monnaie." Separately and in *Revue d'Economie Politique*, 1925.
[12] *Révue d'Economie politique*, 1927.
[13] *A Treatise on Money*, London, 1930, Vol. I, Book II.
[14] *Jour. Roy. Stat. Soc.*, 1919, 1921, and 1926. *Econ. Journ.*, 1923 and 1928.
[15] *Der sinn der Indexzahlen*, Tübingen, 1927. Also Weltw. Arch. 1929.
[16] *Nordic Statistical Journal*, 1923, 1924, 1932.
[17] Economic Bulletin. Conjuncture-Institute of Moscow. n. 9/10, 1924 (Russian).
[18] *Economica*, May, 1933.
[19] *Arquiv. f. Sozialw. u. Sozialpol.*, 1932. *International Comparisons of Food Costs*, (In studies and reports on the International Labour Office. Series N., N.º 20), *Econometrica*, 1934, page 59, and *The Review of Economic Studies*, june, 1935.
[20] *New Methods of Measuring Marginal Utility*, Tübingen, 1932. Section 9. Also *Journ. Am. Stat. Ass.*, Dec., 1930.
[21] *The Purchasing Power of Money*, Chap. II, Section 3.

dos todos os três por uma bôlsa pendurada no outro lado. Os pesos representam as quantidades e "os braços" (distâncias ao fulcro) os preços. Grandezas alternativas dos pesos e dos braços são discutidas, ilustrando a concepção de preços e quantidades como variáveis independentes.

A calculação da média dos preços é ilustrada através do expediente de situar os três objetos num *ponto médio*. O braço dêste ponto — e sendo o momento o mesmo — é, naturalmente, determinado com precisão, dando, dessarte, a idéia de que a concepção de um preço médio está bem definida. A última parte do exemplo é perigosamente traiçoeira. Com efeito, essa feição do exemplo que impõe a determinação única do braço médio, é a comensurabilidade *física* dos pesos, sendo uma libra de pão — do ponto de vista da balança mecânica — igual a uma libra de carvão, etc.. Mas, é precisamente a *ausência* desta comensurabilidade física que vem a constituir o problema do número-índice.

A indeterminação criada pela incomensurabilidade física é, de fato, sobremaneira perturbadora no tratamento atomístico, e já se fizeram várias tentativas vãs no afã de superá-la.

Primeiramente, há que considerar aquilo a que EDGEWORTH chamou conceito do *padrão indefinido,* que pode ser, mais apropriadamente, denominado *critério estocástico* [22]. Faz-se, aqui, a suposição de que qualquer mudança no nível de preços *deve,* por assim dizer, manifestar-se através de modificação proporcional em todos os preços. Qualquer desvio dessa restrita proporcionalidade há de ser considerado como devido a *outras causas* diferentes daquelas nas quais pensamos, quando falamos em mudança de nível de preços. A maneira de distinguir, de modo concreto, essas duas coleções de causas, não é essencial à existência conceitual do fator de proporcionalidade. Mas, de fato, essa distinção é, em geral — de forma mais ou menos explícita — aceita como sendo a mesma que existe entre as causas monetárias e as não monetárias.

De acôrdo com êste conceito, o desvio das mudanças de preço individual, partindo da proporcionalidade, deve ser considerado mais ou menos como êrro de observação. Mas, neste caso, a aplicação da teoria dos erros deveria possibilitar-nos a determinação do fator subjacente da proporcionalidade. Se compararmos as duas situações de preços, *0* e *1,* qualquer uma das razões individuais de preços p_1^k/p_0^k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ pode, em primeira aproximação, ser tomada como uma estimativa da mudança do nível de preços, tão boa como qualquer outra dessas razões. Conseqüentemente, a simples média das mesmas fornecerá uma estimativa da mudança do nível de preços entre *0* e *1*. Se pesos devem ser aplicados em tôdas estas promediações, êles hão de exprimir a *precisão* das observações individuais. Estas não necessitam ser proporcionais à importância econômica das mercadorias, como se fôssem medidas, por exemplo, pelas *quantidades* q^k, ou, pelos *valores* [23] $p^k q^k$. O aperfeiçoamento dêste tipo de análise conduz ao estudo da *distribuição estatística* das razões individuais p_1^k/p_0^k. Critérios podem ser estabelecidos com o fim de verificar a normalidade da distribuição, a independência das observações, etc.. Considerações dessa espécie levam à adoção de médias que diferem da média aritmética, particularmente — no caso de distribuições assimétricas — a média geométrica [24], e — se as observações estão acentuadamente dependentes — a mediana ponderada [25] (LAPLACE, *Method of Situation*).

A noção de *nível de preços,* dessarte, torna-se aqui essencialmente *estocástica*. Podemos fazer indicações de probabilidade em tôrno disto, mas não asserções *exatas* como aquelas, lícitas, que formulamos em relação a outras magnitudes num esquema econômico teórico. Por conseqüência, o nível de preços tem significação, apenas, quando dêle participa grande número de bens individuais.

[22] *Papers,* Vol. I, pag. 196 and 235.
[23] EDGEWORTH, Vol. 1, pag. 243. "Assuming... accidental deviations..."
[24] EDGEWORTH, Vol. 1, pag. 238.
[25] EDGEWORTH, Vol. 1, pag. 249.

Como diz EDGEWORTH[26]: "Para mim a concepção aparece algo indefinida, como aplicada a dois ou poucos artigos e sem relação à teoria das médias".

Isto, conclusivamente, elimina a possibilidade de se usar o conceito supra como *definição* do nível de preços. Pelo menos, para muitos tipos de análises econômicas, será um conceito impossível, como, por exemplo, nos casos em que se deseja construir uma escala hierárquica de índices, sendo cada um dêles, em si mesmo, um compôsto de índices de ordem inferior. Além disso, a base lógica de todo o conceito parece insustentável. Não podemos supor que o "fator monetário" se manifestará como mudança proporcional de todos os preços. Estou, portanto, de acôrdo com KEYNES, quando êle, vigorosamente, critica a definição estocástica do nível de preços, em na achando "globalmente errada"[27], e com GINI, que diz: "qu'on ne peut arriver à résoudre le problème de la manière envisagée[28]."

Estou falando aqui da *definição* exata do conceito de nível dos preços. O estudo das distribuições das razões de preços e questões similares é, em si mesmo, altamente significativo sob outros diferentes pontos de vista, como, por exemplo, como meio de descrever concretamente as várias utilidades, de acôrdo com seu comportamento nos preços, etc., da forma por que o fizeram FREDERIC C. MILLS[29] e outros, ou para elucidar a natureza de várias fórmulas de números-índice, sugeridas a título de aproximações.

Outra tentativa de fugir à indeterminação — enquanto nos encontramos, ainda, sob o ponto de vista atomístico — é a *prova de verificação,* que consiste em formular certas provas formais, considerando a função que representa a mudança do nível dos preços de uma situação à outra. O expoente dessa idéia é IRVING FISHER. Façamos P_{01} como número-índice que exprime a razão entre o nível de preços no ponto 1, "ponto objetivo", e o nível de preços no ponto 0, "ponto básico". P_{01} é suposto depender dos preços $p_0^1 \ldots p_0^N$, $p_1^1 \ldots p_1^N$, e das quantidades $q_0^1 \ldots q_0^N$, $q_1^1 \ldots q_1^N$. Algumas das mais importantes provas são as seguintes:

Prova de identidade: $P_{00} = 1$.

Prova da inversão (prova da inversão no tempo): $P_{01}P_{10} = 1$.

Prova circular: $P_{01}P_{12} = P_{02}$.

Prova da comensurabilidade: P_{01} não se alterará com a mudança da unidade de mensuração de qualquer uma das utilidades individuais.

Prova da determinação: P_{01} não se tornará zero, infinito, ou indeterminado, se um preço ou uma quantidade individuais se anulem.

Prova da proporcionalidade: Se todos os preços individuais mudarem na mesma proporção de *0* a *1*, P_{01} será igual ao fator comum da proporcionalidade.

O índice de SAUERBECK, isto é, a média aritmética simples das razões dos preços,

$$P_{01}^{Sau} = \frac{1}{N} \sum \frac{p_1}{p_0} \tag{2.1}$$

(que pode ser considerado como o resultado obtido pela forma mais simples possível da aproximação estocástica), satisfaz, sòmente, às provas de identidade, comensurabilidade e proporcionalidade. As fórmulas bem conhecidas de LASPEYRES e PAASCHE

$$P_{01}^{La} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}, \tag{2.2}$$

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_0 p_1} \tag{2.3}$$

---

26 *Econ. Journal,* 1923, pag. 343.
27 *A Treatise on Money,* Vol. I pag. 85.
28 *Metron,* 1924, pag. 21.
29 *The Behavior of Prices,* New York, 1927.

atendem às provas de comensurabilidade, determinação e proporcionalidade, mas não à prova da inversão, nem *a fortiori*, à prova circular. O cruzamento entre êles,

$$P_{01}^{Ide} = \sqrt{P_{01}^{La} \cdot P_{01}^{Pa}}, \tag{2.4}$$

considerado por BOWLEY, recomendado por WALSH e PIGOU e chamado por FISHER a fórmula *ideal*, satisfaz à prova da inversão, mas não à prova circular. O mesmo pode ser dito em relação à fórmula de EDGEWORTH,

$$P_{01}^{Ed} = \frac{\Sigma\, p_1(q_0+q_1)}{\Sigma\, p_0(q_0+q_1)}. \tag{2.5}$$

De outro lado, a média aritmética com pesos constantes

$$P_{01}^{A.c.p.c.} = \frac{\Sigma\, p_1 q}{\Sigma\, p_0 q}, \tag{2.6}$$

(onde os q são independentes do ponto *0* e *1*), bem como a média geométrica de pesos constantes

$$P_{01}^{G.c.p.c.} = \frac{\prod p_1^{\alpha}}{\prod p_0^{\alpha}} = \frac{(p_1^{1})^{\alpha^1} \ldots (p_1^{N})^{\alpha^N}}{(p_0^{1})^{\alpha^1} \ldots (p_0^{N})^{\alpha^N}}, \tag{2.7}$$

(sendo $\Sigma\alpha = 1$ e os α, independentes dos pontos *0* e *1*) satisfazem à prova circular (para qualquer conjunto de três pontos, no qual os q ou os α são os mesmos); atenderá, além disso, (2.6), às outras provas mencionadas; para qualquer comparação onde as quantidades q podem ser supostas sensìvelmente constantes, (2.6) dá, portanto, solução satisfatória. Isto é, porém, apenas, um caso trivial. A dificuldade fundamental é que, na maioria dos casos, particularmente para comparações geográficas ou confrontos entre pontos remotos de tempo, será absurdo admitir a constância dos q. Em tais casos, devemos deixar que a fórmula dependa dos q_0 e q_1 atuais, o que nos reconduz às fórmulas dos tipos (2.1) — (2.5).

As dificuldades aqui discutidas são inevitáveis, desde que porfiemos em permanecer sob o ponto de vista atomístico e consideremos os p e q como variáveis independentes. Nessa suposição (e admitindo certas propriedades de continuidade da fórmula do número-índice), tenho provado, a rigor, que três provas tão fundamentáveis — como as de comensurabilidade, determinação e circular — não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo [30]. E, mesmo se alguma destas provas for abandonada (FISHER, por exemplo, dispôs-se a relegar a prova circular), as restantes não conduzem a uma fórmula única.

A despeito de a prova de verificação não poder levar-nos a uma fórmula especial, capaz de ser considerada como a definição do nível dos preços, ela é, ainda assim, um instrumento conveniente na tarefa de ajuizar os méritos comparativos de várias fórmulas, que se sugerem, heurìsticamente, como aproximação a um nível de preços definido por alguns outros meios.

Instrumento especial, que merece mencionado em conexão com o critério atomístico, é o *método em cadeia*, originalmente introduzido por ALFRED MARSHALL [31]. Êsse método adapta-se a dados cujos pontos são ordenados numa única *seqüência*, que significa, na prática, séries cronológicas, mas não dados geográficos. Seja P_{01} qualquer fórmula de índice para a comparação direta entre dois

[30] *Journ. Am. Stat. Ass.*, Dec., 1930.
[31] *Contemporary Review*, March, 1887.

pontos: por exemplo, uma das fórmulas definidas por (2.1) — (2.7). O índice em cadeia $\overline{P}_{st}$, entre dois pontos quaisquer, s e t, é definido, então, por

$$\overline{P}_{st} = \frac{P_{01}\,P_{12} \,\ldots\ldots\, P_{t-1,t}}{P_{01}\,P_{12} \,\ldots\ldots\, P_{s-1,s}}, \tag{2.8}$$

sendo zero o primeiro ponto existente nos dados. A definição (2.8) pode, òbviamente, ser aplicada tanto para $s < t$, como $s \geqq t$. Se $s < t$, a (2.8) reduz-se a (2.9).

$$\overline{P}_{st} = P_{s,s+1},\, P_{s+1,s+2} \,\ldots.\, P_{t-1,t}\,. \tag{2.9}$$

Qualquer índice em cadeia $\overline{P}_{st}$ satisfaz à prova circular e à da inversão, sem levar em conta a espécie do índice elementar sôbre o qual é construído. Se o índice elementar atende à prova circular, não há diferença entre o índice em cadeia e o índice direto calculado pela mesma fórmula.

Ao método em cadeia, deu-se-lhe, graças a DIVISIA, elegante justificação lógica, a qual, em essência, é a seguinte. Consiste o problema em separar o valor total Σpq num produto de dois fatôres,

$$PQ = \sum pq, \tag{2.10}$$

dos quais o primeiro P pode ser havido como representante do "nível geral de preços" e o segundo Q como "o volume físico total". A fim de proceder dessa forma, DIVISIA considera o seguimento no espaço dimensional $2N$, cujas coordenadas são $p^1 \ldots p^N$, $q^1 \ldots q^N$. Tem-se, dessarte

$$PdQ + QdP = \sum pdq + qdp, \tag{2.11}$$

a qual, dividida pela (2.10), dá

$$d\,log\,P + d\,log\,Q = \sum \alpha\, d\,log\;p + \sum \alpha\, d\,log\,q, \tag{(2.12)}$$

onde

$$\alpha^1 = \frac{p^1 q^1}{\sum pq} \;\ldots.\; \alpha^n = \frac{p^N q^N}{\sum pq}\,. \tag{2.13}$$

A fórmula (2.12) é válida para qualquer que seja a definição de P e Q, respeitada a única condição de que a (2.10) seja obedecida. Como a analogia formal entre os têrmos nos dois membros de (2.12) sugere, muito naturalmente, se efetue a definição de P e Q, equacionando *separadamente* os têrmos de (2.12), façamos:

$$d\;log\;P = \sum \alpha\; d\;log\;p, \tag{2.14}$$

$$d\;log\;Q = \sum \alpha\; d\;log\;q. \tag{2.15}$$

A igualdade (2.14) é uma definição diferencial do índice de preço, e a (2.15), uma definição similar do índice de quantidade. Se a (2.14) for integrada numèricamente, seremos conduzidos meramente a um índice em cadeia da forma (2.9), ou, mais geralmente, (2.8). Como fórmula elementar do encadeamento, podemos tomar a de LASPEYRES ou a de PAASCHE, ou a de EDGEWORTH, ou quase qualquer outra, de acôrdo com a escolha do princípio da aproximação para os graus da integração numérica. Se os pesos (2.13) forem constantes durante o período da integração, o resultado será, simplesmente, — como ROY [32] já havia salientado — a média geométrica (2.7). Uma vez que (2.7) atende à prova circular, neste caso especial não há diferença entre o índice em cadeia e o índice direto.

A divergência que existe entre o índice em cadeia e o índice direto correspondente (quando o último não satisfaz à prova circular) tomará freqüentemente o sentido de inclinação sistemática. Isto significa que, com t aumentando, a razão $\overline{P}_{st}/P_{st}(t > s)$ afasta-se cada vez mais da unidade (para cima ou para baixo, conforme o caso). A fim de compreender isto, considere-se a *divergência triangular*.

$$D_{rst} = P_{rs}\,P_{st} \;/\; P_{rt}\,. \tag{2.16}$$

[32] *Revue d'Économie politique*, 1927.

Em têrmos de D, temos

$$\frac{\overline{P}_{0t}}{P_{0t}} = D_{012}\, D_{023}\, D_{034} \ldots\ldots D_{0,t-1,t} \,. \tag{2.17}$$

Se a prova circular fôr válida, $D \equiv 1$. De outro lado, pode ser muito provável que D seja, digamos, *maior* do que 1. Como exemplo, consideremos o índice de SAUERBECK. Aqui

$$D^{Sau}_{0,s+1,s+2} = \frac{\dfrac{1}{N}\sum\dfrac{p_{s+1}}{p_0}\cdot\dfrac{1}{N}\sum\dfrac{p_{s+2}}{p_{s+1}}}{\dfrac{1}{N}\sum\dfrac{p_{s+1}}{p_0}\cdot\dfrac{p_{s+2}}{p_{s+1}}} \,. \tag{2.18}$$

A fórmula (2.18) pode ser transformada por meio de

$$\frac{1}{N}\sum xy = \bar{x}.\bar{y} + \sigma_x\,\sigma_y\,r_{xy} \,, \tag{2.19}$$

onde x e y são duas quaisquer variáveis; $\bar{x}$ e $\bar{y}$, suas médias aritméticas dos N valores; σ_x e σ_y, seus desvios-padrão; r_{xy}, seu coeficiente de correlação.

A relação (2.19) é verificada, simplesmente, caso se escreva a fórmula do coeficiente de correlação e se reagrupem os têrmos. (A fórmula também é válida, no caso de todos os somatórios serem tomados como pesos.) A equação (2.19) mostra que a média de um produto é maior ou menor do que o produto das médias, de acôrdo com o fato de as duas variáveis serem positivamente ou negativamente correlacionadas. Fazendo, em (2.18)

$$x = \frac{p_{s+1}}{p_0}\,;\; y = \frac{p_{s+2}}{p_{s+1}}\,;$$

obtém-se

$$D^{Sau}_{0,s+1,s+2} = \frac{1}{1 + uv.\,r_{xy}} \tag{2.20}$$

onde $u = \sigma_x/\bar{x}$; $v = \sigma_y/\bar{y}$ são essencialmente positivos. Falando na generalidade, aquêles preços que mudaram *menos* do que a média de 0 a $s+1$, mudarão *mais* do que a média de $s+1$ a $s+2$; portanto, r_{xy} negativo e (2.20) maior do que 1.

O índice de SAUERBECK, se usado para encadeamento, tenderá conseqüentemente para cima. Através de argumento semelhante, ver-se-á que o índice de LASPEYRES terá o mesmo sentido para cima; já o de PAASCHE, para baixo. Mas no cruzamento (2.4) alguma inclinação para baixo permanece, como ficou demonstrado experimentalmente por PEARSON[33]. Destas nossas palavras não se deve inferir que o índice direto é certo, e o de cadeia, errado. Isto, evidentemente, não pode ser decidido pelas simples considerações acima.

O método de cadeia foi generalizado por GINI[34], daí resultando um método aplicável quer sejam os dados ordenados, ou não, em série. O Autor italiano propõe duas fórmulas, as quais podem ser chamadas, respectivamente, "cruzamento agregado" e "cruzamento de dois pontos".

$$P^{Gi.c.a}_{01} = \sqrt[M]{\prod_r \frac{\sum p_1\,q_r}{\sum p_0\,q_r}}\,; \tag{2.21}$$

$$P^{Gi.c.d.p.}_{01} = \sqrt{\prod_r P_{0r}\,P_{r1}} \,. \tag{2.22}$$

Aqui, π_r indica um produto acima de todos os pontos M que aparecem no material em trabalho. A grandeza P_{0r}, em (2.22), é qualquer índice elementar. Tanto (2.21) como (2.22) satisfazem à prova circular em tôda a extensão do

[33] *Review of Economic Statistics*, May, 1921.
[34] *Metron, Aug.*, 1931, pág. 10.

cruzamento. Porque $M = 2$, a (2.21) reduz-se a fórmula ideal de FISHER. A inconveniência dos cruzamentos de GINI é que recalculações devem ser feitas quando se incluem mais dados. Isto, contudo, não acontecerá, freqüentemente, em comparações geográficas de preços, para as quais êste método é fundamentalmente pretendido.

3. CRITÉRIO FUNCIONAL

Na aproximação funcional, consideram-se preços e quantidades como se ligados por certas relações típicas, ou, em princípio, relações *observáveis*. Aqui não fazemos — como o fizemos na estocástica — a suposição de que, idealmente, os preços individuais devem mudar na *mesma* proporção, desde que se passe de uma situação a outra. Fazemos face aos desvios da proporcionalidade e os tomamos, meramente, como expressões para aquelas sistemáticas relações que servem para dar significação econômica ao número-índice. O índice resultante, em princípio, aparecerá tão observável, com a mesma precisão, quanto o preço de uma utilidade individual, contanto que se disponha dos dados necessários.

Êsses dados incluem algo mais do que mera coleção de preços e de quantidades associadas a cada situação; verdade é que, na prática, os dados completos nem sempre são de fácil obtenção. Isto conduz a métodos de aproximação e limites nos quais se usam, em considerável extensão, fórmulas da espécie discutida no Capítulo 2. Mas, agora, há uma diferença fundamental: é que conhecemos a questão, para a qual procuramos uma resposta. E temos, por conseguinte, uma base para nosso julgamento em face das várias fórmulas.

Há diversas coleções alternativas de dados, cada uma das quais é *suficiente* para a definição funcional do número-índice. Subseqüentemente, algumas delas serão mencionadas. Para começar, indicaremos certas propriedades gerais, que os dados têm que possuir, a fim de que se torne possível a definição.

Consideremos qualquer par de situações, *0* e *1*. Na formulação mais geral do problema, estas situações podem diferir em qualquer número de assuntos: várias espécies de populações, várias espécies de mercadorias negociadas, ou consumidas, ou produzidas, etc.. Suponhamos que a despesa monetária total seja bem definida e quantitativamente observável em cada uma das situações; sejam elas ρ_0 e ρ_1, respectivamente. Se os conceitos dos preços p_t e quantidades q_t são definidos, aquela tem que ser igual a

$$\rho_t = \Sigma\, p_t q_t \,. \tag{3.1}$$

Se cada uma das situações, *0* e *1*, é caracterizada por uma *série dada* de preços e quantidades, ρ_0 e ρ_1 serão (3.1) dois *números dados*. Na aproximação funcional êstes não devem ser considerados assim, mas capazes de certa *variação*, isto é, a despesa dentro da situação *0* pode assumir valores diferentes, e, semelhantemente, em relação a *1*.

Faça-se, agora, a suposição de que dispomos de certo critério, pelo qual se nos torna possível saber, objetivamente, se uma pessoa que, em *0*, gasta uma importância ρ_0, está ou não, nas mesmas condições de riqueza que outra pessoa em *1*, gastando uma importância ρ_1. Caso ambas as pessoas estejam igualmente "ricas", as duas importâncias podem ser chamadas *equivalentes*. Ou: $\rho_0 \equiv \rho_1$. Se tal fato existe, temos

$$P_{01}^{Func} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \text{ (quando } \rho_0 \text{ e } \rho_1 \text{ se equivalem),} \tag{3.2}$$

como a definição do número-índice funcional de preços entre *0* e *1*. Até aqui a definição é, naturalmente, apenas formal; seu valor prático depende de possibilidade de se achar, realmente, um critério objetivo de equivalência. Antes de nos dedicarmos a isto, notemos que a idéia de ser "rico" está presente, duma forma, ou doutra, como elemento essencial às teorias dos estudiosos dos números--índice. KNUT WICKSELL[35], por exemplo, diz: "... Müste man zu diesem Zwecke die verbrauchten Werengatungen selbst und ihre relative Bedeutung für die wirtschaftenden Individuen anstellen..."

KONÜS toma "Konstanter Bedürfnisstand" como o critério[36] através do qual se define o verdadeiro índice. GINI[37] apresenta um argumento para definir igual riqueza mercê da igualdade do "nível médio" das utilidades marginais dos bens individuais. BOWLEY[38] define o número-índice do custo-de-vida, em função da pergunta: "Que mudança na despesa é necessária, depois de uma alteração de preços, para obter a mesma satisfação que dantes?" E BORTKIEWICZ[39] exige que "... der dem Arbeiter im Zeitraum 2 zuzubilligende Geldlohn... ihm die gleiche Gesamtbefriedigung sichert, wie der Geldlohn, der ihm im. Zeitraum I zustand, oder anders ausgedrückt, dass der Reallohn ... gleich hoch bleibt."

ROYAL MEEKER[40] está de acôrdo com o ponto de vista de BOWLEY. KEYNES[41] diz: "Duas coleções de bens são equivalentes, quando êles representam... as coisas que são compradas por... duas pessoas de igual sensibilidade e na posse de iguais rendas reais de utilidade."

HABERLER[42] toma posição semelhante. ALLEN[43] e STAEHLE[44] definem a equivalência da despesa pelo fato de que as duas combinações de quantidade consideradas se encontram no mesmo lugar de indiferença, num dado mapa de indiferença.

Poderíamos citar, ainda, grande número de outros autores, que mais ou menos explìcitamente adotem a definição (3.2), que parece, verdadeiramente, a única plausível; pode ela ser aplicada não sòmente aos índices do custo da vida, como, também, aos índices gerais de pagamentos deferidos, preços de atacado, etc..

Como podemos, pois, obter critérios objetivos para o estado de "riqueza" igual? Isto exige, antes de mais nada, que segreguemos certo grupo de indivíduos, ou seja o *grupo definicional* para o número-índice em questão, como, por exemplo, famílias de trabalhadores, no caso de índice do custo-de-vida; atacadistas (ou talvez varejistas?), no caso de um índice de preços por atacado, etc.. Suponhamos que a questão grupo definicional se acha resolvida. Em segundo lugar, deve-nos ser possível observar objetivamente um ou mais parâmetros, $\mu, \upsilon, \ldots, \lambda$, que caracterizam o comportamento de um *indivíduo típico* no grupo definicional, e os quais podem ser tomados como indicadores do igual "estado de riqueza". Chamemos a êsses parâmetros de parâmetros de comportamento. Suponhamos nos seja possível observar objetivamente — dentro de cada uma das situações consideradas — as *covariações* entre as despesas em dinheiro e os parâmetros de comportamento. Seja esta função, para a situação *t*,

$$\rho_t = \rho_t(\mu, \nu, \ldots, \lambda) . \tag{3.3}$$

O índice funcional de preços entre *0* e *1* — o qual, agora, pode ser chamado índice geral paramétrico — será, então:

$$P_{01}^{Par} = \frac{\rho_1(\mu, \nu, \ldots, \lambda)}{\rho_0(\mu, \nu, \ldots, \lambda)} . \tag{3.4}$$

---

35 Em *Geldzins u. Güterpreise*, Jena, 1898, pág. 12, STAEHLE (*Intern. Comp. of Food Costs*, pág. 4) considera WICKSELL um dos autores que desistiram da tentativa de encontrar definição para o "verdadeiro" número-índice. Isto parece não estar correto. WICKSELL verificou a impossibilidade de fazê-lo sôbre base atomística, mas percebeu, ao mesmo tempo, a possibilidade funcional, conforme a citação acima indica.

36 Mencionado segundo BORTKIEWICZ, *Nordisk Statistisk Tidskrift*, Bd. 11, pág. 18.

37 *Metron*, 1924, Vol. IV. Ler, especialmente, as págs. 16, 22, 140 e 144.

38 *Economic Journal*, 1928, pág. 223.

39 *Nordic Statistical Journ.*, 1932, pág. 17.

40 *Encyclopedia Britannica*, artigo sôbre "Cost of Living".

41 *A Treatise on Money*, Vol. I, pág. 97.

42 *Der Sinn der Indexzahlen*, 1927, págs. 77-83.

43 *Economica*, May, 1933.

44 *Review of Economic Studies*, June, 1935.

Geralmente P_{01}^{Par} dependerá de μ, υ, ..., λ. Mas, compreensìvelmente, as funções ρ_1 e ρ_0 podem ser tais que (3.4) seja independente dêstes parâmetros e dependa, sòmente, das notações *0* e *1*. Se isto acontece para quaisquer situações *0* e *1*, diremos que o índice satisfaz à condição da *proporcionalidade da despesa*. Neste caso, uma pequena despesa *0* e uma grande despesa *0* devem ser multiplicadas pelo mesmo número, a fim de que se obtenha a equivalente despesa 1.

A fórmula (3.4) atende à prova circular idênticamente em μ, υ, ... λ, e a quaisquer que sejam as funções ρ_t (sob a única condição de que elas sejam de valor único). Adotando, assim, uma base teórica apropriada, atendemos a um desejo da maioria dos estatísticos práticos, o que se não pode virtualmente satisfazer com as usuais fórmulas do tipo atomístico. Neste trabalho, consideremos vários métodos de construção de parâmetros de comportamento.

4. O MÉTODO DA INDIFERENÇA

O método parte do conceito de um mapa de indiferença e de um indicador para o indivíduo típico do grupo definicional. O mapa de indiferença é a família de lugares de indiferença ou superfícies de indiferença, no espaço N-dimensional de quantidades $q^1 \dots q^N$. A definição é dada segundo a usual maneira de EDGEWORTH, FISHER, PARETO. Uma função de indiferença é qualquer função de $q^1 \dots q^N$ constante ao longo de qualquer lugar de indiferença, ou, em outras palavras, que tem os lugares de indiferença como suas superfícies de contôrno. Uma função de indiferença que tem, mais, a propriedade de crescer monotônicamente, quando passa de um lugar de indiferença a outro (preferido ao primeiro), é um indicador de escolha, ou, simplesmente, um indicador.

Se

(4.1) $I = I(q^1 \dots q^N)$, ou, mais brevemente, $I = I(q)$,

é um indicador, qualquer função $\overline{I}(q)$ obtida mediante transformação monotônica crescente, isto é, por uma transformação

(4.2) $$\overline{I} = F(I),$$

onde F é uma função monotônicamente crescente de uma variável, será, também, um indicador. Registramos assim as derivadas de I:

$$I^h = \frac{\partial I}{\partial q^h}, \quad I^{hk} = \frac{\partial^2 I}{\partial q^h \, \partial q^k}.$$

O vetor cujos componentes são $I^1 \dots I^N$ indica a *direção da preferência* (normal da superfície de indiferença).

Supondo que haja um indicador, $I(q)$, para o grupo definicional em questão, compreende-se que o indivíduo típico tem os mesmos gostos (mas não necessàriamente os mesmos recursos) nas várias situações consideradas. Esta suposição restritiva pode, naturalmente, ser feita apenas para comparação, entre lugares não muito diferentes ou pontos de tempo não por demais remotos.

Ademais disso, temos que fazer uma hipótese em relação ao comportamento estratégico do indivíduo típico. Admitiremos que êle se esforça em tornar máximo $I(q)$, na suposição de que sua despesa total é dada, bem assim de que a confronta com certas funções de preço (do ponto de vista dêle, estas serão funções de fornecimento):

(4.3) $p^h = \pi_t^h(q^1 \dots q^N)$ ou, resumidamente, $p = \pi_t(q)$,

com flexibilidade,

(4.4) $$\check{\pi}_t^{hk}(q^1 \dots q^N) = \frac{\partial \pi_t^h}{\partial q^k} \cdot \frac{q^k}{\pi_t^h}.$$

A rigor, não deveríamos supor haja sido dada sua despesa total, mas, sòmente, que ela se acha circunscrita na equação supra. Na prática, as duas suposições chegam ao mesmo, exceto nos casos extraordinários em que o consumo ultrapassa o ponto de saturação.

Quando a despesa t é dada, a *superfície de orçamento* é

$$\pi_t^1 (q^1 \ldots q^N) \,.\, q^1 + \ldots + \pi_t^N (q^1 \ldots q^N)\, q^N = \rho_t, \text{ ou } \sum \pi_t q = \rho_t \,. \tag{4.5}$$

Se (4.3) é independente dos q (mas dependente, é claro, de t e h), (4.5) é um plano. O ponto de equilíbrio em t é

(4.6) q_t = um ponto na superfície (4.5), que torna máximo $I(q)$.

A correspondente situação do preço de equilíbrio é

$$p_t = \pi_t(q_t) \,. \tag{4.7}$$

(4.6) é a definição geral do ponto de equilíbrio. Se as derivadas parciais existem e são contínuas, eis a solução de (4.5), e as condições de tangência

$$\frac{I^1}{\dfrac{\partial \rho_t}{\partial q^1}} = \frac{I^2}{\dfrac{\partial \rho_t}{\partial q^2}} = \cdots\cdots = \frac{I^N}{\dfrac{\partial \rho_t}{\partial q^N}} \,. \tag{4.8}$$

(4.8) expressa a *Lei de* Gossen generalizada, quer dizer, que as "utilidades marginais" são proporcionais aos "gastos marginais".

A expressão geral para as últimas é

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial q^h} = \pi_t^h \left(1 + \frac{1}{\pi_t^h\, q^h} \Sigma_x\, \check{\pi}_t^h\, q^k \,.\, \pi_t^{kh} \right) . \tag{4.9}$$

Se π_t^h depende sòmente de q^h, (4.9) reduz-se a

(4.10) $\dfrac{\partial \rho_t}{\partial q^h} = \pi_t^h (1 + \check{\pi}_t^h)$, onde (4.11) $\check{\pi}_t^h = \check{\pi}_t^{hh}.$

Se os preços são constantes, (4.10) reduz-se ainda mais a

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial q^h} = p_t^h \,. \tag{4.12}$$

No caso (4.12) passa um, e sòmente um, múltiplo do orçamento — agora um plano — para cada q. Naturalmente sua normal (o vetor de preço p) em virtude de (4.8), tem que correr na direção de preferência através de q, que determina o plano ùnicamente (uma mudança proporcional em todos os preços e na despesa monetária dará certamente o mesmo plano). Podemos, pois, assim, falar, sem ambigüidade, do "plano de orçamento através do q". No caso geral, diferentes múltiplos de orçamento podem ter a mesma normal em q. É-nos lícito, agora, falar da "superfície t de orçamento através de q".

As quantidades de equilíbrio q_t são funções de

$$q_t^h = E_t^h (\rho), \text{ ou } q_t = E_t (\rho) \,. \tag{4.13}$$

Trata-se das *funções de* Engel para t. Elas descrevem como — em t — o consumo de várias utilidades muda com a despesa total. Cada função pode ser representada como uma *curva uni-dimensional de* Engel. A coleção completa das funções de Engel (4.13) define uma trajetória uni-dimensional — a *trajetória de expansão de despesa*, ou mais curto, a trajetória de expansão — no espaço N-dimensional de quantidade. Cada situação t tem sua trajetória. Se (4.3) é independente de q, os preços são de *trajetória constante*. O Gráfico 1 representa um caso dessa ordem, para $N = 2$.

Associam-se a cada ponto numa trajetória dada, um valor de ρ e um valor de I. Fazemos a fundamental

(4.14) ***Suposição de monotonicidade.*** Ao longo de qualquer trajetória de expansão, ρ e I mudam sempre no mesmo sentido.

A função

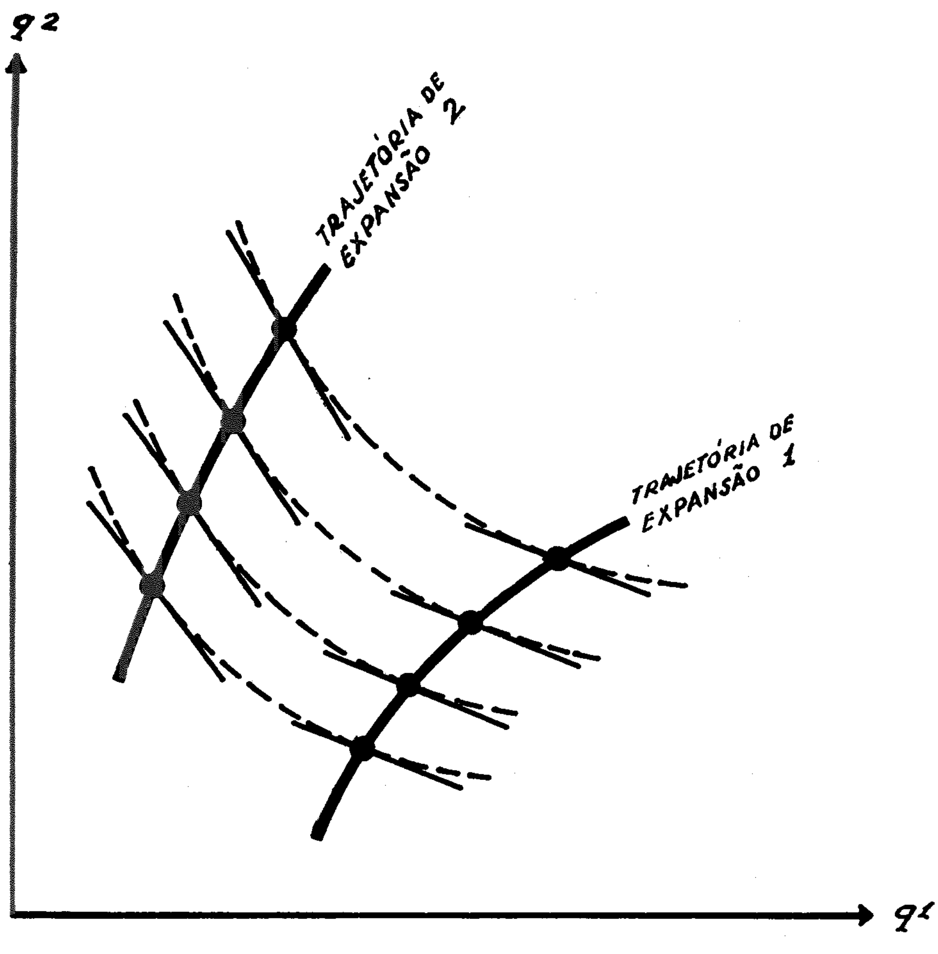
$$\rho = \rho_t(I) \tag{4.15}$$

tem valor único, se (4.14) fôr válido.

Nos têrmos de (4.15), o índice funcional — agora chamado índice definido por indiferença — será

$$P_{01}^{Ind} = \frac{\rho_1(I)}{\rho_0(I)}. \tag{4.16}$$

(4.16) é, naturalmente, um caso especial de (3.4) e, conseqüentemente, satisfaz à prova circular. Atende, também, à prova de proporcionalidade. Certamente, se $\pi_1^h = c\pi_0^h$, sendo c uma constante independente de h, temos $\check{\pi}_1^{hk} = \check{\pi}_0^{hk}$ e, portanto, $\partial\rho_1/\partial q^h = c\,\partial\rho_0/\partial q^h$. Conseqüentemente, se ρ_0 é qualquer pessoa *0*, a despesa *1*, $\rho_1 = c.\rho_0$ dará o mesmo ponto de equilíbrio, isto é, $q_1 = q_0$, de modo que $P_{01}^{Ind} \equiv c$ para qualquer ρ_0, ou seja, para qualquer I. Demonstra êsse argumento que qualquer par de situações com preços proporcionais, ou funções de preços, tem a mesma trajetória de expansão, e com variações proporcionais de despesas ao longo da trajetória.



(4.16) também satisfaz à maioria das outras provas, o que é plausível afirmar. No caso geral, (4.16) dependerá de I, caso contrário teremos proporcionalidade de despesa.

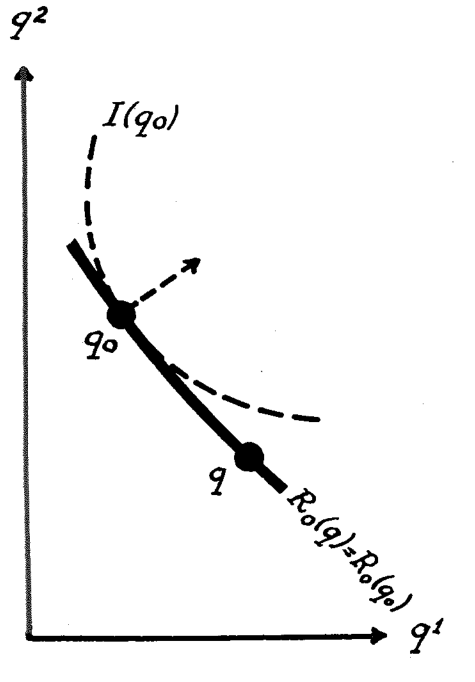
5. A TEORIA DOS LIMITES

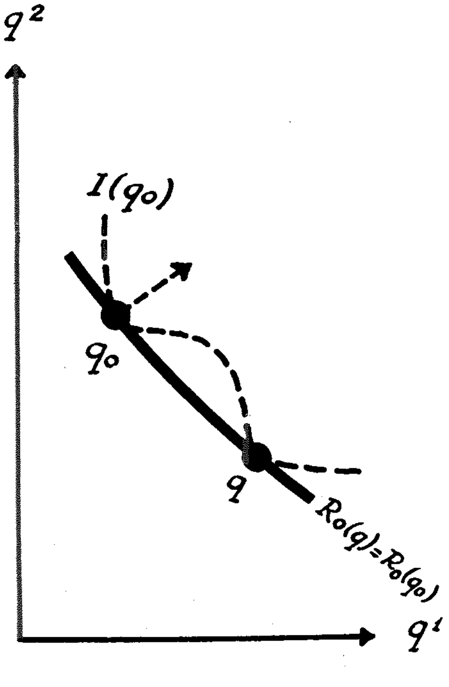
Se um indicador $I(q)$ é dado, e cada situação fôr caracterizada por uma coleção de preços, ou por uma coleção de funções de preço, um índice de preços perfeitamente definido pode ser — como ficou demonstrado no capítulo 4 — construído entre qualquer par de situações. Voltemos, agora, ao problema da aproximação do índice assim definido, mediante o uso de uma coleção menos completa de dados. Em primeiro lugar, vamos considerar os *limites*. Para esclarecer a situação, há que discutir, também, certos argumentos que não dão limites, fato em que, geralmente, se acredita.

PIGOU, KEYNES, GINI, KONÜS, BORTKIEWICZ, BOWLEY, ALLAN e STAEHLE, estudaram a questão. Há muita confusão com respeito às suposições feitas e proposições formuladas por êstes autores. É precisamente o que tentarei fazer, ao mesmo tempo aduzindo provas. Como regra, os autores acima mencionados partem de — explícita ou tàcitamente — preços localmente constantes (múltiplos do orçamento linear). A seguinte exposição mostra que isto é desnecessário, em grande parte.

(5.1) $$R_0(q) = \sum \pi_0(q) \cdot q\ ,$$

onde os π_0 são definidos por (4.3), é a despesa monetária, total, empregada para comprar q na situação 0. Por amor à síntese: $R_0(q)$ é o valor de q em 0, ou o





valor de 0 em q. Esta definição é aplicável, caso os preços tenham, ou não, trajetória constante.

É especialmente interessante comparar um q, arbitràriamente dado, com um q_0 *que fica na trajetória de expansão* para a situação 0 (o que equivale a dizer que isto será, para certa despesa monetária, o complexo de equilíbrio sob as funções 0 de preço); por brevidade, q_0 é 0 adaptado. Esta comparação conduz à

Proposição geral de adaptação. Qualquer complexo q, com o mesmo valor 0, como um certo complexo q_0, adaptado a 0, pode dar, no máximo, a mesma satisfação que q_0, isto é,

(5.2) Se $\quad R_0(q) = R_0(q_0);$ q_0 adaptado a 0, então $I(q) \leqq I(q_0)$.

Isto resulta, simplesmente, da definição de equilíbrio. Com efeito, se $R_0(q) = R_0(q_0)$ e $I(q) > I(q_0)$, q_0 não satisfaria a (4.6). As figuras 2 A e 2 B dão exemplo de duas mercadorias.

Mostra o raciocínio que o sinal de igualdade à direita em (5.2) sòmente vale se $q = q_0$, ou a adaptação de equilíbrio não é única (como na Figura 2 b). Temos, portanto, ainda a proposição

$$(5.3) \qquad \left.\begin{array}{l} \text{se } R_0(q) = R_0(q_0) \\ q_0 \text{ adaptado a } 0 \\ q \text{ não igual a } q_0 \\ \text{adaptação única} \end{array}\right\} \text{ então } I(q) < Ic(q_0).$$

Se admitirmos (4.14), temos mais

(5.4) Se $R_0(q) < R_0(q_0)$, q_0 adaptado a 0, então $I(q) < I(q_0)$.

De fato, consideremos a superfície da despesa 0 através de q (o Gráfico 3 representa a situação para $N = 2$). Suas coordenadas correntes $\bar{q}$ satisfazem a

$$(5.5) \qquad R_0(\bar{q}) = R_0(q)$$

Deixemos ser $\bar{q}_0$ a intersecção entre (5.5) e a trajetória de expansão 0. Então $R_0(q) = R_0(\bar{q}_0)$, q_0 adaptado a 0, assim que por (5.2) $I(q) \leqq I(\bar{q}_0)$. Mas, como pela hipótese, $R_0(q) < R_0(q_0)$ e, conseqüentemente, $R_0(\bar{q}_0) < R_0(q_0)$, temos, pela suposição de monotonicidade, $I(\bar{q}_0) < I(q_0)$, de modo que *a fortiori* $I(q) < I(q_0)$. (5.2) e (5.4) podem ser resumidos.

(5.6) Se $R_0(q) \leqq R_0(q_0)$, q_0 adaptado a 0, então $I(q) \leqq I(q_0)$.

Inversamente, qualquer complexo q, que dá a mesma ou mais alta satisfação do que o complexo q_0, adaptado a 0, há de ter o mesmo ou mais alto valor do 0 do que q_0, isto é,

(5.7) Se $0(q) \geqq I(q_0)$, q_0 adaptado a 0, então $R_0(q) \geqq R_0(q_0)$.

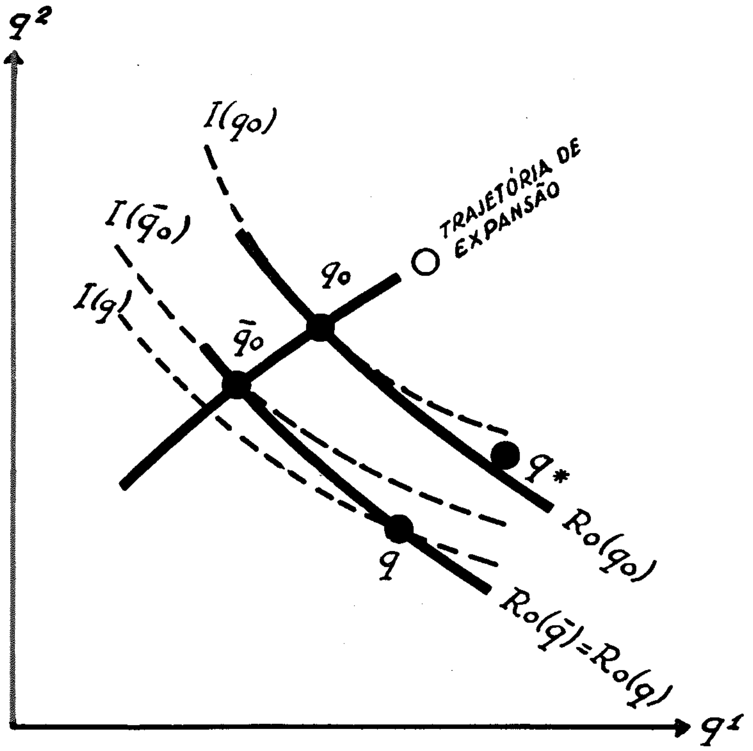
Realmente, se $R_0(q) < R_0(q_0)$, teríamos, por (5.4), $I(q) < I(q_0)$.

Mas, de $I(q) \leqq I(q_0)$ não podemos concluir $R_0(q) = R_0(q_0)$, isto é, que um complexo que é mais 0-dispendioso que certo complexo 0-adaptado pode dar menor satisfação, como, por exemplo, o ponto q no gráfico 3.

As proposições acima contêm, apenas, um complexo que é adaptado ao equilíbrio, ou seja, sòmente para um dos complexos consideramos a correspondente situação de preço. Mais tarde consideraremos duas situações de preços.

(5.2) e (5.6), onde a premissa concerne à despesa, são fàcilmente lembrados, porque a mais alta satisfação sempre toca à situação adaptada ao equilíbrio.

A base axiomática das proposições acima é apenas (4.6) e (4.14), — servindo as curvas nos gráficos 2 e 3 meramente como ilustrações e não como provas. Se fôr desejado, uma parte das conclusões pode ser relacionada à *convexidade* das superfícies de indiferença.



Vamos, agora, passar à consideração de certos limites e critérios especiais.

Critérios de PIGOU. PIGOU define a variação no Dividendo Nacional, entre dois períodos, como a proporção das rendas em dinheiro dividida pela mudança do nível de preço; em outras palavras, como a proporção das rendas *deflacionadas*. Na obra *Wealth & Welfare,* êle considera, especialmente, o caso de uma renda constante em dinhêiro, reduzindo assim o problema à análise de um índice de preços. Êste processo, diz êle, é sòmente "para simplicidade de argumento — nenhuma diferença em substância é feita."[45] Isto não é bem correto, porque não se leva em conta o problema, no todo, da *proporcionalidade da despesa.* Mas, deixando isto de lado, por momento, consideremos seu raciocínio sôbre o índice de preços. PIGOU quer construir um barômetro que sempre se desloque com a situação de preços na direção oposta à satisfação total obtida por uma pessoa, com uma despesa constante em dinheiro; não acha tal barômetro, mas formula o que podemos chamar

(5.8) *O primeiro critério de* PIGOU. Se as fórmulas de LASPEYRES e PAASCHE indicam uma mudança de preço na mesma direção, a satisfação total obtida por um indivíduo, com uma renda constante em dinheiro, tem que ser alterada no sentido contrário.

PIGOU, por isto, e mais ou menos heurìsticamente, adotou a média geométrica entre êstes dois índices, isto é, (2.4) como uma *aproximação* ao barômetro procurado.

(5.8) é correto, mas pode ser apurado assim:

Proposição (5.9). Se a fórmula de LASPEYRES indica uma queda de preços, a satisfação obtida por uma pessoa, com uma renda constante em dinheiro, deve ter crescido. Se a fórmula de PAASCHE mostra um aumento de preços, a satisfação deve ter diminuído.

[45] *Wealth and Welfare,* 1912, pág. 34.

Além disso, estas proposições valem não sòmente para o caso de preços de trajetória constante, considerado por PIGOU, mas, também, de modo geral, caso adotemos apenas as seguintes definições, ligeiramente generalizadas:

$$P_{01}^{La} = \frac{R_1(q_0)}{R_0(q_0)} = \frac{\sum \pi_1(q_0) \cdot q_0}{\sum \pi_0(q_0) \cdot q_0} \tag{5.10}$$

$$P_{01}^{Pa} = \frac{R_1(q_1)}{R_0(q_1)} = \frac{\sum \pi_1(q_1) \cdot q_1}{\sum \pi_0(q_1) \cdot q_1} \tag{5.11}$$

Para os preços de trajetória constante, naturalmente, (5.10) e (5.11) reduzem--se à (2.2) e (2.3).

(5.9) está provado destarte: Se $R_1(q_1) = R_0(q_0)$ e $R_0(q_0) > R_1(q_0)$ de modo que $R_1(q_0) < R_1(q_1)$, temos por (5.4), $I(q_0) < I(q_1)$. Semelhantemente para a última parte de (5.9).

Depois, na obra *Economics of Welfare*, PIGOU considerou o barômetro de satisfação *diretamente, sem raciocínio* através de uma despesa constante. Esta análise é mais adequada, porque não supõe proporcionalidade da despesa. PIGOU quer um barômetro direto, que se movimente no mesmo sentido da satisfação total, e considera, para êste fim, as proporções obtidas mercê da deflação da renda relativa em dinheiro pelos índices de preços de LASPEYRES e PAASCHE respectivamente, isto é,

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot \frac{1}{P_{01}^{La}} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot \frac{1}{P_{01}^{Pa}} \,. \tag{5.12}$$

Êle formula, assim, o que pode ser chamado

(5.13) *O segundo critério de* PIGOU. Se as duas razões (5.12) são maiores (ou menores) do que a unidade, a satisfação total deve ser aumentada (ou diminuída) quando passa de *0* a *1*.

A proposição é correta, mas pode ser melhorada para:

Proposição (5.14). Se a primeira proposição em (5.12) é maior do que a unidade (a segunda menor do que a unidade), a satisfação total tem que ser aumentada (ou diminuída).

Realmente, (5.12) são as razões

$$\frac{R_1(q_1)}{R_1(q_0)} \quad \text{e} \quad \frac{R_0(q_1)}{R_0(q_0)} .$$

Se a primeira é maior do que a unidade, $I(q_1) > I(q_0)$, por (5.4). Se a segunda é menor do que a unidade, $I(q_1) < I(q_0)$.

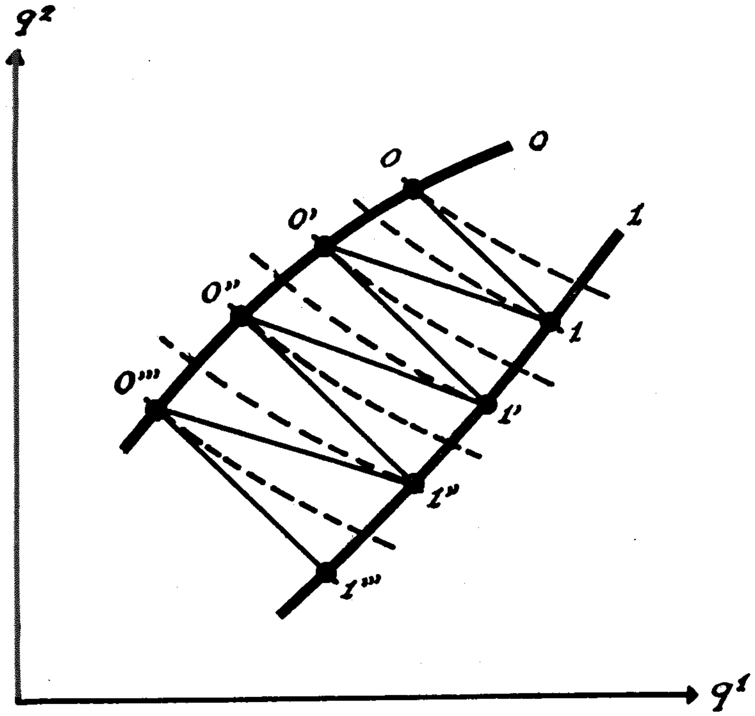
A natureza das conclusões de PIGOU pode também ser demonstrada, sob a seguinte forma:

(5.15) se $P_{01}^{La} \leqq 1$, q_0 adaptado a *0*, então $P_{01}^{Ind}\left(I_0\right) \leqq 1$,

(5.16) se $P_{01}^{Pa} \geqq 1$, q_1 adaptado a *1*, então $P_{01}^{Ind}\left(I_1\right) \geqq 1$,

onde, por brevidade, $I_0 = I(q_0)$, $I_1 = I(q_1)$. (5.15) — (5.16), deduz-se diretamente de (5.9), em conexão com a hipótese de monotonicidade.

O problema de PIGOU: medir a variação de satisfação sob despesa monetária constante é fundamentalmente diferente do de construir um índice funcional de preços, o qual constitui o problema de medir a variação de despesa em dinheiro, sob satisfação constante. O primeiro problema é essencialmente atingido pela arbitrariedade do indicador de escolha (compare-se (4.2)), *enquanto o segundo não o é*. Isto implica diferença fundamental na natureza das conclusões. De fato, se $f(x)$ e $g(x)$ são *quaisquer* funções monotônicamente crescentes, que satisfazem $f(1) = g(1) = 1$, $f(P_{01}^{La})$ e $g(P_{01}^{Pa})$ podem ser colocados no lugar de



P_{01}^{La} e P_{01}^{Pa} sem causar qualquer mudança no raciocínio de PIGOU. Sua longa análise nada contém para distinguir P_{01}^{La} e P_{01}^{Pa} de f e g. Seu uso da palavra "limites" é, conseqüentemente, injustificado no todo. A comparação de (5.15) — (5.16) com (5.25) — (5.26) mostra como muito mais se acha contido nas proposições desenvolvidas, posteriormente, por HABERLER.

Diversos autores, por exemplo KEYNES [47] e STAEHLE [48], acreditam que a análise de PIGOU realmente fornece limites para o índice de preços definido pela indiferença. Êstes equívocos mostram como é fácil introduzir idéias próprias nas obras de outros.

A identidade de GINI. Enquanto PIGOU buscava um barômetro de troca na satisfação total, GINI pesquisava outro, baseado na utilidade marginal, distinguindo o poder psíquico e o econômico da capacidade aquisitiva do dinheiro. O primeiro é simplesmente algum índice de preço; usualmente, aquêle Autor usa o de LASPEYRES. O segundo é a razão inversa da utilidade do dinheiro, ω_0/ω_1, onde ω_t designa a nominal utilidade marginal da moeda na situação t, isto é, a razão comum (4.8). GINI também considera um terceiro conceito: o *índice da utilidade marginal* ("le nombre-indice de l'utilité économique des marchandises"), definido, exatamente, como um dos usuais índices de preços, sòmente com as utilidades individuais marginais, $u_0^1 \ldots u_0^N$ e $u_1^1 \ldots u_1^N$, inseridas em vez dos preços. Por exemplo: os índices de utilidade marginal de LASPEYRES e SAUERBECK.

$$U_{01}^{La} = \frac{\sum u_1 q_0}{\sum u_0 q_0} \; ; \quad U_{01}^{Sau} = \frac{1}{N} \sum \frac{u_1}{u_0} \, .$$

[46] *Econ. of Welfare,* second edition, 1924, pág. 54.
[47] KEYNES, em *A Treatise on Money,* Vol. I, pág. 111, desenvolve um duplo limite para o índice de preços funcional e diz: "Foi conseguido, por exemplo, pelo Professor PIGOU."
[48] STAEHLE, em *Intern. Comp. of Food Costs,* pág. 75, refere-se ao emprêgo, por PIGOU, da palavra limites e declara que a teoria de PIGOU contém os elementos essenciais da de KONÜS (1924). Isto não se pode asseverar, porque KONÜS considerou, realmente, os limites dos índices de preços definidos pela indiferença.
[49] *Metron,* 1924, pág. 17.
[50] *Metron,* 1924, pág. 141.

Em virtude das equações do equilíbrio sob os preços de trajetória constante, temos

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = P_{01}^{La} \cdot U_{01}^{La} = P_{01}^{Sau} \cdot U_{01}^{Sau} , \tag{5.17}$$

e, semelhantemente, para qualquer número-índice que satisfaça à prova de proporcionalidade.

GINI considera a mensuração de ω_0/ω_1 como um dos objetivos principais da construção[51] do número-índice. Vê-se, em (5.17) que a razão será simplesmente medida pelo índice de preço, *se o nível médio das utilidades marginais é o mesmo nas duas situações*[52]. Mais precisamente: o índice de preço a ser usado para medir ω_0/ω_1 é aquêle cujo análogo expressa a constância do nível da utilidade marginal. A isto podemos chamar *identidade de* GINI.

GINI apresenta, ainda, outro argumento[53], que, na minha opinião, é muito insatisfatório. Também aqui êle usa as três noções definidas acima. Os têrmos são exatamente os mesmos. Mas não têm o mesmo conteúdo lógico, pois, se o tivesse, a proposição seria:

$$\text{se } U_{01}^{La} = 1 \quad \text{e} \quad P_{01}^{La} = \frac{\pi_0}{\omega_1} , \tag{5.18}$$

$$\text{então } P_{01}^{La} < \frac{\omega_0}{\omega_1} < P_{01}^{Pa} ,$$

e isto não faz sentido. A segunda igualdade na premissa resulta da primeira por (5.17) e, se válida, a conclusão (5.18) é falsa.

A maneira mais certa de corrigir êste argumento parece ser, agora, interpretar o "indice de l'utilité économique des marchandises" como "satisfação total", I, e o "pouvoir économique d'achat" como (4.16). Se fizermos isto, invertendo os sinais, a conclusão de GINI torna-se equivalente aos limites desenvolvidos por HABERLER, três anos depois, ou, mais precisamente, ao limite duplo ao qual os limites de HABERLER se reduzem no caso de proporcionalidade de despesa.

Os limites de KONÜS. O primeiro que realmente considerou limites para o índice de preços pela indiferença definida foi KONÜS, o qual expõe explicitamente, as proposições (5.2), (5.4) e as usa para provar duas proposições que nós formulamos, como segue:

(5.19) Se $R_1(q_1) = R_1(q_0)$, (q_1 adaptado a *1*) então $P_{01}^{La} \geqq P_{01}^{Ind}(I_1)$; (Limite superior de KONÜS)

(5.20) Se $R_0(q_0) = R_0(q_1)$, (q_0 adaptado a *0*) então $P_{01}^{Ind}(I_0) \geqq P_{01}^{Pa}$; (Limite inferior de KONÜS)

onde, por brevidade, $I_1 = I(q_1)$, $I_0 = I(q_0)$.

KONÜS prova seus limites para preços de sentido constante, mas a proposição é geralmente verdadeira se adotarmos apenas (5.10) e (5.11). A fim de provar (5.19), seja $\bar{q}_0$ o ponto na trajetória de expansão *0*, que é indiferente a q_1, isto é, $I(\bar{q}_0) = I(q_1)$. Então

$$P_{01}^{Ind}(0_1) = \frac{R_1(q_1)}{R_0(\bar{q}_0)} = P_{01}^{La} \cdot \frac{R_0(q_0) \cdot R_1(q_1)}{R_0(\bar{q}_0) \cdot R_1(q_0)} . \tag{5.21}$$

---

[51] *Metron*, 1924, pág. 22.
[52] Loc. cit., pág. 141.
[53] Loc. cit., pág. 148.
[54] Boletim Econômico. *Conjuncture Institute* de Moscou n.º 9/10, 1924 (russo). Conheço seu trabalho através do relato de BORTKIEWICZ em *Nordisk Statistic Tidsskrift*, Vol. II, págs. 18-20. KONÜS recorre a mais um argumento sôbre a diferença entre os sinais $>$ e $\geqq$ Visto se $\geqq$ o único sinal de interêsse na prática e, também, o mais simples, emprego-o com exclusividade.

Pela premissa e (5.2), $I(q_1) \geqq I(q_0)$; daí $I(\bar{q}_0) \geqq I(q_0)$, conseqüentemente por (4.14), $R_0(\bar{q}_0) \geqq R(q_0)$. Assim, a primeira fração à direita em (5.21) não é maior do que a unidade e a última fração é a unidade, dada (5.19).

Para provar (5.20) temos, apenas, de permutar *0* e *1* e observar que

(5.22) $$P_{01}^{La}\, P_{10}^{Pa} = 1\ ;\ P_{01}^{Ind}(I).\ P_{10}^{Ind}(I) = 1 \quad \text{(para qualquer } I\text{)}.$$

Se temos a proporcionalidade da despesa, os dois limites de KONÜS reduzem-se a um limite duplo para o mesmo número, P_{01}^{Ind}. Mas, como assinala KONÜS, se pode, em geral, tomar isto por base.

Para demonstrar a natureza da aproximação obtida pelos limites de KONÜS, podemos escrevê-los

(5.23) $$\frac{R_1(q_1)}{R_0(q_0)} \geqq P_{01}^{Ind}(I_1), \quad \text{se } R_1(q_1) = R_1(q_0), \text{ sendo } q_1 \text{ adaptado a } 1;$$

(5.24) $$P_{01}^{Ind}(I_0) \geqq \frac{R_1(q_1)}{R_0(q_0)}, \quad \text{se } R_1(q_0) = R_0(q_1), \text{ sendo } q_0 \text{ adaptado a } 0.$$

Noutras palavras: o limite superior e o inferior são o mesmo número, a saber, aquêle que teria dado o índice correto da indiferença definido, se os dois pontos observados *houvessem sido equivalentes*. Sòmente se isto fôr quase cumprido, a aproximação será boa (compare-se a condição do limite duplo, desenvolvida, mais tarde, por KEYNES).

A condição superior de KONÜS exige que o ponto básico fique na superfície do orçamento através do ponto do objeto, enquanto a condição inferior requer que o ponto do objeto fique na superfície do orçamento através do ponto básico. Se ambas as condições forem cumpridas simultâneamente, pode-se dizer que os dois pontos são *mùtuamente orçamentários*. Logo, têm que ser, também equivalentes, isto é, $I(q_0) = I(q_1)$, porque, pelo raciocínio acima, $I(q_1) \geqq I(q_0)$ e $I(q_0) \geqq I(q_1)$. Ainda mais, na superfície de orçamento *0*, através de q_0 nenhum ponto exterior q_0 equivale a q_0, se a adaptação é única, isto é, devemos então ter mesmo $q_1 = q_0$. Na prática, o atendimento simultâneo a ambas as condições de KONÜS é, pois, caso trivial, quando os pontos comparados ficam no mesmo mapa de indiferença.

Os limites de HABERLER. HABERLER desenvolveu dois limites que valem para qualquer par de pontos de equilíbrio, sem outras condições[55]. Formulamos a proposição assim:

(5.25) se q_1, é adaptado a *1*, então, $P_{01}^{Ind}(I_1) \geqq P_{01}^{Pa}$ (Limite inferior de HABERLER).

(5.26) se q_0, é adaptado a *0*, então, $P_{01}^{La} \geqq P_{01}^{Ind}(I_0)$ (Limite superior de HABERLER).

Como antes, consideremos $\bar{q}_0$. Se $\bar{q}_0$ é adaptado a *0* e $I(q_1) = I(\bar{q}_0)$, teremos, graças a (5.7), $R_0(q_1) \geqq R_0(\bar{q}_0)$, que é (5.25). (5.26) fica provado por comutação de *0* e *1*, usando (5.22). Estas provas não supõem preços de trajetória constante.

Se temos proporcionalidade de despesa, os dois limites de HABERLER reduzem-se a um limite duplo. Na sua análise original, HABERLER admitiu essa hipótese e foi criticado por BORTKIEWICZ[56]. HABERLER o admite[57], em princípio, mas pensa que a proporcionalidade da despesa é mais ou menos válida em caso de pequenos deslocamentos no mesmo mapa da indiferença.

A proposição de HABERLER dá um limite superior, justamente naqueles casos, em que a proposição de KONÜS apresenta limite inferior e vice-versa. Bastante

---

[55] *Der Sinn der Indexzahlen*, 1927. A natureza dos limites de KONÜS e HABERLER são, pois, muito diferentes. Não me é possível, portanto, concordar com STAEHLE quando diz (*Intern. Comp. of Food Costs* pág. 77): "A teoria de HABERLER já havia sido desenvolvida por KONÜS".
[56] *Magazin der Wirtschaft*, Berlin, 1928, pág. 427.
[57] *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1929, II pág. 6.

curioso é que isto não foi percebido por BORTKIEWICZ. Foi STAEHLE o primeiro a utilizá-lo (veja-se abaixo).

Limite duplo de KEYNES. KEYNES[58] provou a proposição que formulamos como segue:

Se q_0 é adaptado a *0*, q_1 adaptado a *1*, $I(q_0) = I(q_1)$, então

$$P_{01}^{La} \geqq P_{01}^{Ind}(I) \geqq P_{01}^{Pa} \text{ onde } I = I(q_0) = I(_1). \tag{5.27}$$

Isto resulta diretamente de (5.25) e (5.26), porque $I_0 = I_1$. A prova de KEYNES é mais complicada, porém correta. Implica monotonicidade ao longo de uma *linha* (onde tôdas as quantidades individuais mudam proporcionalmente) em vez de (4.14). Na região de substituição (onde a direção preferencial possui todos os componentes positivos) a monotonicidade da faixa é válida.

Mais tarde BORTKIEWICZ[59] e ALLEN[60] provaram (5.27). Nenhum dêstes três autores percebeu o caráter perfeitamente comum de (5.27). Se sabemos que q_0 e q_1 são adaptados *e equivalentes*, o índice definido pela indiferenca pode ser exatamente calculado, quer dizer, como a razão $R_1(q_1)/R_0(q_0)$. Nestas circunstâncias, derivar *limites* para êle, é "brincar de esconder". Foi STAEHLE quem, primeiro, indicou isto[61].

O método da isodespesa de STAEHLE. Aplicando, ao mesmo tempo, os limites de HABERLER e KONÜS, STAEHLE[62] desenvolveu um método que, em forma simplificada e algo mais sistematizada, pode ser descrito assim: suponhamos sejam dadas duas situações de preço, *0* e *1*, e as trajetórias de expansão correspondentes (dados completos de ENGEL para *0* e *1*). O gráfico 4 representa a situação para $N = 2$ e os preços da trajetória constante. Comecemos num ponto q_0 na trajetória da expansão *0* (no gráfico, marcado, por brevidade, com *0*, em vez de q_0). Construamos a superfície do orçamento *0* através dêsse ponto; ela cruza a trajetória da expansão *1* num ponto q_1 (no gráfico, por brevidade, marcado como *1*). Através dêste ponto, tiramos a superfície do orçamento *1*; ela corta a trajetória *0* num ponto q_0'. Através dêste, tiramos a superfície do orçamento *1*; ela cruza a trajetória *1* em q_1', e assim por diante. Em duas dimensões, obtemos a linha ziguezague do gráfico 4. As linhas pontilhadas são linhas de indiferença.

Sejam R_0, R_0' ... e R_1, R_1' ... as despesas monetárias nos vários pontos nas duas trajetórias de expansão; $I_0, I_0' \ldots I_1, I_1'$ ... os níveis de indiferença através dêstes pontos. Empregando alternadamente os limites de KONÜS e HABERLER, obtém-se

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{R_1}{R_0'} = P_{01}^{Ind}(I_1) = \dfrac{R_1}{R_0} & \qquad & R_0(q_1) = R_0(q_0) \\[2ex]
\dfrac{R_1}{R_0'} = P_{01}^{Ind}(I_0') = \dfrac{R_1'}{R_0'} & & R_1(q_0') = R_1(q_1) \\[2ex]
\dfrac{R_1'}{R_0''} = P_{01}^{Ind}(I_1') = \dfrac{R_1'}{R_0'} & & R_0(q_1') = R_0(q_0') \\[2ex]
\dfrac{R_1'}{R_0''} = P_{01}^{Ind}(I_0'') = \dfrac{R_1''}{R_0''} & & R_1(q_0') = R_1(q_1') \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{5.28}$$

[58] *A Treatise on Money*, I, págs. 110-111.
[59] *Nordisk Statistisk Tidsskrift*, Bd. 11, pág. 21.
[60] *Economica, May*, 1933, pág. 204.
[61] *The Review of Economic Studies*, 1935. BORTKIEWICZ de fato afirmou que a condição I (q_0) = I (q_1) não pode, via de regra, ser observada (*Nordisk Statistisk Tidsskrift*, Vol. II, pág. 22). Não percebeu, porém, o ponto principal, a saber, que, mesmo se fôsse possível observá-la, seria inútil.
[62] *The Review of Economic Studies*, 1935.

Isto é o método da isodespesa. Deduz-se, de uma observação ao pé da exposição dos limites de KONÜS, que aquêle método dá boa aproximação, apenas, quando as duas trajetórias de expansão estão bastante próximas uma da outra. A comparação entre duas trajetórias será mais exata, se feita através de uma trajetória intermediária. Quanto mais próximas as trajetórias individuais, melhor. Conhecer um sistema muito fechado de trajetórias é equivalente a conhecer as próprias superfícies de indiferença. Neste último caso, o índice de indiferença pode ser exatamente calculado.

6. A TEORIA DAS APROXIMAÇÕES

Vamo-nos, agora, à questão de como uma aproximação ao índice definido pela indiferença pode ser obtida por algum método, não essencialmente ligado ao estudo dos limites superiores e inferiores.

A aproximação de BOWLEY. Num ponto importante, êsse método precisa de correção. O argumento corrigido desenvolve-se como segue: sejam dados p_0, q_0, p_1 q_1 e preços de trajetória constante. Seja $\bar{q}_1$ o ponto na trajetória de expansão *1*, equivalente a q_0, ou, $I(\bar{q}_1) = I(q_0)$. O índice definido pela indiferença é, então

$$(6.1) \qquad P_{01}^{Ind}(I_0) = \frac{R_1(\bar{q}_1)}{R_0(q_0)}, \text{ onde } I_0 = I(q_0).$$

O problema consiste em determinar aproximadamente o $\bar{q}_1$, equivalente a q_0. Valendo-nos dos têrmos de segunda ordem da expansão de TAYLOR, chegamos a

$$(6.2) \qquad I(q_1) - I(q_0) = \Sigma_h I_0^h (q_1^h - q_0^h) + \frac{1}{2} \Sigma_{hk} I_0^{hk} (q_1^h - q_0^h)(q_1^k - q_0^k),$$

$$(6.3) \qquad I_1^h - I_0^h = \Sigma_k I_0^{hk} (q_1^k - q_0^k),$$

onde $I_t^h = I^h(q_t), I_t^{hk} = I^{hk}(q_t)$. Inserindo (6.3) em (6.2) e observando que sob preços de trajetória constante $I_t^h = \omega_t p_t^h$, onde ω_t — nominal utilidade marginal monetária — é independente de h, obtém-se

$$(6.4) \qquad I(q_1) - I(q_0) = \frac{1}{2} \Sigma (\omega_1 p_1 + \omega_0 p_0)(q_1 - q_0);$$

semelhantemente,

$$(6.5) \qquad I(\bar{q}_1) - I(q_1) = \frac{1}{2} \Sigma (\bar{\omega}_1 p_1 + \omega_1 p_1)(\bar{q}_1 - q_1) = \frac{\bar{\omega}_1 + \omega_1}{2} \Sigma p_1 (\bar{q}_1 - q_1),$$

sendo $\bar{\omega}_1$ a utilidade nominal do dinheiro em $\bar{q}_1$. Essas duas equações, *juntas* com $I(\bar{q}_1) = I(q_0)$, determinam $\Sigma p_1 \bar{q}_1$. Isto dá a aproximação seguinte:

$$P_{01}^{Quad}(I_0) = \frac{\Sigma p_1 (\omega_1 q_0 + \omega_1 q_1) + \omega_0 \Sigma p_0 (q_0 - q_1)}{(\omega_1 + \bar{\omega}_1) \Sigma p_0 q_0}.$$

Reagrupando os têrmos, pode-se escrever:

$$(6.6) \qquad P_{01}^{Quad}(I_0) = P_{01}^{Bow} + \left(P_{01}^{Quad}(I_0) - \frac{\omega_0}{\bar{\omega}_1}\right) \cdot \frac{\bar{\omega}_1 \Sigma p_0 (q_1 - q_0)}{\Sigma p_0 (\omega_1 q_0 + \bar{\omega}_1 q_1)},$$

onde

$$(6.7) \qquad P_{01}^{Bow} = \frac{\Sigma p_1 (q_0 + \lambda q_1)}{p_0 (q_0 + \lambda q_1)}; \text{ sendo } \lambda = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1}.$$

O parêntese à direita em (6.6) estará perto de *0*, porque, passando de q_0 à posição *equivalente* $\bar{q}_1$, "a utilidade do último dólar" mudará inversamente como o nível de preço. BOWLEY acentua isto, para a expressão (6.6), mas há, de fato, muitos outros caminhos para arranjar os têrmos a fim de obter um resto sôbre o qual algo semelhante possa ser dito.

A média ponderada de q_0 e q_1 em (6.7) não deve ser substituída pela média simples, como em (2.5). Isto introduzirá tendenciosidade sistemática. Por exemplo: se os q_1 são, em média, muito maiores do que os q_0 correspondentes, êles hão de ser ponderados, porque assim se tornam *ainda mais importantes* (porque $\bar{\omega}_1/\omega_1$ é, agora, maior do que a unidade). Através de (2.5), sua importância seria atenuada. BOWLEY chega à fórmula tendenciosa (2.5), porque desenvolve (6.5) sòmente até à primeira aproximação, enquanto usa a (6.4) até a segunda aproximação.

Se os dois pontos q_0 e q_1 são de fato equivalentes, (6.7) geralmente *não* dá o valor correto, $\Sigma p_1 q_1/\Sigma p_0 q_0$. Isto constitui um obstáculo. Ademais, (6.7) não assinala o *ponto* na trajetória da expansão, à qual o índice se refere.

O método de despesa dupla. A expansão quadrática pode ser utilizada de outra maneira, que, parece, é mais interessante. Sejam *0* e *1* duas trajetórias de expansão dadas, sendo constantes os preços. Consideremos um ponto q_0 sôbre *0* e q_1 sôbre *1*. A condição de equivalência é, segundo (6.4),

$$(\omega_1 \, p_1 - \bar{\omega}_0 \, p_0) + (\omega_0 \sum p_0 \, q_1 - \omega_1 \sum p_1 \, q_0) = 0 \,, \tag{6.8}$$

sendo $\varrho_0 = \Sigma p_0 q_0$ e $\varrho_1 = \Sigma p_1 q_1$ as despesas, em dinheiro, ao longo das duas trajetórias. Num ponto de equivalência, temos aproximadamente[63] $\omega_1 \varrho_1 = \omega_0 \varrho_0$. A condição de equivalência pode, portanto, ser escrita:

$$\sum p_1 \, q_1 \cdot \sum p_0 \, q_1 = \sum p_0 \, q_0 \cdot \sum p_1 \, q_0 \,. \tag{6.9}$$

Ao primeiro membro de (6.9), a saber,

$$D_{01} = \sum p_1 \, q_1 \cdot \sum p_0 \, q_1 \,, \tag{6.10}$$

chamaremos *despesa dupla* ao longo de *1* (tendo *0* por base). É um número observável, que pode ser calculado em qualquer ponto ao longo de *0*. Semelhantemente D_{10}, ao longo de *0*. A igualdade entre D_{01} e D_{10} indica a indiferença. A raiz quadrada de D_{01},

$$C_{01} = \sqrt{\sum p_1 \, q_1 \cdot \sum p_0 \, q_1} \,, \tag{6.11}$$

pode ser chamada *despesa cruzada* ao longo de *1*; é a média geométrica da despesa atual ao longo do trajeto *1* e a despesa que se adaptaria aqui com os preços *0*. *C* ilustra a natureza do princípio de equivalência (6.9), mas para calculação prática, *D* será, provàvelmente, mais conveniente.

Equacionar a despesa dupla ao longo das duas trajetórias, como fizemos em (6.9), é o mesmo que definir a equivalência por qualquer das duas condições,

$$Q_{01}^{La} = Q_{10}^{La} \text{ e } Q_{01}^{Pa} = Q_{10}^{Pa} \,, \tag{6.12}$$

sendo os *Q*, índices de *quantidade* de LASPEYRES e PAASCHE. Se tentarmos definir a equivalência, pondo um índice de quantidade igual a *1*, enfrentamos não pequenas dificuldades, porque os usuais índices de quantidade não satisfazem à prova de inversão e, também, porque os índices de LASPEYRES e PAASCHE não conduzem ao mesmo resultado[64]. (6.14) representa uma maneira interessante de evitar estas dificuldades.

---

[63] Sob o regime de proporcionalidade das despesas, essa equação é válida segundo (7.13).
[64] Ver, por exemplo, STAEHLE, *Intern. Comp. of Food Costs*, pág. 5.

A natureza do método da despesa dupla é também ilustrada pelo fato de que, em caso especial, se reduz à fórmula "ideal" (2.4). Com efeito: sejam q_0 e q_1 dois pontos fixos (que não se movem ao longo das trajetórias). Suponhamos que estas são linhas retas através da origem. As coordenadas do ponto sôbre *0* e *1*, são, pois, $\lambda_0 q_0^h$ e $\lambda_1 q_1^h$, sendo os parâmetros variáveis λ, independentes de h. Os valores de λ que tornam iguais as despesas duplas são

$$\lambda_1 / \lambda_0 = \sqrt{\Sigma\, p_0 q_0 \cdot \Sigma\, p_1 q_0 / \Sigma\, p_1 q_1 \cdot \Sigma\, p_0 q_1} \tag{6.13}$$

e a razão correspondente entre as despesas locais é $\lambda_1 \Sigma p_1 q_1 / \lambda_0 \Sigma p_0 q_0$, isto é, (2.4). Incidentemente, isto representa um modo de deduzir (2.4); mostra que a fórmula "ideal" está relacionada ao feixe das trajetórias de expansão.

Na prática, as curvas de ENGEL são sòmente conhecidas em pontos discretos. A interpolação tem que ser usada, portanto, para determinar os pontos de equivalência. Ademais disso, dados estarão disponíveis para um número limitado de mercadorias representativas. Estas são as mesmas dificuldades práticas que se encontram em tôdas as obras sôbre os números-índice.

O Método da dissimilaridade, de STAEHLE. Seja q um complexo arbitrário e q_0 um complexo adaptado a *0*. Se as quantidades individuais em q são quase proporcionais àquelas em q_0, STAEHLE [65] diz que os complexos são *similares*. Nesse caso, todos os desvios

$$\frac{q}{q_0} - \frac{\Sigma\, p_0 q_0 \left(\frac{q}{q_0}\right)}{\Sigma\, p_0 q_0} \tag{6.14}$$

são pequenos. O último têrmo em (6.14) é a média ponderada das razões q/q_0. Medido a partir da própria média, o desvio é

$$\frac{q}{q_0} \cdot \frac{\Sigma\, p_0 q_0}{\Sigma\, p_0 q} - 1\ . \tag{6.15}$$

A média dos valores absolutos dêstes desvios, usando novamente os valores *0* como pesos, é a medida de dissimilaridade de STAEHLE (tendo *0* por base),

$$V = \frac{\Sigma\, p_0 q_0 \cdot \left| \frac{q}{q_0} \cdot \frac{\Sigma\, p_0 q_0}{\Sigma\, p_0 q} - 1 \right|}{\Sigma\, p_0 q_0} = \Sigma \left| \frac{p_0 q}{\Sigma\, p_0 q} - \frac{p_0 q_0}{\Sigma\, p_0 q_0} \right|. \tag{6.16}$$

Òbviamente $D \geqq 0$. Ademais, $D \leqq 2$, porque, se x e y são quaisquer variáveis, $\Sigma|x - y| \leqq \Sigma|x| + \Sigma|y|$. Portanto, $D \leqq 1 + 1$. Como os p e q são duas não-negativas $D = 2$, quando, e sòmente quando, nenhuma das mercadorias q se encontra em q_0.

Seja q_0 um ponto fixado na trajetória da expansão *0*, e q outro ponto nesta trajetória. Se partirmos de $q = q_0$, òbviamente $D = 0$. Como q se movimenta para fora e para dentro, STAEHLE acha, empìricamente, que D aumenta pràticamente de maneira monotônica. Assim, ao longo da trajetória *0* o mínimo de D indica o ponto que é "equivalente a q_0". Também, quando q varia ao longo de *outra trajetória*, digamos *1* (enquanto q_0 está ainda fixado em *0*), STAEHLE acha, empìricamente, que D tem um mínimo mais ou menos definido. A única diferença é que, agora, o mínimo não será *0*, mas, geralmente, uma quantidade positiva. Incidentemente, isto pode ser interpretado como uma dissimilaridade irreduzível, criada pela diferença entre a situação de preço *0* e *1*. Em todo caso, êle toma o ponto $\bar{q}_1$, onde se encontra o mínimo, como equivalente a q_0. O índice de preços, neste nível de indiferença, será, conseqüentemente, $\Sigma p_1 \bar{q}_1 / \Sigma p_0 q_0$. Isto pode ser feito para qualquer ponto q_0 na trajetória *0*, estabelecendo, assim, uma relação correspondente um a um entre os pontos nas trajetórias *0* e *1*.

[65] *Archiv für Sozialwissenschaft*, June, 1932, e *Econometrica*, 1934, pág. 64.

Gràficamente, D pode ser representado por uma superfície sôbre o plano $(\rho_0\rho_1)$. O *vale de dissimilaridade* marca a combinação equivalente de ρ_0 e ρ_1. Na prática, o vale, naturalmente, não será definido com exatidão matemática, mas, todavia, com suficiente exatidão para dar uma idéia de rendas que são equivalentes[66].

7. O MÉTODO DA FLEXIBILIDADE[67]

Sejam I e J dois indicadores, isto é, $I = F(J)$, sendo F monotônicamente crescente. Daqui, dI/dJ, $(d \log I)/(d \log J)$, $(d \log (dI/dJ))/(d \log J)$, etc. são funções de indiferença. São, até, indicadores, se mudam monotônicamente com I (ou J). Pode ser difícil observar I ou J diretamente como funções de q sôbre o espaço inteiro, mas, de quando em quando, uma das funções derivadas pode ser acessível à mensuração, fornecendo, dessarte, um critério observável para a equivalência de despesa, mesmo entre pontos remotos. Esta, a base do método de flexibilidade, que sugeri há três anos[68]. O método pode ser formulado em têrmos mais gerais do que os que empreguei originàriamente, então encontrando certas objeções[69].

Definição da despesa real. Seja $r_0(I)$ uma função — para o instante convencionalmente escolhido — que expressa a despesa real ao longo da trajetória *0* tomada por base, como, por exemplo

(7.1) $r_0(0) = \rho_0(I) =$ despesa em dinheiro ao longo da trajetória de base. A despesa real, r, em qualquer ponto, q, pode então ser definida como

$$r = r_0(I), \qquad \text{onde } I = I(q). \tag{7.2}$$

Êste r será uma função de indiferença, mesmo um indicador se $r_0(I)$ é monotônicamente crescente. Seja $\bar{r}$ o conceito obtido, usando *1* como base; $r_1(I)$, a função convencional ao longo de *1*. Então

$$\frac{\bar{r}}{r} = \frac{r_1(I)}{r_0(I)}. \tag{7.3}$$

Se fôr possível formular a convenção de modo que (7.3) se torne independente de I, e ainda r, respectivamente $\bar{r}$, uma expressão plausível para a despesa real, essa convenção especial deve ser adotada.

No caso de proporcionalidade de renda, isto conduz a (7.1). De outro modo (7.1) é mais ou menos arbitrário. Qualquer que seja a convenção, r é uma função de indiferença.

O problema também pode ser interpretado como de *deflação*: É possível descobrir um número que, dividido por qualquer ρ_t, dê o r correspondente? No caso da proporcionalidade de despesa, P_{0t}^{Ind} é um número dessa espécie, mas não no caso geral. De fato, o emprêgo de P_{0t}^{Ind}, aqui, significaria que na trajetória *0*, escolhida convencionalmente por postulado, o "nível de preço do rico" é igual ao "nível de preço do pobre", enquanto em qualquer outra trajetória não tem que o ser (P_{0t}^{Ind} é sempre independente de I, mas P_{0t}^{Ind} não o é). Para tratar o caso geral adequadamente, temos de introduzir também o fator da deflação, $P_0(I)$ para confrontos ao longo da própria trajetória de base. Então, temos em *0*

$$r_0(I) = \frac{\rho_0(I)}{P_0(I)}. \tag{7.4}$$

---

[66] Ver *Econometrica*, 1934, págs. 67 e 68.

[67] Apresento meus agradecimentos ao Sr. TJALLING KOOPMANS, de Amsterdam, temporàriamente em Oslo, por ter lido o manuscrito da Secção 7 e sugerido vários melhoramentos.

[68] *New Methods of Measuring Marginal Utility*, Tübingen, 1932, Secção 9.

[69] Em particular, os de Allen, *Economica*, Maio 1933.

Assim, $r_0(I)$ e $p_0(I)$ são apenas dois modos de exprimir a convenção da despesa real. Quase sempre, usaremos $P_0(I)$. (7.1) significa que $P_0(I) \equiv 1$.

O fator de deflação em qualquer outra trajetória t, será

$$P_t(I) = P_0(I) \cdot P_{0t}^{Ind}(I) . \tag{7.5}$$

Deflacionando ρ_t por P_t, obteremos o mesmo r que se o fizéssemos através de (7.2). Esta razão — a despesa real — é, portanto, uma função de indiferença.

$$r(I) = \frac{\rho_0(I)}{P_0(I)} = \frac{\rho_1(I)}{P_1(I)} = \ldots = \frac{\rho_t(I)}{P_t(I)} = \ldots \tag{7.6}$$

Desde que I é uma função de r, ρ_t e P_t são também. Aplicando êsse critério, obtemos, mercê de uma diferenciação logarìtmica (7.6),

$$\frac{d \log \rho_t}{d \log r} = 1 + \frac{d \log P_t}{d \log r} = \frac{1}{1 - \dfrac{d \log P_t}{d \log \rho_t}} . \tag{7.7}$$

A derivada

$$\frac{d\rho_t}{dr} = P_t \left(1 + \frac{d \log P_t}{d \log r} \right) \tag{7.8}$$

pode ser chamada a trajetória do dispêndio marginal; é análoga a (4.10) e expressa o custo, em dinheiro, da aquisição de uma unidade adicional de despesa real.

Fazendo, por brevidade,

$$\check{P}_t = \frac{d \log P_t}{d \log \rho_t} \tag{7.9}$$

temos

$$\frac{d \log \rho_1}{d \log \rho_0} = \frac{1 - \check{P}_0}{1 - \check{P}_1} \quad \text{(se } \rho_1 \text{ é equivalente a } \rho_0\text{)}. \tag{7.10}$$

Isto se deduz de (7.7), porque $P_{0t}^{Ind} = \rho_1/\rho_0$ (se ρ_1 equivale a ρ_0).

Utilidade e flexibilidade do dinheiro. Seja q qualquer ponto e dq um pequeno deslocamento na direção $(dq^1 \ldots dq^N)$. Geralmente, a razão $dI/d\rho_t$ dependerá do sentido. Mas, se q é um ponto adaptado a t, não dependerá dela; é, então, simples utilidade *nominal* do dinheiro, ω_t (a razão comum (4.8)), isto é,

(7.11) $\omega_t = \dfrac{dI}{d\rho_t}$ (sendo d tomado em qualquer direção, partindo de um ponto adaptado a t). Realmente $d\rho_t = \Sigma_h(\partial\rho_1/\partial q^h)dq^h$, o que, por (4.8), é $\omega_t \Sigma I^h dq^h = \omega_t dI$.

Em analogia com (7.11), consideraremos a utilidade real de dinheiro,

$$w = \frac{dI}{dr} = w(r) . \tag{7.12}$$

É uma função de indiferença. Segundo (7.8),

$$\omega_t = \frac{w(r)}{\dfrac{d\rho_t}{dr}} = \frac{w(r)}{P_t \left(1 + \dfrac{d \log P_t}{d \log r} \right)} . \tag{7.13}$$

Isto mostra que, além das "utilidades marginais" ponderadas das mercadorias individuais (4.8), podemos considerar outra — no equilíbrio igual ao resto — quer dizer, a utilidade ponderada da despesa real. É completamente análoga àquela das mercadorias individuais. Compare-se o denominador no segundo membro em (7.13) com (4.10)[70]. A analogia, porém, apenas aparece quando consideramos o caso geral dos preços individuais de trajetória não-constante. Na prática, os preços individuais são, em regra, de trajetória constante, mas P_t não o é. Isto pode enganar-nos por analogia falsa ao definir a utilidade real do dinheiro, w, por

$$(7.14) \qquad \omega_t = \frac{w(r)}{P_t}, \text{ o que se reduz a } \omega_t = \frac{w(r)}{P_{0t}} \text{ quando } P_0 \equiv 1.$$

Se fizermos isto, w geralmente *não* será uma função de indiferença. A técnica estatística, então, será embaraçosa e deselegante (se não tivermos proporcionalidade de despesa).

Consideremos, além disso, a flexibilidade do dinheiro,

$$(7.15) \qquad \check{W} = (\check{w}r) = \frac{d \log w(r)}{d \log r}.$$

É uma função de indiferença, porque w e r o são[71]. Empìricamente, ela aparece mudando monotônicamente com r, de modo a ser até um indicador. Daí, a equivalência da despesa pode ser medida pela igualdade da flexibilidade do dinheiro.

$\check{w}$ pode ser expresso em têrmos de dados t; temos, apenas, de exprimir $d\rho_t/dr$ em (7.13) segundo $\check{P}_t$ e tomar a derivada logarítmica. Isto dá

$$(7.16) \qquad \check{W} = \frac{\check{\omega}_t \check{P}_t}{1 - \check{P}_t} \; \frac{\dfrac{d\check{P}t}{d \log \rho_t}}{(1 - \check{P}_t)^2} \quad (d \text{ tomado ao longo da trajetória } t),$$

onde

$$(7.17) \qquad \check{\omega}_t = \frac{d \log \omega_t}{d \log \rho_t} \quad (d \text{ tomado ao longo da trajetória } t).$$

(7.16) mostra que a flexibilidade do dinheiro $\check{w}$, tomada com respeito à despesa real, é, geralmente, não a mesma que a flexibilidade nominal, $\check{\omega}_t$, tomada ao longo da trajetória t. Mesmo se os preços individuais são de trajetória constante, P_t pode não ser e, por conseguinte, conforme (7.16), $\check{w}$ e $\check{\omega}_t$ são diferentes[72]. $\check{\omega}_t$ é independente da função convencional P_0, mas $\check{w}$ não o é.

A coleção de referência independente. A fim de desenvolver um método de mensurar w, efetivamente, dividamos em duas a coleção completa de N mercadorias, sintèticamente chamadas, "não-alimento" (mercadorias N.º 1, 2, ..., n) e "alimento" (Ns. $n + 1, \ldots, N$). Notamos as quantidades da última assim: $x^1, x^2, \ldots, x^m$ $(m = N - n)$.

Supondo que o indicador pode ser transformado em

$$(7.18) \qquad I(q^1 \ldots q^N) = V(q^1 \ldots q^n) + U(x^1 \ldots x^m),$$

V e U dependem, sòmente, das variáveis indicadas. Digo, então, que $x^1 \ldots x^m$ é uma coleção de referência independente. Se tal transformação existir, ela é unìvocamente determinada à parte de uma transformação arbi-

---

[70] (7.13) — derivado, aqui, como conseqüência teórica — atenderá, plenamente, à objeção levantada por ALLEN, *loc. cit.*, em meio da pág. 193. Indica (7.13) que minha fórmula é, de fato, válida sob o regime de proporcionalidade das despesas, segundo se presumiu em ***New Methods...***

[71] Não posso concordar com ALLEN, que caracteriza isto como "condição impossível". *(Economica,* Maio 1933, pág. 208). Pelo contrário, julgo muito plausível que w seja função de indiferença. A análise acima indica até que isto não é condição mas, antes, uma conseqüência teórica que, geralmente, resulta quando se adota o sistema apropriado de definições.

[72] ALLEN, *loc. cit.*, pág. 207, parece argumentar como se w e ω_t fôssem idênticos: "Uma segunda derivada... sendo os preços constantes..."

trária *linear* (monotônicamente crescente[73]). Com efeito, se $F(V+U) = \overline{V} + \overline{U}$ sendo $\overline{V}$ independente de $x' \ldots x^m$ e U, de $q' \ldots q^n$, conseqüentemente $F'(U+V) = (\partial\bar{U}/\partial x^h)/(\partial U/x^h)$ deve ser independente de $q^1 \ldots q^n$, o que — quando V verdadeiramente depende de $q^1 \ldots q^n$ — implica $F' =$ constante. O argumento é aplicável mesmo se qualquer uma das subcoleções consistir de uma mercadoria só.

Suponhamos que as funções de preços de fornecimento para a coleção alimento são independentes. Seja $H_t^h(x^1 \ldots x^m)$ o preço da mercadoria N.º h, que prevalece em t quando $x^1 \ldots x^m$ são tomados. A adaptação dentro da coleção alimento fica então — quando a despesa total do alimento ξ_t é dada — completamente determinada, isto é, independente dos outros dados. Podemos, portanto, definir a quantidade de alimento, x, utilidade marginal de alimento, $u(x)$, e o preço total de alimento, H_t, justamente como definimos r, $w(r)$ e P_t. H_t será uma função de x. Semelhantemente, P_t é uma função de r. Isto conduz a[74]

$$(7.19)\qquad \frac{w(r)}{P_t(r)\left(1+\dfrac{d\log P_t(r)}{d\log r}\right)} = \frac{u(x)}{H_t(x)\left(1+\dfrac{d\log H_t(x)}{d\log x}\right)},$$

que é análoga à equação do equilíbrio para duas mercadorias individuais. Segundo (7.19), x torna-se — sob t dado — uma função $x = E_t(r)$.

Portanto,

$$(7.20)\qquad w(r) = \alpha_t(r) \,.\, u(x)$$

onde α_t é uma função de r,

$$(7.21)\qquad \alpha_t(r) = \frac{P_t(r)\left(1+\dfrac{d\log P_t(r)}{d\log r}\right)}{H_t(x)\left(1+\dfrac{d\log H_t(x)}{d\log x}\right)} = \frac{P_t(r)}{1-\check{P}_t(r)} \cdot \frac{1-\check{H}_t(x)}{H_t(x)}$$

$$x = E_t(r)\,,$$

sendo $\check{H}_t$ — em analogia com $\check{P}_t$ — a derivada logarítmica de H_t com respeito a ξ_t. Se os índices de preços relativos P_{0t}, e H_{0t} são determinados por algum método de aproximação, por exemplo o método iso-despesa de STAEHLE, ou pelo meu método de despesa dupla, e uma das funções P, por exemplo $P_0(t)$ e uma das funções H, por exemplo $H_0(t)$, são escolhidas convencionalmente, r e x são conhecidos, $E_t(r)$ é, portanto, uma função observável de ENGEL, e, em conseqüência, $\alpha_t(r)$ uma função observável para cada t.

Para as rendas reais, r_0 e r_1 em 0 e 1, tal que $x_0 = x_1$, obtemos, segundo (7.20):

$$(7.22)\qquad \frac{\log w(r_0) - \log w(r_1)}{\log r_0 - \log r_1} = \frac{\log \alpha_0(r_0) - \log \alpha_1(r_1)}{\log r_0 - \log r_1} \quad (se\ x_0 = x_1)\,.$$

A fórmula (7.22) dá uma medida de flexibilidade média w sôbre a extensão $(r_0 r_1)$. Se r_0 e r_1 estão suficientemente próximos, temos, mais ou menos, um ponto de medição de w. Isto é uma generalização do método isoquantitativo ao caso, onde a proporcionalidade de despesa não é suposta[76].

O segundo membro de (7.22) é independente da função convencional $H_0(x)$, pois os têrmos H no numerador de (7.22) são

$$7.23\qquad \log\frac{1-\check{H}_0}{H_0} - \log\frac{1-\check{H}_1}{H_1} = \log\frac{1-\check{H}_0}{1-\check{H}_1} + \log H_{01}\,.$$

Por (7.10), cujo análogo vale para H, porque ξ_1 é equivalente a ξ_0, (7.23) reduz-se a $\log\,(\xi_1/\xi_0 + d\,\log\,\xi_1/d\,\log\xi_0)$, o que é independente de qualquer função arbitrária H. Redução similar não tem lugar com os têrmos P.

---

[73] PARETO trata tanto esta como as demais questões sôbre topografia do campo de seleção, de forma muito pouco satisfatória.
[74] P_t denota, em (7.19), depender de r, e, em (7.5), de I. Isto não causará confusão.
[75] *New Methods*, pág. 35.
[76] Breve será publicado um estudo mais pormenorizado, contendo gráficos, etc..

Comparações distantes. A flexibilidade w, assim medida, pode servir para fazer comparações distantes de preços. Consideremos quatro trajetórias *0* e *1* muito juntos, *2* e *3* também juntos, mas afastados do primeiro par. O índice do preço relativo P_{01} pode ser construído por um dos métodos de aproximação acima citados. É uma função, digamos, de $\rho_0 P_{01}(\rho_0)$. Similarmente, $H_{01}(\xi_0)$, $P_{23}(\rho_2)$ e $H_{23}(\xi_2)$. Mas os métodos de aproximação não dão índice algum P_{02}.

Consideremos as flexibilidades da trajetória ao longo de *0* e *2*. Acham-se ligadas pela relação

$$(7.24) \qquad 1 + \check{\omega}_0 = \frac{1 + \check{\omega}_2}{1 - \check{P}_{02}} \; \frac{\dfrac{d \log \check{P}_{02}}{d \log \rho_2}}{(1 - \check{P}_{02})^2} \quad \text{(para pontos equivalentes em } 0 \text{ e } 2).$$

Com efeito, seja $\check{w}_0$ a flexibilidade real do dinheiro obtida fazendo $P_0 =$ constante. É uma função de indiferença. Ao longo da trajetória *0* é, conforme (7.16), igual a $\check{\omega}_0$. Ao longo de *2* seu valor é obtido inserindo em (7.16) $P_2 = P_0 P_{02}$, onde $P_0 =$ constante. Pondo em equação as duas expressões para ω_0, obtemos (7.24).

Em (7.24) $\check{w}_0$ e $\check{\omega}_2$ são observáveis. Realmente, $\check{\omega}_0$ é igual a $\check{w}_0$, o que — visto P_{01} e H_{01} serem conhecidos — pode ser calculado por (7.22), usando os dados ao longo de *0* e *1*. Os valores de $\check{w}_0$ assim obtidos são por (7.23) independentes da função arbitrária H_0. (A função arbitrária P_0 é suposta constante.) Similarmente, $\check{\omega}_2$ é igual à medida de flexibilidade $\check{w}_2$ obtida quando se faz $P_0 =$ constante e usando (7.22) nos dados ao longo de *2* e *3*. (Êste P_2 é, geralmente, diferente daquele que corresponde ao $P_0 =$ constante.) Os valores de w_2 assim obtidos são independentes da função arbitrária H_2.

P_{02} em (7.24) não é conhecido, mas o será, logo que a equivalência entre os pontos em *0* e *2* seja determinada. E isto, por sua vez, resulta do fato de que a equação é satisfeita. Conseqüentemente, deveria ser possível determinar a equivalência por um processo de iteração.

Se houver proporcionalidade de despesa entre *0* e *2*, (7.24) dá

$$(7.25) \qquad \check{\omega}_0 = \check{\omega}_2 \; .$$

O ponto de correspondência entre *0* e *2*, definido por (7.25), parece, pois, uma primeira aproximação plausível. Seja $P_{02}^{(1)}$ o índice para a qual conduz. Inserindo isto no segundo membro de (7.24), obtemos

$$(7.26) \qquad \Omega_{02}^{(1)} = \frac{1 + \check{\omega}_2}{1 - \check{P}_{02}^{(1)}} + \frac{\dfrac{d \log \check{P}_{02}^{(1)}}{d \log \rho_2}}{\left(1 - \check{P}_{02}^{(1)}\right)^2} \, ,$$

que pode ser calculado em qualquer ponto ao longo de 2. A seguir, consideremos o ponto de correspondência definido por

$$(7.27) \qquad 1 + \check{\omega}_0 = \Omega_{02}^{(1)} \; .$$

Leva-nos a um índice $P_{02}^{(2)}$ que, inserido no segundo membro de (7.24), dá uma função $\Omega_{02}^{(2)}$ novamente comparável a $1 + \check{\omega}_0$, etc.. Se o processo converge, obtemos o índice de indiferença entre *0* e *2*.

Como a única coisa comparada entre *0* e *2* é a magnitude de uma flexibilidade, que é um número puro, o método pode ser formalmente aplicado, mesmo se os dois pares não incidirem no mesmo mapa. Êles podem representar populações inteiramente diferentes, com mercadorias completamente diferentes etc.. Mas, naturalmente (7.24) terá então um valor apenas mais ou menos heurístico. O fato de conduzir a um índice correto de indiferença, se os dois pares incidirem, de fato, no mesmo mapa, é, porém, um ponto forte a seu favor.