PROGRAMME CONVEXE ET PLANIFICATION POUR LE DÉVELOPPEMENT NATIONAL

Communication de

M. Ragnar FRISCH

1. INTRODUCTION. MÉTHODE CONVEXE POUR L'ÉTABLISSEMENT DES PROGRAMMES DANS LA PLANIFICATION ÉCONOMIQUE NATIONALE

Je suis convaincu que la technique d'établissement d'un programme linéaire, ou plus généralement la technique de ce qui peut être appelé l'établissement d'un programme convexe, est destinée à jouer un rôle extrêmement important en matière de planification économique nationale au cours des années à venir. Un pays qui a adopté cette technique se trouvera, je pense, dans une position incomparablement meilleure pour poursuivre sa politique économique sur des bases saines et trouver la combinaison optimum des alternatives concernant cette politique. Trouver cette combinaison optimum signifie, d'abord, concentrer sa pensée sur les alternatives qui sont réellement applicables, et, ensuite, choisir parmi les alternatives applicables celle qui correspond le mieux à ce que le pays souhaite réellement. Cette manière de résoudre la question de planification économique révèlera, je crois, son efficacité non seulement en ce qui concerne les affaires intérieures ; mais aussi en ce qui concerne les relations extérieures du pays en question. Un pays qui aura appliqué cette technique avec succès se trouvera, sur le plan international, dans une meilleure position de négociation parce qu'il aura une image beaucoup plus claire des caractéristiques de la situation, et de ce que le pays peut ou ne peut pas réaliser en matière économique.

Dans le domaine macroéconomique, j'estime que l'on ne trouvera pas pratique de chercher à résoudre l'ensemble du problème, dès l'origine, en utilisant la méthode linéaire ou la méthode convexe d'établissement du programme. La technique d'établissement du programme est plutôt destinée à être utilisée dans le domaine macroéconomique, à titre de supplément des techniques déjà établies dans le pays.

Pendant une série d'années, un travail de recherche s'est poursuivi, à l'Institut d'Economie de l'Université d'Oslo, en s'inspirant de ces principes. Un premier compte rendu du résultat fut présenté à la Conférence de Varenna (Côme, Italie) en Juin-Juillet 1954 (compte rendu polycopié édité le 21 juin 1954 par l'Institut d'Oslo). Par la suite, le travail a été poussé considérablement plus loin. Quelques-uns des résultats plus récents se trouvent dans un compte rendu publié le 18 octobre 1954 par l'Institut d'Economie de l'Université d'Oslo, ainsi que dans plusieurs comptes-rendus édités par l'Institut Indien de Statistiques de Calcutta, où j'ai dirigé des groupes de recherches ayant travaillé sur ce type de problèmes de l'automne 1954 au printemps 1955 (1).

Le but de nos efforts était de mettre au point une méthode ou quelques méthodes qui, nous l'espérons, seraient mieux adaptées aux problèmes macroéconomiques que la méthode "simplex" désormais classique. Au cours de nos recherches, nous avons essayé des méthodes et des idées très variées. Dans la présente communication, je ne m'appesantirai pas beaucoup sur la technique permettant de résoudre les problèmes d'établissement des programmes par la méthode linéaire ou plus généralement par la méthode convexe. Je me contenterai seulement d'indiquer brièvement l'idée de base de la méthode que nous préférons maintenant, à savoir la méthode du potentiel logarithmique. Ce sera l'objet des sections 6 et 7. Je n'exposerai pas non plus les raisons que j'ai de penser que la technique d'établissement d'un programme est un supplément indispensable de la technique Entrées-Productions (input-output) dans les problèmes de planification nationale. Je vais donner quelques commentaires sur ces derniers points dans une communication à Paris au séminaire du Professeur ROY ces jours-ci. Dans la présente communication, j'exposerai comment les problèmes de planification économique nationale peuvent être <u>mis en équations</u> pour permettre de les résoudre par la technique des programmes linéaires ou convexes. Il convient tout d'abord de dire quelques mots sur l'aspect mathématique du problème.

---

(1) On pourra aussi se rapporter aux mémoires polycopiés suivants de l'Institut d'Economie d'Oslo :

[1] 21 June 1954 - Methods of solving linear programming problems. Synopsis of a lecture to be given at the International Seminar on Input-output Analysis, Varenna (Lake Como) June-July 1954.

[2] 18 October 1954 - Principles of linear programming. With particular reference to the double gradient form of the logarithmic potential method

[3] 29 March 1955 - A labour saving method of performing freedom truncations in linear programming. Part I.

[4] 13 May 1955 - The logarithmic potential method of convex programming. With particular application to the dynamics of planning for national development. Synopsis of a communication to be presented at the International colloquium of econometrics in Paris 23-28 May 1955.

[5] 17 Octobre 1955 - The multiplex method for linear programming.

[6] 3 January 1956 - The logarithmic potential method for linear programming formulated with a view to electronic computation.

[7] 10 January 1956 - Macroeconomics and linear programming.

PARTIE I : TECHNIQUE MATHÉMATIQUE

2. LA MISE EN ÉQUATION DE PROGRAMME PAR LA MÉTHODE LINÉAIRE

Considérons N variables $x_1\ x_2 \ldots x_N$ assujetties à une condition : celle de satisfaire à m équations linéairement indépendantes ($m \leqslant N$)

$$(2.1) \qquad a_{io} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iN}x_N = 0 \qquad (i = 1,2\ldots m)$$

où les coefficients a sont des données constantes.

Le nombre de degrés de liberté du système est $n = N - m$ et il est toujours possible, au moins d'une manière, de choisir un ensemble de n variables linéairement indépendantes, disons les variables numéro u, v,... w, tel que les $m = N - n$ variables restantes puissent être exprimées linéairement en fonction des variables numéros u, v...w. Nous donnerons à un tel ensemble le nom d'<u>ensemble fondamental</u>. Les m équations (2.1) peuvent alors être réécrites sous la forme fondamentale (1)

$$(2.2) \qquad x_j = b_{jo} + \sum_{k=u,v\ldots w} b_{jk}x_k \qquad (j = 1,2\ldots)u,v\ldots w(.n+m)$$

Si nous le désirons, nous pouvons, évidemment, interpréter (2.2) de manière qu'elle s'applique également pour j = u, v ... w si nous posons

$$(2.3) \qquad b_{jo} = 0 \qquad b_{jk} = \begin{bmatrix} 1 \text{ quand } k = j \\ 0 \text{ dans le cas contraire} \end{bmatrix} (j = u,v\ldots w)$$

Dans ce qui suit, nous admettrons que les équations sont données sous la forme fondamentale (2.2). Si (2.2) est la forme sous laquelle les équations sont <u>données</u>, les variables numéros u,v...w ne peuvent jamais être linéairement dépendantes (à cause de ces équations).

A cause des <u>équations</u> linéaires ci-dessus liant les variables, nous considérerons aussi les <u>inégalités</u>

$$(2.4) \qquad x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,2\ldots n+m)$$

En d'autres mots, toutes les variables sont assujetties à la condition d'être non négatives

Si l'une des variables, dans le problème donné, n'est pas assujettie à une telle condition de non négativité, le problème peut être <u>réduit</u> en utilisant l'une des équations pour éliminer cette variable, Nous pouvons donc toujours aboutir avec un problème dans lequel nos

---

(1) Dans ce qui suit, nous utiliserons les parenthèses inversées) (pour signifier l'exclusion.

n + m variables x , x ... x sont assujetties à la condition de satisfaire aux m équations (2.2), c'est-à-dire ont n degrés de liberté, et toutes les variables sont assujetties à la condition (2.4) de non négativité.

L'ensemble de points satisfaisant aux conditions (2.2) et (2.4) forme ce que nous appellerons la région admissible. En particulier, nous parlerons de la région admissible dans l'espace à n dimensions $(x_u, x_v \dots x_w)$

Le problème consiste à trouver celui ou ceux des points, dans la région admissible, pour lequel ou pour lesquels une fonction préférentielle donnée

$$f = p_u x_u + p_v x_v + \dots + p_w x_w \tag{2.5}$$

dans laquelle les coefficients p sont donnés constants - positifs, négatifs ou nuls - atteint son maximum, c'est-à-dire prend une valeur telle que la fonction préférentielle ne puisse pas dépasser cette valeur en quelque point que ce soit de la région admissible.

Il n'y a pas de restriction de généralité, de supposer que la fonction préférentielle ne contient aucune des variables dépendantes x_j (j = 1, 2...) u,v... (... n+m). En effet, si elle contient une quelconque de telles variables, nous pourrions la substituer à partir de (2.2), et par conséquent nous aboutirions toujours à la forme (2.5) de la fonction préférentielle.

Tous les problèmes d'établissement de programme par la méthode linéaire, et en particulier tous les problèmes macroéconomiques, peuvent être transformés de manière à aboutir à la forme normale ci-dessus. Les principes de cette transformation sont à la vérité simples, mais l'expérience a prouvé qu'il est extrêmement difficile, dans la pratique, de passer par tous les stades de cette transformation, pour un problème un peu compliqué, sans commettre quelque erreur. A chaque tournant de la route, au cours de cette transformation, il convient donc de travailler avec de grandes précautions, de contrôler, de recontrôler encore tous les détails, et particulièrement ceux qui paraissent les plus simples et les plus évidents. Je suis tenté de dire que la partie vraiment difficile d'un grand programme macroéconomique consiste à le formaliser en toute sécurité, comme indiqué en (2.2), (2.4) et (2.5).

3. LA STRUCTURE DE LA SOLUTION

Une caractéristique fondamentale d'un programme linéaire est que la région admissible est convexe, c'est-à-dire que si $(x'_u, x'_v \dots x'_w)$ et $(x''_u, x''_v \dots x''_w)$ sont deux points quelconques se trouvant dans la région admissible, tout point $(x_u, x_v \dots x_w)$ situé sur la ligne droite joignant les deux points ci-dessus se trouvera également dans la région admissible. Ce fait est d'une très grande utilité au cours du travail. Dans beaucoup de problèmes non-linéaires la région admissible n'est pas convexe, et ce fait est susceptible d'entrainer des difficultés considérables.

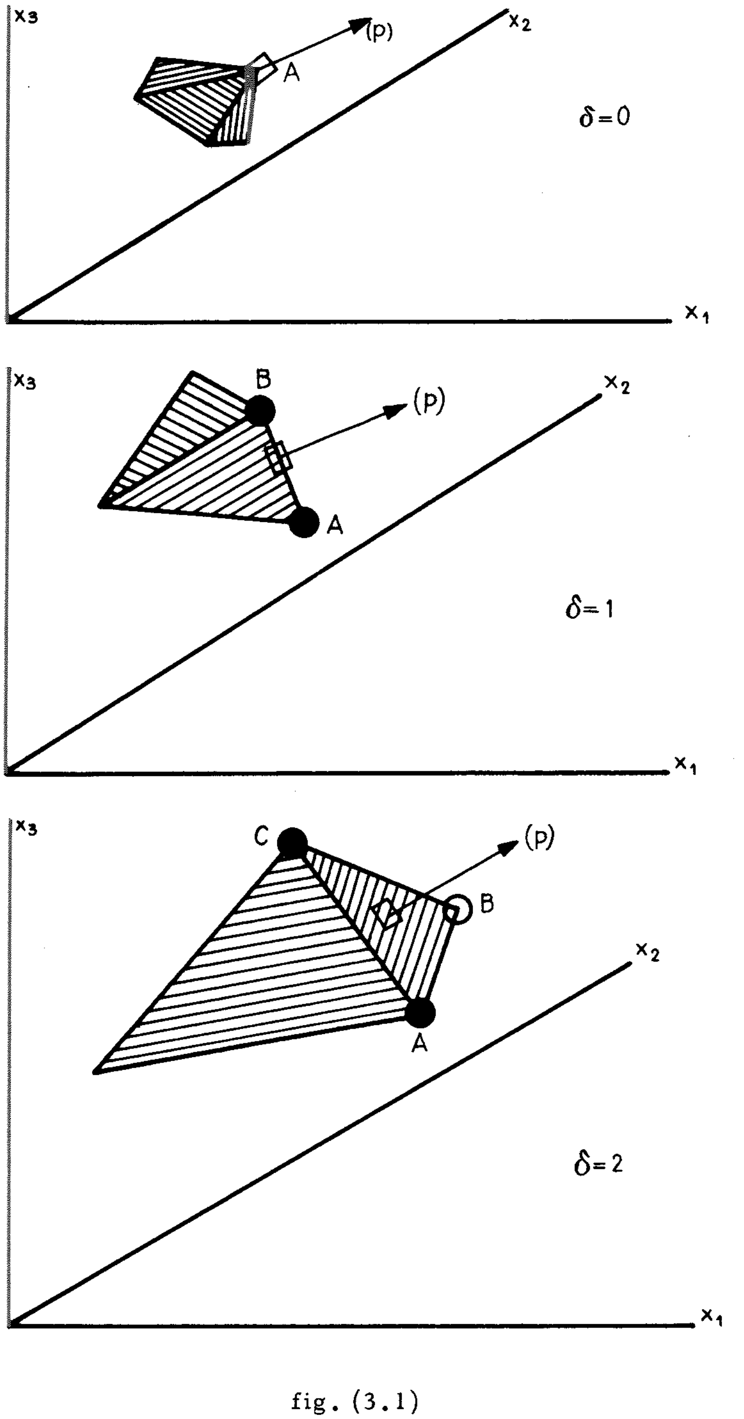

fig. (3.1)

L'ensemble de points optimum, c'est-à-dire l'ensemble de points se trouvant dans la région admissible et pour lequel la fonction préférentielle prend la valeur maximum possible dans cette région, doit toujours se trouver sur la frontière de la région admissible ; autrement dit, il doit être tel qu'au moins une des n + m variables numéros 1,2... n+m soit nulle. La dimensionalité δ de l'ensemble optimum de points, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté de cet ensemble, peut être l'un quelconque des nombres $\delta = 0, 1 \ldots (n-1)$. Le cas $\delta = 0$ signifie qu'il y a seulement un coin bien défini sur la frontière de la région admissible pour lequel la fonction préférentielle prend sa valeur maximum, le cas $\delta = 1$ signifiant que l'optimum est atteint tout le long d'une arête reliant deux coins, etc. La figure (3.1) illustre les cas n = 3 et $\delta = 0$, 1 et 2.

Quelle que soit la dimensionalité de l'ensemble optimum de points, il existe au moins un coin possédant les propriétés optima, c'est-à-dire au moins un point optimum, tel qu'en ce point au moins n des variables soient nulles. Plus exactement : si $\delta = 0$, il existe un, et seulement un, coin optimum ; si $\delta = 1$, il existe exactement deux coins optima, et en général si δ est un nombre quelconque donné ($<n$), il existe $\delta + 1$ coins optima.

4. LE PROBLEME CONVEXE

Lorsque la région admissible est définie de telle sorte qu'elle soit convexe (définie par des inégalités linéaires ou de quelque autre manière), la fonction préférentielle étant linéaire ou non, nous dirons que nous avons un problème convexe d'établissement de programme. Si la région admissible est définie par des inégalités linéaires (et est par conséquent convexe), la fonction préférentielle étant ou non linéaire, nous pourrons dire que nous avons un problème linéairement limité d'établissement de programme.

La distinction la plus importante en matière de théorie d'établissement des programmes est la distinction entre problèmes convexes et problèmes non convexes. Lorsque la convexité est préservée, l'introduction de la non-linéarité a principalement pour conséquence un certain surcroit de travail. En particulier, s'il s'agit d'un problème linéairement limité et qu'il soit attaqué par la méthode du potentiel logarithmique, l'introduction d'une fonction préférentielle non-linéaire ne modifiera pas appréciablement la situation, pourvu que la fonction préférentielle soit une fonction d'une valeur unique explicitement connue qui ne soit pas compliquée au point que le calcul de sa valeur et le calcul de celles de ses dérivées partielles exige un très gros travail.

Nous allons maintenant indiquer de quelle manière on peut mettre en équation un problème convexe d'établissement de programme.

Comme dans la Section 2, nous considérons un problème avec $N = n + m$ variables $x_1, x_2 \ldots x_N$ et m équations mutuellement indépendantes, par conséquent n degrés de liberté. Nous admettrons que les n variables numéros u,v...w peuvent être choisies comme variables fondamentales et que toutes les autres variables peuvent être exprimées par des fonctions (à valeur unique) des variables fondamentales.

Soient

$$(4.1) \qquad x_j = \Phi_j\,(x_u, x_v \ldots x_w) \qquad (j = 1,2\ldots)u,v\ldots w(\ldots n{+}m)$$

ces fonctions. Dans le cas du problème linéairement limité, les fonctions (4.1) sont les mêmes que (2.2). Nous admettons que les fonctions (4.1) soient telles que l'ensemble des points satisfaisant aux conditions

$$(4.2) \qquad x_k \geqslant 0 \qquad (k = u,v\ldots w)$$

et

$$(4.3) \qquad \Phi_j\,(x_u, x_v \ldots x_w) \geqslant 0 \qquad (j = 1,2\ldots)u,v\ldots w(\ldots n{+}m)$$

forme une région convexe. Celle-ci est la région admissible pour le problème convexe considéré.

Nous écrirons les dérivées partielles du premier et du second ordre, respectivement, des variables dépendantes de la façon suivante

$$(4.4) \qquad \Phi_{jk} = \frac{\partial \Phi_j(x_u, x_v \ldots x_w)}{\partial x_k} \qquad \begin{array}{l}(j = 1,2\ldots)u,v\ldots w(\ldots n{+}m)\\ (k = u,v\ldots w)\end{array}$$

et

$$(4.5) \qquad \Phi_{jkh} = \frac{\partial^2 \Phi_j(x_u, x_v \ldots x_w)}{\partial x_k \partial x_h} \qquad \begin{array}{l}(j = 1,2\ldots)u,v\ldots w(\ldots n{+}m)\\ (k = u,v\ldots w)\\ (h = u,v\ldots w)\end{array}$$

Dans le cas linéairement limité, les dérivées du premier ordre de Φ_{jk} sont les constantes b_{jk} dans (2.2), tandis que toutes les dérivées du second ordre dans (4.5) sont nulles.

Dans le cas général, la fonction préférentielle est une certaine fonction d'une valeur unique

$$(4.6) \qquad f = f\,(x_u, x_v \ldots x_w)$$

des variables fondamentales.

Nous écrirons de la manière suivante ses dérivées du premier et du second ordre

$$(4.7) \qquad f_k = \frac{\partial f\,(x_u, x_v \ldots x_w)}{\partial x_k} \qquad (k = u,v\ldots w)$$

$$(4.8) \qquad f_{kh} = \frac{\partial^2 f\,(x_u, x_v \ldots x_w)}{\partial x_k \partial x_h} \qquad \begin{array}{l}(k = u,v\ldots w)\\ (h = u,v\ldots w)\end{array}$$

Dans le cas d'une fonction préférentielle linéaire, les dérivées du premier ordre f_k sont les mêmes que les constantes p_k de (2.5) tandis que toutes les dérivées du second ordre de (4.8) sont nulles.

La structure de la solution, dans le cas du problème convexe mais non nécessairement linéaire, possède certains caractères qui se retrouvent dans le cas du problème linéaire, et d'autres qui sont différents. Si la fonction préférentielle ne comporte pas de maximum inconditionnel dans l'intérieur de la région admissible, la solution du problème d'établissement du programme consiste, comme dans le cas complètement linéaire, en un ensemble de points appartenant à la frontière de la région admissible. Et la dimensionalité de l'ensemble optimum de points sur la frontière peut - comme dans le cas linéaire - prendre l'une quelconque des valeurs $\delta = 0, 1 \ldots (n-1)$. Mais il ne serait pas vrai de dire qu'il existe toujours au moins un coin optimum, c'est-à-dire un point optimum qui soit uniquement déterminé par le fait que n variables mutuellement indépendantes soient nulles (et peut-être aussi que certaines des autres variables soient nulles en ce point). Par exemple, si la région admissible correspondant à deux variables fondamentales x_1 et x_2 est un cercle comme dans la figure (4.9), ou est la région commune à deux cercles différents comme dans la figure (4.10) - et dans ces deux cas il s'agit bien d'une région convexe - l'ensemble optimum de points peut être un point unique situé quelque part sur la périphérie du cercle dans la figure (4.9) ou sur l'un des arcs dans la figure (4.10), ou bien encore peut être la totalité de l'un des arcs de la figure (4.10).

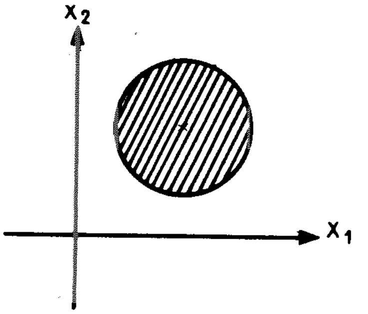

fig. (4.9)

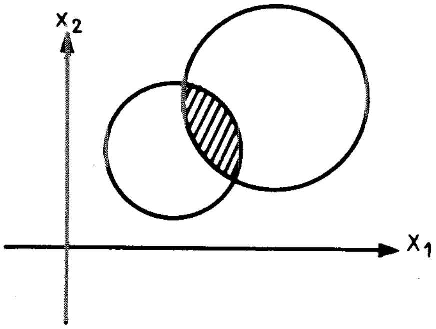

fig. (4.10)

5. LA PLANIFICATION DE LA SUBSTITUTION DE FACTEUR RÉDUITE A UN PROBLÈME CONVEXE

En planification macroéconomique, on peut quelquefois rencontrer des problèmes non-linéaires qui sont convexes et peuvent être transformés en un problème linéairement limité. Ce fait s'applique en particulier à certains problèmes bilinéaires, qui sont des problèmes pour lesquels la frontière de la région admissible est définie par des inégalités exprimées par des formules bilinéaires dans lesquelles rentrent les variables originales, ou par le rapport entre deux expressions linéaires, aucune des variables n'y entrant à sa seconde puissance. Je n'ai pas passé en revue d'une façon complète la classe des problèmes qui peuvent être transformés de cette manière, mais le simple exemple suivant d'un problème de substitution de facteur suggérera les possibilités de la méthode.

Considérons un processus unique de production mettant en oeuvre deux facteurs de production. Soit y la quantité du produit et x_1 et x_2 chacun des deux facteurs. Les coefficients de production b_1 et b_2 sont définis par les expressions

(5.1) $$x_1 = b_1 y \qquad x_2 = b_2 y$$

Admettre que des coefficients de production sont constants veut dire que b_1 et b_2 sont des constantes données. Ceci est l'hypothèse typique en matière d'analyse "input-output". Dans ce cas, il n'existe aucune possibilité de substitution de facteur. Il est bien évident que ceci ne correspond pas à la réalité des faits pour de nombreux cas.

Le cas opposé, celui de la substitution sans restriction, serait caractérisé par le fait que b_1 et b_2 sont des variables susceptibles de prendre n'importe quelles valeurs non négatives, pourvu qu'une certaine moyenne pondérée d'entre elles soit égale à une valeur donnée, c'est-à-dire que

(5.2) $$b_1 \geqslant 0 \qquad b_2 \geqslant 0$$

(5.3) $$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = b$$

où α_1, α_2 et b sont des constantes données qui peuvent, par hypothèse, être admises comme étant effectivement positives :

(5.4) $$\alpha_1 > 0 \qquad \alpha_2 > 0 \qquad b > 0$$

Nous pouvons écarter, comme étant sans importance, le cas où les coefficients (5.4) sont nuls (ou même négatifs). Lorsque (5.4) est admis, la généralité ne se trouvera pas restreinte si l'on admet que

(5.5) $$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

de telle sorte que l'expression (5.3) implique en réalité la fixation du même nombre de constantes que l'expression (5.1) dans le cas où b_1 et b_2 sont des constantes.

Les hypothèses (5.2) - (5.4) décrivent le cas où les deux facteurs sont des facteurs d'équivalence (par exemple la quantité de chaleur produite par des combustibles pouvant se remplacer mutuellement, lorsque des différences quelconques possibles dans la facilité de manutention peuvent être admises comme étant proportionnelles aux quantités employées). Ce cas, lui aussi, repose souvent sur une hypothèse ne correspondant pas à la réalité des faits. Une sorte de compromis entre les deux cas extrêmes ci-dessus donnera une méthode de calcul plus fructueuse. Nous devrions rendre possible l'introduction d'un certain degré de substitution, mais peut-être pas d'une substitution sans <u>restriction</u>. Ceci est réalisé si les expressions (5.2) sont remplacées par les expressions suivantes, plus générales :

(5.6) $$b_1 \geqslant \overline{b}_1 \qquad\qquad b_2 \geqslant \overline{b}_2$$

où $\overline{b}_1$ et $\overline{b}_2$ sont des constantes satisfaisant aux conditions :

(5.7) $$\overline{b}_1 \geqslant 0 \qquad\qquad \overline{b}_2 \geqslant 0$$

Les conditions définies par (5.3) -(5.7) contiennent les deux situations mentionnées ci-dessus en tant que cas extrêmes. Le cas des coefficients de production déterminés est obtenu en supprimant le signe d'inégalité et en ne retenant que le signe d'égalité dans (5.6), tandis que le cas des facteurs d'équivalence est obtenu en supprimant le signe d'inégalité et en ne retenant que le signe d'égalité dans (5.7).

Dans les expressions que nous considérons maintenant, nous avons 5 variables, à savoir y, x_1, x_2, b_1, b_2 et trois équations mutuellement indépendantes, à savoir (5.1) à (5.3), donc 2 degrés de liberté. En outre, les variables sont assujetties à satisfaire à deux conditions, à savoir celles de l'expression (5.6). Les conditions de l'expression (5.7) ne concernent pas les variables, mais seulement les constantes de structure.

Etant donné qu'il y a deux degrés de liberté, il doit être possible de choisir deux des variables comme variables fondamentales en fonction desquelles il est possible d'exprimer les autres variables. Nous ne pouvons pas choisir b_1 ni b_2 comme variables fondamentales, car elles sont mutuellement dépendantes l'une de l'autre (1) du fait de l'expression (5.3), mais x_1 et x_2 sont mutuellement indépendantes et peuvent être prises comme variables fondamentales.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que les ensembles de valeurs tels qu'ils correspondent à une production totale positive, et non nulle, c'est-à-dire que

(5.8) $$y > 0$$

Le cas où y est nul, et à fortiori celui où il est négatif, ne correspond à rien dans la réalité des faits. En fonction des variables fondamentales, la condition est, par (5.6) - (5.7), équivalente à :

(5.9) $$x_1 \geqslant 0 \qquad\qquad x_2 \geqslant 0$$

(5.10) x_1 et x_2 ne pouvant pas être simultanément nuls.

En vertu de la première et de la seconde inégalités de (5.4), nous avons:

(5.11) $$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 > 0$$

---

(1) Incidemment, Pareto, dans son analyse du processus de production, a fait une erreur fondamentale similaire à l'erreur que nous aurions commise en prenant b_1 et b_2 comme variables fondamentales. J'espère que je pourrai, à une autre occasion, revenir plus longuement sur cette question.

Ceci étant, les expressions donnant les autres variables en fonction des variables fondamentales sont faciles à trouver. Ce sont les suivantes :

$$(5.12)\qquad \begin{cases} b_1 = b\,\dfrac{x_1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \\[2ex] b_2 = b\,\dfrac{x_2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \end{cases}$$

$$(5.13)\qquad y = \frac{1}{2}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

La manière la plus simple de dériver ces expressions est de diviser (5.1) par y, ce qui peut être fait en vertu de (5.8), et à introduire le résultat dans (5.3). On a, en outre

$$(5.14)\qquad \frac{x_1}{y} \geqslant \overline{b}_1 \qquad\qquad \frac{x_2}{y} \geqslant \overline{b}_2$$

ce qui, par suite de (5.13), est équivalent à :

$$(5.15)\qquad \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 \geqslant 0 \qquad\qquad \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 \geqslant 0$$

où

$$(5.16)\qquad \begin{matrix} \beta_{11} = \alpha_2 \overline{b}_2 + \beta & \qquad \beta_{12} = -\alpha_2 \overline{b}_1 \\ \beta_{21} = -\alpha_1 \overline{b}_2 & \qquad \beta_{22} = \alpha_1 \overline{b}_1 + \beta \end{matrix}$$

et

$$(5.17)\qquad \beta = b - (\alpha_1 \overline{b}_1 + \alpha_2 \overline{b}_2)$$

Incidemment, et à titre de suggestion en vue de la généralisation, indiquons que la matrice $\beta_{ij} \begin{pmatrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{pmatrix}$ définie par (5.16) est obtenue en partant de la matrice

$$(5.18)\qquad g_{ij} = \alpha_i \overline{b}_j \qquad\qquad \begin{pmatrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est singulière, ou plus précisément elle est de rang non supérieur à un. Nous formons son adjointe $\hat{g}_{ij}$ (c'est-à-dire sans la normalisation impliquée dans l'inverse). La matrice supplémentaire en diagonale

$$(5.19)\qquad \beta_{ij} = \hat{g}_{ij} + \beta\, e_{ij} \qquad\qquad \begin{pmatrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{pmatrix}$$

où les e_{ij} sont les éléments de la matrice unitaire et β la constante de (5.17), est alors la matrice (5.16).

Nous avons maintenant un problème à deux variables indépendantes qui doivent satisfaire aux quatre inégalités linéaires de (5.9) et (5.15). Nous n'avons pas besoin de considérer y comme une cinquième variable dans la technique d'établissement du programme. Il deviendra automatiquement non-négatif, pourvu que les constantes données α_1, α_2 et b satisfassent à l'expression (5.4). L'exclusion du point $x_1 = x_2 = 0$ par (5.10) n'a qu'un intérêt académique.

Par la méthode classique nous pouvons définir les deux variables d'atténuation ("slack variables")

$$(5.20) \qquad \xi_1 = \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 \qquad \xi_2 = \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2$$

et imposer les conditions

$$(5.21) \qquad \xi_1 \geqslant 0 \qquad \xi_2 \geqslant 0$$

Nous avons maintenant un système avec les quatre variables x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 dont toutes doivent être non négatives. En ce qui concerne les frontières, il s'agit donc d'un système linéaire régulier.

Il est, toutefois, possible d'aborder le problème d'une manière différente qui, pour commencer, conduit à une définition non-linéaire d'une région admissible. La correspondance avec la région exprimée linéairement par (5.9) et (5.21) donnera alors un exemple du type de transformations que nous avons en vue.

Le fait d'imposer les deux bornes (5.6) est équivalent au fait de définir les deux variables d'atténuation

$$(5.22) \qquad \beta_1 = b_1 - \overline{b}_1 \qquad \beta_2 = b_2 - \overline{b}_2$$

qui doivent être non-négatives, c'est-à-dire que

$$(5.23) \qquad \beta_1 \geqslant 0 \qquad \beta_2 \geqslant 0$$

Adopter ce point de vue veut dire que nous considérons un système dans lequel rentrent les 4 variables x_1, x_2, β_1, β_2 qui toutes seraient non négatives. Il subsiste encore 2 degrés de liberté et x_1 et x_2 peuvent encore être prises comme variables fondamentales. Les expressions pour β_1 et β_2 en fonction de ces variables fondamentales (pour tous les points à l'exception de $x_1 = x_2 = 0$) sont les suivantes :

$$(5.24) \qquad \beta_1 = \frac{\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \qquad \beta_2 = \frac{\beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}$$

Dans ce système, nous avons deux fonctions frontières qui ne sont pas linéaires. En vertu de l'inégalité (5.11) - qui demeure valable pour tous les points à l'exception de $x_1 = x_2 = 0$ - les conditions selon lesquelles les deux fonctions frontières (5.24) devront être non-négatives <u>nous ramènent aux conditions</u> (5.15). Ceci est le point essentiel de la transformation, qui nous ramène au cas de fonctions frontières linéaires.

La structure de la région admissible définie par (5.9) et (5.21) peut être représentée graphiquement comme suit. Dans le diagramme en (x_1, x_2) de la figure (5.25), nous traçons les deux droites partant

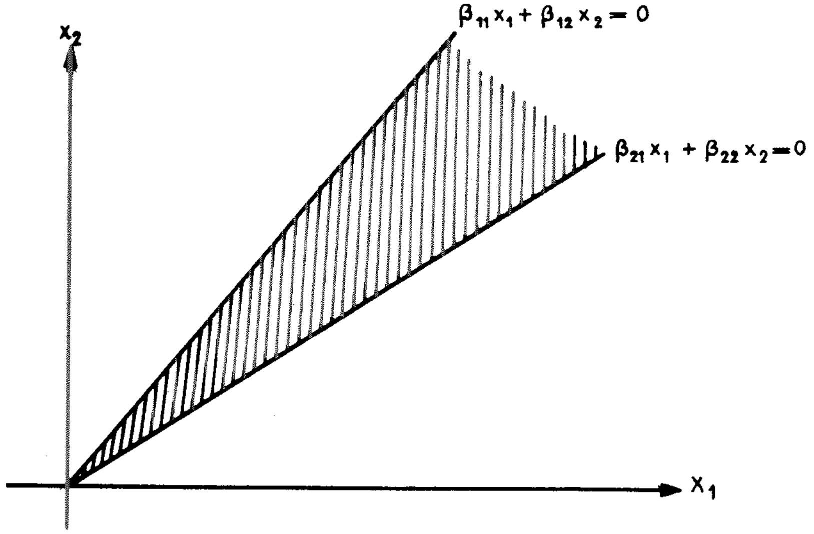

fig. (5.25)

de l'origine dans le premier quadrant et qui sont définies par les deux équations linéaires suivantes :

(5.26) $\qquad \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 = 0 \qquad\qquad \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 = 0$

Le secteur qui se trouve compris entre ces deux droites est la région admissible. Par suite de (5.9) nous ne devons considérer que la partie du secteur qui est située dans le premier quadrant. (L'origine elle-même est exclue par la condition académique (5.10)).

Pour reconnaitre que le secteur considéré est bien la région admissible, nous devons noter tout d'abord que les pentes des deux droites sont montantes - dans les cas extrêmes, les droites peuvent être soit horizontales, soit verticales, soit même coincidentes - parce que β_{21} et β_{22} sont de signes opposés et que β_{11} et β_{12} sont eux aussi de signes opposés. On peut se persuader de ce fait en considérant les conditions (5.4), (5.7) et la borne

(5.27) $\qquad \beta \geqslant 0$

qui peut se déduire de $\beta = \alpha_1(b_1 - \overline{b}_1) + \alpha_2(b_2 - \overline{b}_2)$, en tenant compte de (5.3), (5.4) et (5.6).

La droite définie par la première équation dans (5.26), c'est-à-dire la droite qui, en conséquence de la première inégalité de (5.15) est telle que la région admissible doive être au-dessous d'elle, est la plus élevée des deux droites de la figure (5.25). En fait, son coefficient angulaire est $\frac{\beta_{11}}{-\beta_{12}}$, tandis que le coefficient angulaire de la droite inférieure de la figure (5.25) est $\frac{-\beta_{21}}{\beta_{22}}$, et nous pouvons écrire :

$$\frac{\beta_{11}}{-\beta_{12}} - \frac{-\beta_{21}}{\beta_{22}} = \frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}{(-\beta_{12})\,\beta_{22}}$$

Etant donné que le numérateur de cette expression a pour valeur

$$\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} = \beta_b \tag{5.28}$$

il est non négatif. On remarquera qu'il en est de même pour le dénominateur. Par conséquent, si l'on excepte les cas extrêmes dont nous avons parlé plus haut, il existe dans cet exemple une région admissible qui ne s'anéantit pas et est le secteur hachuré de la figure (5.25).

Les cas extrêmes sont les suivants :

1°) La droite supérieure coïncide avec l'axe x_2 (cas où le facteur N° 1 peut être complètement remplacé par le facteur N° 2).

2°) la droite inférieure coincide avec l'axe x_1 (cas où le facteur N° 2 peut être complètement remplacé par le facteur N° 1)

3°) Cas où nous avons à la fois 1°) et 2°)

4°) Cas où les deux droites coincident (cas de coefficients de production fixés). Ce cas peut se trouver combiné soit avec 1°), soit avec 2°).

Quelle que soit l'éventualité, la <u>largeur</u> et l'<u>orientation</u> du secteur hachuré de la figure (5.25) donne une description visuelle pour des possibilités de substitution.

Dans un problème concret de l'établissement du programme, il apparaitra souvent d'autres bornes qui auront pour effet d'exclure la partie Nord-Est du secteur, de telle sorte qu'il ne subsistera qu'une région admissible <u>finie</u>. Si aucune borne additionnelle de cette sorte n'est introduite du fait des objectifs du programme, il peut être opportun de la faire néanmoins rentrer dans l'hypothèse en disant que nous désirons seulement considérer la situation qui existe lorsque le produit total ne dépasse pas une certaine limite conventionnelle $\overline{\overline{y}}$ (qui peut être très élevée). Une raison, entre d'autres, pour que l'adoption d'une telle expression soit recommandable est que nous ne pouvons prétendre voir le tableau théorique correspondre à la réalité des faits pour des niveaux de production très élevés. Une limite inférieure $\overline{y}$ (>0) pour le produit total peut être imposée pour des raisons similaires, de telle sorte que la totalité de l'analyse ne s'appliquera valablement que dans un intervalle bien défini, peut-être dans le voisinage du niveau actuel. Exprimées en fonction des variables fondamentales, les limites que nous considérons maintenant prendraient, grâce à (5.13), la forme de deux inégalités ;

$$b\overline{y} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant b\overline{\overline{y}} \tag{5.29}$$

où $\bar{y}$ et $\bar{\bar{y}}$ sont des constantes devant satisfaire à la condition :

$$(5.30) \qquad 0 < \bar{y} < \bar{\bar{y}}$$

La figure (5.31) indique sous quelle forme apparaitra la région admissible lorsqu'on impose des bornes de type (5.29) outre celles exprimées dans la figure (5.13),.

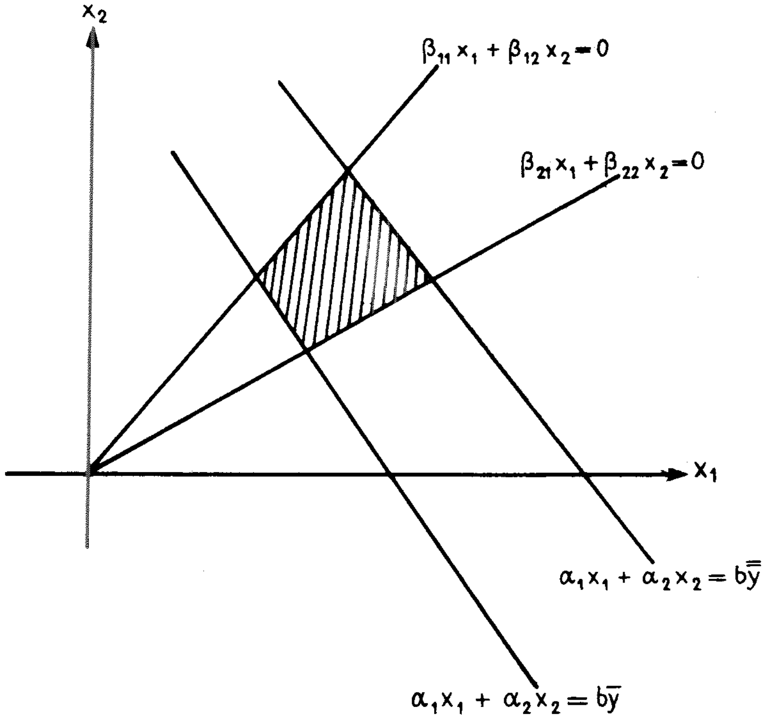

fig. (5.31)

Voilà ce qu'il fallait dire à propos de la région admissible. Discutons maintenant la question de la fonction préférentielle.

Supposons qu'une partie de la fonction préférentielle consiste en un profit d'un type plus ou moins traditionnel, disons pour fixer les idées une expression de la forme $qy - (q_1x_1 + q_2x_2)$ où q, q_1, q_2 forment un ensemble de coefficients d'évaluation, non nécessairement des prix réellement pratiqués, mais un ensemble quelconque de coefficients d'évaluation. Admettons en outre que la fonction préférentielle comporte aussi une partie additionnelle $Q_1\beta_1 + Q_2\beta_2$ où Q_1 et Q_2 sont des coefficients donnés qui expriment l'opportunité - positive ou négative - d'approcher des limites des coefficients de production. Dans cette catégorie peuvent, par exemple, être rangées des considérations sur l'utilité de ne pas modifier de façon trop brusquée les achats dans un secteur qui livrait auparavant un des facteurs. On peut imaginer un très grand nombre de considérations basées ainsi sur la réalité des faits. Si nous choisissons, à titre d'exemple, celle que nous venons de citer, la fonction préférentielle devient :

$$f = qy - (q_1 x_1 + q_2 x_2) + Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2 \tag{5.32}$$

Exprimée en fonction des variables fondamentales, cette formule devient :

$$f = f(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \tag{5.33}$$

où

$$p_1 = \frac{q\alpha_1}{b} - q_1 \qquad\qquad p_2 = \frac{q\alpha_2}{b} - q_2 \tag{5.34}$$

$$P_1 = Q_1 \beta_{11} + Q_2 \beta_{21} \qquad\qquad P_2 = Q_1 \beta_{12} + Q_2 \beta_{22} \tag{5.35}$$

Si Q_1 et Q_2 sont nuls, la fonction préférentielle se réduit à une expression linéaire, et par conséquent tout le travail se ramène à un problème normal d'établissement d'un programme linéaire. Si Q_1 et Q_2 ne sont pas nuls, la fonction préférentielle, en général, ne sera pas linéaire, mais en tout cas le problème sera un problème convexe. On peut même préciser que ce sera un problème convexe linéairement limité.

Les dérivées partielles de la fonction préférentielle

$$f_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \qquad\qquad f_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \tag{5.36}$$

sont faciles à calculer, et ce sont ces dérivées partielles dont nous avons besoin pour appliquer la méthode du potentiel logarithmique.

6. LA MÉTHODE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE APPLIQUÉE À UN PROBLÈME COMPLÈTEMENT LINÉAIRE

En recherchant une solution du problème maximum défini par (2.2) - (2.5), nous travaillons systématiquement dans <u>l'intérieur</u> de la région admissible et nous utilisons un potentiel logarithmique comme dispositif de guidage - une sorte de radar - pour nous empêcher de nous heurter à la frontière. Dans ce qui suit, nous allons exposer brièvement une des manières possibles d'utiliser cette idée. Les détails sont donnés dans les publications dont nous avons donné la référence plus haut.

Nous définissons le potentiel

$$V(x_u, x_v \ldots x_w) = \sum_{k=u,v\ldots w} \log x_k + \sum_{j=1,2\ldots)u,v\ldots w(\ldots n+m} \log x_j \tag{6.1}$$

Autrement dit, le potentiel est simplement la somme des logarithmes de toutes les variables, variables fondamentales aussi bien que variables dépendantes. Ce potentiel est continu et il lui correspond des dérivées partielles de tous ordres continues en tout point de l'intérieur de la région admissible, mais lorsque nous nous approchons d'un point quelconque de la frontière le potentiel tend vers $-\infty$.

Nous considérerons ce potentiel comme une frontière des n variables fondamentales, et de ce point de vue nous pouvons écrire comme suit ses dérivées partielles :

$$V_k = \frac{\partial V}{\partial x_k} = \frac{1}{x_k} + \sum \frac{b_{jk}}{x_j} \qquad (k = u,v\ldots w) \tag{6.2}$$

Le vecteur avec les composantes (6.2) est le gradient du potentiel V.

Nous prenons aussi en considération le gradient préférentiel, c'est-à-dire le vecteur dont les composantes sont p_k $(k = u,v\ldots w)$.

Ces deux gradients définissent deux directions différentes dans lesquelles il est, dans un certain sens, désirable d'aller. Si nous voulons faire croitre la fonction préférentielle, il convient d'aller dans la direction p_k, mais si l'on désire s'éloigner de la frontière, il convient d'aller dans la direction v_k. La solution optimum se trouve en un sage compromis entre ces deux directions, ce qui ressemble beaucoup au fait que la solution optimum d'une politique de production, pour une entreprise, se trouve en un sage compromis entre un mouvement dans la direction (dans l'espace des facteurs de production) pour laquelle le produit croit le plus rapidement et un mouvement dans la direction pour laquelle le prix de revient décroit le plus rapidement.

Supposons que nous partions d'un point quelconque x_k $(k = u,v\ldots w)$ situé à l'<u>intérieur</u> de la région admissible, c'est-à-dire un point où toutes les n+m variables x_i $(i = 1,2\ldots n+m)$ sont effectivement positives. A partir de ce point, nous nous déplaçons dans la direction, correspondant au compromis

$$d_k = p_k + \mu V_k \qquad (k = u,v\ldots w) \tag{6.3}$$

où μ est un paramètre de compromis auquel nous pouvons attribuer une valeur quelconque comprise entre $-\infty$ et $+\infty$.

Si une valeur de μ est choisie, nous avons défini une <u>droite</u> partant du point initial x_k. Comme direction positive sur cette droite, nous pouvons prendre la direction dans laquelle croit la fonction préférentielle f. Le point qui se déplace, x'_k, sur la droite est défini par l'expression :

$$x'_k = x_k + \varepsilon \lambda d_k \qquad (k = u,v\ldots w) \tag{6.4}$$

où λ est un paramètre qui engendre le mouvement le long de la droite quand il croit de 0 pour prendre des valeurs positives, et où ε est un facteur de signe, c'est-à-dire +1 ou -1 ; il doit être choisi de telle sorte que le mouvement produit lorsque λ prend diverses valeurs positives s'effectue dans la direction d'un accroissement de f.

La valeur de la fonction préférentielle au cours de ce mouvement est :

$$(6.5) \qquad f' = f + \varepsilon\lambda (P + \mu M)$$

où f' est la valeur de la fonction préférentielle le long de la droite, f la valeur de la fonction préférentielle au point initial x_k, μ la valeur du paramètre de compromis qui définit la droite, et où P et M sont définies par

$$(6.6) \qquad P = \sum_{k=u,v...w} p_k^2 \qquad\qquad M = \sum_{k=u,v...w} p_k V_k$$

où V_k sont les valeurs que prennent les composantes du gradient du potentiel logarithmique au point initial.

Il résulte de tout ceci que f, P et M sont des constantes dans l'expression (6.5), ce qui signifie que la fonction préférentielle est une fonction linéaire de λ le long de la droite. Afin que la fonction préférentielle se trouve <u>croitre</u> au fur et à mesure que λ évolue dans le domaine des valeurs positives, le facteur de signe ε doit être choisi comme suit :

$$(6.7) \qquad \varepsilon = \text{signe } (P + \mu M)$$

Ceci posé, la valeur de la fonction préférentielle le long de la droite peut être écrite comme suit :

$$(6.8) \qquad f' = f + \lambda \left| P + \mu M \right| \qquad \text{où } \lambda \text{ est positif}$$

La variation des autres variables le long de la droite sera donnée par l'expression :

$$(6.9) \qquad x_j' = x_j + \varepsilon\lambda d_j \qquad (j = 1,2...)u,v...w(..n+m$$

où

$$(6.10) \qquad d_j = \sum_{k=u,v...w} b_{jk} d_k = p_j + \mu V_j \qquad (j = 1,2...)u,v...w(...n+m)$$

les p_j et V_j étant des paramètres numériques définis par

$$(6.11) \qquad p_j = \sum_{k=u,v...w} b_{jk} p_k \quad V_j = \sum_{k=u,v...w} b_{jk} V_k \qquad (j = 1,2...)u,v..w(..n+m)$$

Si le point initial x_k se trouve à l'intérieur de la région admissible, il existe au moins un certain petit intervalle de valeurs positives de λ pour lequel toutes les variables (6.4) et (6.9) sont encore effectivement positives, et par conséquent le point x'_k se trouve encore à l'intérieur de la région admissible. Pour de telles valeurs positives de λ, les valeurs de la fonction préférentielle, conformément à l'expression (6.8), se seront trouvées augmentées. Mais λ continuant à croitre, nous finirons toutefois - si la région admissible est finie, c'est-à-dire si elle est entièrement fermée - tôt ou tard par atteindre un point d'éclatement, c'est-à-dire un point pour lequel au moins une des variables (6.4) et (6.9) atteint zéro et deviendra négative si nous allons plus loin. La valeur de λ pour laquelle ce fait se produit dépendra évidemment de μ. Ce que nous écrirons de la façon suivante :

$$\lambda = \lambda(\mu) \tag{6.12}$$

La valeur correspondante de la fonction préférentielle est :

$$\underset{\lambda}{\mathrm{Max}} \,.\, f' = f + \lambda(\mu) \,.\, |P + \mu M| \tag{6.13}$$

Ceci est une fonction de μ. Un principe naturel en vue du choix de la valeur de μ sera de faire ce choix d'une manière telle que la fonction qui constitue le membre de droite de l'expression (6.13) prenne sa valeur maximum. La valeur correspondante de la fonction préférentielle sera

$$\underset{\mu}{\mathrm{Max}} \; \underset{\lambda}{\mathrm{Max}} \; f' \tag{6.14}$$

La valeur de la fonction préférentielle ainsi obtenue ne dépend que du point initial x_k, et c'est également le cas pour le point d'éclatement.

En d'autres mots, par la méthode ci-dessus, il se trouve que, à tout point initial arbitrairement donné dans l'intérieur de la région admissible, est associé un point d'éclatement auquel correspondra une valeur plus grande de la fonction préférentielle que pour le point initial, et qui se trouvera dans un certain sens "plus proche" du point optimum. Un algorithme systématique pour la conduite des calculs a été mis au point et a été appliqué à un certain nombre de problèmes de petite et moyenne grandeur.

Un algorithme systématique permettant de trouver un point dans l'intérieur de la région admissible, ce qui revient à trouver une solution d'un système d'inégalités linéaires, a également été mis au point.

Lorsqu'un point d'éclatement a été déterminé, on a le choix entre deux voies :

1°) Utiliser la méthode conduisant à un processus d'itération, c'est-à-dire se déplacer d'une petite distance à partir du point d'éclatement et en restant à l'intérieur de la région admissible, et reprendre les mêmes opérations.

2°) Utiliser certaines données relatives au point d'éclatement et au comportement des variables dans le voisinage de ce point pour une estimation portant sur une ou plusieurs des variables qui seront le plus vraisemblablement nulles au point optimum. Ces variables sont alors posées comme étant nulles, et l'on poursuit l'analyse avec le nombre de degrés de liberté réduit de la manière correspondante.

Un travail empirique a montré que la seconde méthode est la plus utile. La convergence du processus d'itération de la première méthode est souvent trop lente.

Pour tout point situé sur la frontière, un critère pratique, nécessaire et suffisant existe, qui montrera s'il s'agit bien réellement d'un point optimum. Nous avons donc à notre disposition un moyen de contrôle défini de la validité de l'estimation finale. Si le résultat est négatif, on peut effectuer un petit déplacement à l'intérieur de la région admissible et faire une nouvelle exploration avec la totalité ou une partie des degrés de liberté.

7. LA MÉTHODE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE APPLIQUÉE À UN PROBLÈME CONVEXE MAIS NON NÉCESSAIREMENT LINÉAIRE

Il doit être possible de modifier la méthode décrite dans la Section 7 de manière à la rendre applicable également à des cas plus généraux de problèmes convexes plutôt qu'à des problèmes simplement linéaires. Le raisonnement suivant, constituant un exemple, est donné à titre de suggestion.

En un point quelconque situé à l'intérieur d'une région convexe définie par des conditions de la forme (4.2) - (4.3) nous calculons les dérivées (4.4) et (4.7). Pour plus de précision, nous allons dorénavant désigner le point initial par le symbole x_k^o et les valeurs de (4.6), (4.7), (4.1) et (4.4), respectivement, par les symboles suivants, correspondant à ce même moint : f^o, f_k^o, ϕ_j^o et ϕ_{jk}^o.

Nous définissons aussi le potentiel

$$(7.1) \qquad V = V(x_u, x_v \ldots x_w) = \sum_{k=u,v\ldots w} \log x_k + \sum_{j=1,2,\ldots)u,v\ldots w(\ldots n+m} \log \phi_j (x_u, x_v \ldots x_w)$$

et ses dérivées partielles

$$(7.2) \qquad V_k = \frac{\partial V(x_u, x_v \ldots x_w)}{\partial x_k} = \frac{1}{x_k} + \sum \frac{\phi_{jk}}{\phi_j \; (x_u, x_v \ldots x_w)}$$

$$j = 1,2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots nrm \qquad (k = u,v\ldots w)$$

Au point initial, nous avons :

$$(7.3) \qquad V_k^o = \frac{1}{x_k^o} + \sum \frac{\phi_{jk}^o}{\phi_j^o} \qquad (k = u,v\ldots w)$$

$$j = 1,2\ldots) u, v, \ldots w (\ldots nrm$$

A partir du point initial, nous définissons une droite par l'expression :

(7.4) $$x'_k = x^o_k + \varepsilon \lambda d_k \qquad (k = u, v \ldots w)$$

où

(7.5) $$d_k = f^o_k + \mu V^o_k \qquad (k = u, v \ldots w)$$

et où le facteur de signe ε est défini de telle manière que, dans le voisinage du point initial, c'est-à-dire dans le voisinage de la valeur $\lambda = 0$, une augmentation de λ dans le domaine des valeurs positives signifie un accroissement de la fonction préférentielle le long de la droite, c'est-à-dire pour la valeur donnée de μ.

Par (7.4) et (7.5), les valeurs des variables fondamentales se trouvent définies comme des fonctions du point initial, et de λ et de μ. Les valeurs des variables dépendantes en fonction des mêmes arguments sont données par l'expression :

(7.6) $$x'_j = \phi_j(x'_u, x'_v \ldots x'_w) \qquad (j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots n+m)$$

Et les valeurs de la fonction préférentielle exprimées par rapport à ces arguments, sont :

(7.7) $$f(x'_u, x'_v \ldots x'_w)$$

Si le point initial x^o_k est maintenu constant, les fonctions (7.6) et (7.7) peuvent être considérées comme dépendant de λ et de μ. Nous pouvons écrire comme suit les dérivées par rapport à ces fonctions

(7.8) $$\phi_{j(rs)} = \frac{\partial^{r+s} \phi_j (x'_u, x'_v \ldots x'_w)}{\partial^r \lambda \, \partial^s \mu} \qquad \begin{array}{l}(j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots n+m) \\ (r = 0, 1, 2 \ldots \\ (s = 0, 1, 2 \ldots\end{array}$$

(7.9) $$f_{(rs)} = \frac{\partial^{r+s} f (x'_u, x'_v \ldots x'_w)}{\partial^r \lambda \, \partial^r \mu} \qquad \begin{array}{l}(r = 0, 1, 2 \ldots \\ (s = 0, 1, 2 \ldots\end{array}$$

La dérivée de la fonction préférentielle le long de la droite sera égale à

(7.10) $$f_{(10)} = \varepsilon \sum_{k=u,v\ldots w} f_k d_k$$

Au point initial, cela donne

(7.11) $$f^o_{(10)} = \varepsilon (P^o + \mu M^o)$$

où

(7.12) $$P^o = \sum_{k=u,v\ldots w} (f^o_k)^2 \qquad M^o = \sum_{k=u,v\ldots w} f^o_k V^o_k$$

Afin de rendre <u>positive</u> la valeur $f^{o}_{(10)}$ que la dérivée de la fonction préférentielle, le long de la droite (avec une position constante de la droite), possédait au point initial, nous avons à écrire, comme conséquence de l'expression (7.11) :

(7.13) $$\varepsilon = \text{signe}\,(P^{o} + \mu M^{o})$$

Lorsque cette condition est respectée, nous avons

(7.14) $$f^{o}_{(10)} = \left| P^{o} + \mu M^{o} \right|$$

Si, pour un point initial constant x^{o}_{k}, nous développons ϕ_j sous forme d'une série de Taylor autour du point ($\lambda = 0$, $\mu = \mu^{o}$), il vient:

(7.15) $$\phi_j(\lambda,\mu) = \phi^{o}_j + \phi^{o}_{j(10)}\lambda + \tfrac{1}{2}\phi^{o}_{j(20)}\lambda^2 + \phi^{o}_{j(11)}\lambda(\mu-\mu^{o}) + \ldots$$

$(j = 1,2\ldots)u,v\ldots w-(\ldots n+m)$

Pour voir que le développement a cette forme, nous remarquons que nous avons, pour un point initial x^{o}_{k} donné

(7.16)
$$\phi_{j(10)} = \varepsilon(\Sigma_k \phi'_{jk} f^{o}_{k} + \mu \Sigma_k \phi'_{jk} V^{o}_{k})$$
$$\phi_{j(01)} = \varepsilon\lambda \Sigma_k \phi'_{jk} V^{o}_{k}$$
$$\phi_{j(20)} = \Sigma_k \Sigma_h \phi_{jkh} (f^{o}_{k} + \mu V^{o}_{k})(f^{o}_{h} + \mu V^{o}_{h})$$
$$\phi_{j(11)} = \varepsilon \Sigma_k \phi'_{jk} V^{o}_{k} + \lambda \Sigma_k \Sigma_h \phi'_{jkh} V^{o}_{k} (f^{o}_{h} + \mu V^{o}_{h})$$
$$\phi_{j(02)} = \lambda^2 \Sigma_k \Sigma_h \phi'_{jkh} V^{o}_{k} V^{o}_{h}$$

où Σ_k exprime une sommation portant sur $k = u,v\ldots w$, et où Σ_h a une signification similaire. Les grandeurs ϕ'_{jk} et ϕ'_{jkh} expriment les valeurs que prennent les expressions (4.4) et (4.5) lorsque $x'_u, x'_v \ldots x'_w$ définie par (7.4), remplacent $x_u, x_v \ldots x_w$.

En partant du système d'expressions (7.16), nous obtenons, pour les valeurs initiales $\lambda = 0$ et $\mu = \mu^{o}$, le système d'expressions suivant:

(7.17)
$$\phi^{o}_{j(10)} = \varepsilon(\Sigma_k \phi^{o}_{jk} f^{o}_{k} + \mu^{o} \Sigma_k \phi^{o}_{jk} V^{o}_{k})$$
$$\phi^{o}_{j(01)} = 0$$
$$\phi^{o}_{j(20)} = \Sigma_k \Sigma_h \phi^{o}_{jkh} (f^{o}_{k} + \mu^{o} V^{o}_{k})(f^{o}_{h} + \mu^{o} V^{o}_{h})$$
$$\phi^{o}_{j(11)} = \varepsilon \Sigma_k \phi^{o}_{jk} V^{o}_{k}$$
$$\phi^{o}_{j(02)} = 0$$

où ϕ^{o}_{jk} et ϕ^{o}_{jkh} sont les valeurs de (4.4) et (4.5) pour $x^{o}_{u}, x^{o}_{v} \ldots x^{o}_{w}$.

Les coefficients donnés par (7.17) sont ceux qui doivent être introduits dans (7.15).

La formule (7.15) donne les premiers termes nécessaires pour estimer ce que sera la variable dépendante x_j quand le point initial x_k^o est donné, le paramètre de direction μ de la droite ayant une valeur quelconque (dans le voisinage de la valeur μ^o qui entre dans les coefficients (7.17)) et le paramètre λ exprimant la longueur de la droite. Si nous ne nous intéressons qu'au mouvement le long d'une droite donnée dont la direction est donnée par la valeur μ^o, le dernier terme de l'expression (7.15) disparait, et l'introduction de termes plus élevés dans le développement ne ferait qu'agir sur les puissances supérieures de λ avec les coefficients $\frac{1}{r!}\ \phi^o_{j(ro)}$.

Si nous considérons le cas linéaire et nous désirons considérer seulement une droite donnée, avec un paramètre de direction μ^o donné, seuls existeront les deux premiers termes du développement (7.15), et ils donneront l'expression exacte. Cette expression se réduit à (6.9).

On peut essayer d'utiliser de la façon suivante la formule ci-dessus pour le cas général :

1°) D'abord, on effectue un essai d'exploration avec une approximation linéaire, en vue de déterminer un point d'éclatement. Cette opération a pour résultat l'obtention de valeurs (λ, μ^o)

2°) En introduisant ces résultats dans (7.15), on obtient un terme de plus, à savoir le terme en λ^2, mais le terme en $\lambda(\mu - \mu^o)$ manque encore.

3°) Ceci peut corriger l'estimation de la valeur de λ qui conduit au véritable point d'éclatement.

4°) En tenant maintenant compte du dernier terme de l'expression (7.15), nous pouvons suggérer la manière dont μ peut être modifié faire croitre la valeur finale de la fonction préférentielle, tout en demeurant dans la région admissible.

5°) Le processus peut être répété, ou bien l'on peut - comme dans le cas linéaire - penser à une ou plusieurs variables qui sont nulles au point optimum.

6°) Si la fonction préférentielle est non linéaire, il convient de contrôler si elle croit réellement d'une façon monotonique le long de la droite jusqu'au point d'éclatement. Si elle ne croit pas monotoniquement, le point où elle atteint son maximum (son maximum maximorum) peut être pris comme étant un nouveau point initial x_k^o.

PARTIE II : LA MISE EN ÉQUATION D'UNE POLITIQUE DE DÉVELOPPEMENT NATIONAL, CONSIDÉRÉE EN TANT QUE PROBLÈME D'ÉTABLISSEMENT D'UN PROGRAMME CONVEXE

8. LA LIGNE DE DÉMARCATION ENTRE LES POLITICIENS ET LES SCIENTIFIQUES

La planification économique doit se baser sur une division du travail entre les politiciens responsables et les scientifiques. Si nous nous exprimons brièvement, et donc nécessairement sans une complète précision, nous pouvons dire que le politicien doit apporter les évaluations humaines, les jugements relatifs aux valeurs sociales, tandis que la tâche du scientifique consiste objectivement à exprimer ce qu'est la situation effective, quelles sont les tendances inhérentes vers une modification, et quelles sont les conséquences auxquelles on peut s'attendre si l'on décide de mettre en vigueur telle ou telle mesure. Dans un travail tel que celui qui fait l'objet de la présente communication, la tâche du scientifique consistera simplement à adopter comme données les buts eux-mêmes que l'on s'est proposés, et les jugements des valeurs sociales qui en résultent.

Si nous nous penchons plus attentivement sur cette distinction pour l'examiner de plus près, nous constaterons évidemment - comme toujours quand il s'agit d'une question de distinctions de principe - qu'il peut être difficile d'opter entre différents cas marginaux. En dernier ressort, nous serons peut-être conduits à ne retenir que cette conclusion : les buts et les jugements portant sur les valeurs sociales sont des matières sur ce que les scientifiques désirent ne pas analyser. C'est cette partie du problème qui est trop difficile ou trop vague pour s'adapter aux méthodes des sciences exactes. La distinction devient donc jusqu'à un certain point relative et peut se modifier lorsque nous modifions l'objectif de l'analyse du problème, ou quand nous avons à notre disposition de nouveaux moyens d'analyse ou de nouveaux renseignements sur les faits. En pratique cependant, la distinction entre la tâche des politiciens et celle des scientifiques est, toutefois, assez claire.

La méthode analytique, pour un travail de planification, suivra en fait étroitement ce que prescrira le bon sens.

Le bon sens nous dicte que, si l'on désire diriger l'évolution d'un pays, il convient de considérer tout d'abord ce qu'est la situation réelle, puis ensuite de décider ce que l'on désire qu'elle devienne ; on fait alors un tour d'horizon pour considérer les possibilités grâce auxquelles on a des chances de transformer la situation existante pour aboutir à la situation que l'on désire. Ce sont bien les lignes principales que suivra le travail théorique.

Dans tous les pays sous-développés - et quel pays ne mérite pas d'être dénommé sous-développé dans un sens ou dans un autre... -

le concept de temps est particulièrement important. Sur quel laps de temps raisonnerons-nous lorsque nous entreprendrons un travail de planification économique à l'échelle nationale ? J'ai eu récemment l'occasion de travailler sur la méthodologie de la planification économique en Inde, et je me rappelle parfaitement comment le Premier Ministre, M. Nehru, au cours de l'une de nos discussions, mit l'accent sur l'énorme différence entre le problème tel qu'il apparait aux Etats-Unis et tel qu'il apparait en Inde. Aux Etats-Unis, la question qui se pose couramment est la suivante: comment peut-on répandre partout, à tous les échelons de la population, l'usage d'accessoires de haute qualité technique, par exemple comment peut-on donner son essor maximum à l'industrie de la construction des réfrigérateurs ? Pour la population indienne, au contraire, le problème numéro un, le plus urgent, est : comment préserver la population de la famine, comment peut-on constituer des réserves de grains et d'autres denrées essentielles pour l'alimentation de la population, de manière que l'on ne risque pas de se trouver contraint d'importer, à n'importe quel prix, du blé, du riz, etc. Lorsqu'on se rappelle la situation où se trouvait encore l'Inde il y a quelques années, la distinction entre les deux types de problèmes ressort à l'évidence et touche, en vérité, de très près la réalité des faits. Mais lorsqu'il apparait qu'il est, présentement, raisonnable de se désintéresser, en Inde, du problème de l'utilisation intensive des réfrigérateurs parmi la population, c'est uniquement parce que les politiciens ont jugé opportun d'attaquer chaque problème en son temps. Les politiciens responsables des destinées de l'Inde raisonnent sur un plan temporel assez vaste pour leur permettre de résoudre le problème de l'alimentation de la population, mais insuffisamment vaste pour rendre possible d'introduire dans la masse de la population des raffinements techniques tel que l'usage des réfrigérateurs. Ce problème des réfrigérateurs se présentera de lui-même, plus tard, en Inde, mais dans un avenir suffisamment éloigné pour qu'il ne soit pas nécessaire de chercher à le résoudre dès maintenant.

Jusqu'à quel point doit-on mettre l'accent sur les problèmes de la plus brûlante actualité ? C'est là une affaire d'appréciation. Afin de se former une opinion à cet égard, les politiciens responsables doivent déjà, pour ainsi dire, avoir estimé quelle serait la solution d'une analyse imaginaire d'un énorme problème dans lequel seraient considérés tous les détails possibles du présent et toutes les possibilités de l'avenir. Ainsi, dans ce cas, nous avons un exemple où la distinction entre le politicien, appréciateur des valeurs sociales, et le scientifique, travailleur objectif n'existe pas. Le politicien doit, qu'il le veuille ou non, agir sur ces deux plans à la fois, ce n'est, toutefois, que dans la toute première phase de l'analyse qu'un tel compromis existe. Pour l'étude ultérieure complète des éléments plus complexes qui ont été circonscrits par "l'horizon imaginatif du politicien", le principe de la division du travail entre le politicien et le scientifique peut être appliqué pleinement et avec sa plus grande efficacité.

Dans ces conditions, quelle sera la tâche du scientifique dans le problème de la planification économique ?

En premier lieu, nous devons exposer en pleine lumière des choses sur lesquelles il existe des renseignements puisés dans la réalité des faits. Ce qui est très important, à cet égard, c'est toute donnée entrant dans l'analyse entrées-production ("input-output") ou, d'une façon plus générale, les données analytiques relatives à toutes les transactions dans la situation économique. Non seulement avons-nous besoin de connaitre les coefficients relatifs à la production courante, c'est-à-dire les coefficients ressortant des statistiques entrées-production, qui sont les coefficients en quelque sorte classiques, mais il nous faut encore connaitre les coefficients résultant de l'analyse des statistiques de l'activité des investissements. Il nous faut étudier de quelle façon s'édifie, pour une industrie donnée quelconque, la construction des capitaux, ces moyens de production ayant leur origine dans de nombreux secteurs de l'économie intérieure du pays et créant, en outre, des nécessités de recours aux importations. Ensuite, il nous faudra considérer le temps moyen qui, selon toute vraisemblance, devra s'écouler entre l'engagement des biens investis et le moment où la nouvelle industrie sera prête à entrer en action, C'est ainsi, par exemple, que, dans le cas d'une aciérie, ce temps de maturation peut être de plusieurs années, peut-être trois ou quatre. Dans le cas de l'industrie textile, ce temps est beaucoup plus court, peut-être une année et demie. En ce qui concerne la machinerie légère, telle que, par exemple, en Inde, les métiers à tisser à main, le temps de maturation est très bref : disons de trois ou quatre mois. Ensuite, il est nécessaire de déterminer les pourcentages de dépréciation des investissements dans les différents secteurs. Et, dernière des choses mais non la moindre, il nous faut connaitre et comprendre les faits qui se trouvent à la base du taux d'accroissement de la population.

Non seulement il nous faut connaitre de tels faits relatifs à la situation existante, mais encore il faut que nous nous trouvions en possession de renseignements sur ce que nous pouvons appeler les coefficients de la production potentielle. Autrement dit, on a à compter avec les possibilités de modifications des relations des divers types de production, par exemple une nouvelle méthode de fabrication du ciment, ou le fait que ce qui, aujourd'hui, semble relever de l'acier, peut un jour être satisfait par le duralumin ou quelque autre matériau. Il peut aussi surgir de nouveaux procédés rationalisés de production, conduisant à d'importantes économies de main d'oeuvre, etc... Toutes sortes de possibilités de cette sorte doivent être décrites tout au moins dans leurs grandes lignes. Toute l'étude analytique doit être conduite selon des lignes où l'on considère simultanément les secteurs de production en activité actuelle et les secteurs potentiels.

Lorsque tous ces matériaux tirés de la réalité des faits ont été accumulés et décrits, la tâche du politicien consiste à définir ce qu'il estime, dans son "horizon imaginatif", devoir être les buts à atteindre. Non les buts relativement à la consommation finale et autres facteurs révélant directement le bien-être social. Les buts relativement aux moyens de production, c'est aux économistes, aux statisticiens et, en général, aux analystes scientifiques qu'il revient d'en discuter.

Prenons un exemple concret. Nous fixerons-nous, comme but, pour la capacité de production sidérurgique de l'Inde, 4, ou 6, ou 8 millions de tonnes par an? La méthode, qui consisterait à faire choisir cette capacité de production par les politiciens et à n'abandonner aux statisticiens et aux techniciens que le travail consistant à tirer les conséquences de ce choix pour d'autres secteurs de l'économie du pays, ne serait pas rationnelle. Le niveau optimum de la capacité de production d'acier dépend, en réalité, de centaines d'éléments qu'il s'agit d'étudier lors d'une analyse approfondie de la situation économique réelle, des buts concernant la consommation, le plein-emploi, etc. Les incidences mutuelles sont dans un tel cas si complexes que le choix <u>optimum</u> de la capacité de production de l'industrie sidérurgique ne peut être effectué d'une manière correcte que grâce à la technique du choix <u>optimum</u> des alternatives : en fait, il s'agit ici d'une technique que seuls les scientifiques sont à même de manier utilement. Par contre, les niveaux de consommation et autres facteurs révélant directement le bien-être social sont avant tout du ressort des politiciens.

Ces buts peuvent être déterminés de diverses manières. Pour quelques groupes de produits parmi le spectre de la consommation, le but peut être fixé sous forme d'une <u>limite inférieure</u>. On peut, par exemple, dire : nous désirons une production agricole qui soit au moins de tel ou tel ordre de grandeur. On peut aussi fixer une limite pour des produits agricoles bien déterminés tels que le riz, le blé et autres grains alimentaires. De même, on peut fixer une limite inférieure pour la production de produits pharmaceutiques indispensables. Cette dernière production est d'une importance économique et médicale considérable en Inde, étant donné les conditions sanitaires qui y règnent. Il est également possible que l'on puisse désirer fixer une limite inférieure pour la production textile. Disons, d'une façon plus générale, que l'on pourra fixer de telles limites en faisant rentrer les variables du problème dans plusieurs fonctions linéaires, puis en imposant les conditions que chacune de ces fonctions linéaires doit être au moins égale à une certaine limite inférieure. Un certain nombre de problèmes, par exemple l'incidence sur le budget des importations, ou l'incidence sur la main d'oeuvre dans des secteurs donnés, etc., peuvent être mis en équation selon ce principe.

D'une manière générale, on ne devrait poser de telles limites pour plus d'objectifs économiques qu'il n'est nécessaire et il n'est pas recommandable de fixer les limites inférieures plus haut qu'il n'est strictement nécessaire. Si l'on agissait autrement, on courrait un risque : c'est que l'analyse combinatoire ultérieure conduise à la réponse suivante : il n'existe aucune solution au problème ainsi posé. Il ne resterait plus, alors, qu'à recommencer la formulation des objectifs à atteindre.

Une méthode plus élastique, pour ainsi dire, de mettre en équation les objectifs à atteindre consiste à fixer certains <u>coefficients</u> d'importance pour la consommation des divers produits. Il ne s'agit pas obligatoirement de prix monétaires : on peut recourir à des coefficients d'importance d'un type quelconque. La technique opératoire consistera alors à fixer une fonction préférentielle - pour plus de simplicité, ce peut être une fonction préférentielle linéaire - puis à dire que l'on désire trouver une solution qui ait pour effet de faire maximer cette fonction préférentielle.

Pour certains groupes extrêmement importants de produits de consommation, il peut être désirable de choisir, en quelque sorte, un compromis : on fixera une limite inférieure relativement basse pour la consommation - une limite tellement basse qu'elle représente un minimum extrême - puis ensuite on fera entrer ce produit ou ce groupe de produits dans la fonction préférentielle avec un coefficient d'importance très élevé.

Grâce à une telle mise en équation raisonnable, on sera capable de traiter le problème par la méthode linéaire ou - d'une manière plus générale - par la méthode convexe des programmes.

9. L'ASPECT DYNAMIQUE DU PROBLÈME D'ÉTABLISSEMENT D'UN PROGRAMME

Un exemple démontrant la nécessité d'une méthode dynamique d'un problème d'établissement de programme lorsqu'on élabore une planification nationale est fourni par le cas de l'Inde s'efforçant de poursuivre sa voie vers l'industrialisation afin d'élever le niveau de vie de sa population. La population de l'Inde croit à un tel rythme que, chaque année, l'accroissement net de la population est considérablement supérieur à la totalité de la population de la Norvège. Il n'est pas besoin de beaucoup d'imagination pour comprendre les énormes proportions que revêt le problème du plein-emploi de la main d'oeuvre et de nombreux autres problèmes au sein d'une population s'accroissant à un tel rythme. On a pu calculer que, pour résorber le chômage actuel en Inde au cours d'une dizaine d'années environ et pour, en même temps, tenir compte de l'accroissement de la population, il faut créer quelque chose comme 2 millions d'emplois chaque année.

Il existe différents moyens d'introduire l'aspect dynamique du problème dans l'arsenal des calculs pour l'établissement d'un programme.

Une méthode consiste à tenir compte du fait que, en effectuant certains investissements au cours de la première année dans divers secteurs, il est possible de modifier les capacités de capitaux qui existeront au cours des années suivantes, et, similairement, du fait que, en effectuant certains investissements au cours de la seconde année , on modifiera à nouveau les capacités de capitaux. Ce déroulement en chaine des évènements au cours du temps peut être exprimé, par exemple, en représentant chaque grandeur par plusieurs variables, à savoir des variables pour chaque année (ou pour chaque trimestre, ou pour chaque mois). C'est là, à mon avis, un moyen plus pratique d'attaquer le problème dynamique que celui qui consiste à utiliser des courbes de temps continues caractérisées par des équations différentielles ou des moyens du même genre. N'importe laquelle de ces méthodes complètement dynamiques exige un grand travail d'analyse et de calcul, un travail énormément plus important que celui devant lequel on se trouve placé si l'on considère simplement une planification pour une année unique avec des capacités de capitaux données.

Il existe un compromis qui, à mon avis, a une meilleure chance d'être applicable en pratique avec des résultats utiles. Il consiste à distinguer deux problèmes distincts, à savoir celui que l'on peut appeler le problème asymptotique et celui qui peut être dénommé le problème de l'année prochaine.

10. LE PROBLÈME ASYMPTOTIQUE

Dans le problème asymptotique, on considère la situation qui existerait si certains critères bien définis d'accroissement équilibré étaient respectés ; dans un tel état d'accroissement équilibré les objectifs formulés par les politiciens devraient être atteints.

Ces objectifs eux-mêmes sont comme je l'ai déjà mentionné, mis en équation en se basant sur l'horizon d'imagination des politiciens. Mais lorsque ces perspectives sont fixées, nous pouvons perdre de vue le temps qu'il faudra pour les atteindre et ne penser qu'aux objectifs qu'elles enferment. En d'autres termes, nous procédons désormais à une analyse dans laquelle rentrent certains objectifs, mais au cours de laquelle nous négligeons combien de temps il peut falloir pour les atteindre.

Le principal critère caractérisant un développement équilibré consisterait évidemment dans le fait que, dans aucun secteur, il n'y ait de chômage ni de manque de main d'oeuvre. De même pour les biens capitaux fixés. A tout instant, tous les produits capitaux devraient être pleinement utilisés, mais sans qu'ils puissent agir comme goulots d'étranglement de la production, limitant le développement ultérieur. Ces deux exigences : exacte utilisation de la main-d'oeuvre partout et exacte utilisation des capitaux réels investis partout, semblent constituer une situation répondant d'aussi près que possible à une définition satisfaisante d'un développement équilibré.

Une exigence similaire doit être formulée aussi en ce qui concerne la balance importations-exportations. Nous stipulerons que les possibilités de prêts de l'étranger, destinés à favoriser le développement, soient exactement utilisées, sans qu'elles puissent exercer ultérieurement une pression sur la balance des paiements.

Lorsqu'il est exigé que l'état asymptotique soit équilibré dans ce sens, il est clair que les investissements qui devront être effectués dans un certain secteur au cours d'une année donnée quelconque devront être d'une importance bien définie. Ces investissements devront être juste assez importants pour garantir que, avec le temps de maturation caractérisant le secteur considéré et son temps de dépréciation, la capacité totale de capitaux au moment où ces investissements sont prêts à participer à la production sera exactement assez importante pour correspondre à la production totale et à la totalité de la main d'oeuvre dans ce secteur au moment considéré. Par exemple, il est clair que plus le taux d'accroissement de la population est élevé et plus est long le temps de maturation, plus doit être important le pourcentage du revenu national annuel qui doit être mis de côté pour alimenter les investissements.

Il semble, à première vue, que les relations mutuelles qui lient ces diverses grandeurs soient trop compliquées pour être abordables à l'analyse. Mais un plus ample examen démontre qu'il est possible, par des moyens qui ne sont pas trop compliqués, d'édifier une théorie de ces relations et d'effectuer des calculs qui reflètent la réalité des faits dans le cadre de l'établissement des programmes par la méthode linéaire.

Il apparait que le problème peut être transformé de telle manière que, au lieu du problème dynamique relatif à la forme des courbes en fonction du temps décrivant l'évolution dans l'état équilibré, nous aboutissions au problème correspondant considérant certaines amplitudes constantes des composantes dans les courbes en fonction du temps reflétant l'évolution asymptotique. Bien que ces amplitudes soient constantes dans le temps, elles peuvent, évidemment, admettre des valeurs différentes et le choix de ces différentes valeurs est exactement ce que la méthode linéaire d'établissement d'un programme permet de nous aider à déterminer. De cette manière, le problème se trouve ramené à une forme statique d'établissement de programme par la méthode linéaire - ou plus généralement - par la méthode convexe.

Dans le problème asymptotique, il semblerait que ce soit une approximation raisonnable d'admettre que toutes les courbes en fonction du temps, dans l'état asymptotique, correspondent à une expression de la forme

$$Z^t = Z_1 e^{c_1 t} + Z_2 e^{c_2 t} + \dots + Z_m e^{c_m t} \tag{10.1}$$

où Z_1, Z_2 ... Z_m sont m constantes caractérisant le niveau Z^t soit de production ou de consommation, etc. (qui est variable avec le temps), et où c_1, c_2 etc... sont m constantes caractérisant l'expansion de l'économie dans son ensemble, c'est-à-dire indépendamment du niveau particulier de production ou de consommation etc. que nous considérons. L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que le développement est exponentiel, c'est-à-dire que l'expression (10.1) se borne à un terme. Si cette hypothèse est admise, la seule chose qui distinguerait une des variables d'une autre serait l'amplitude Z_1 qui caractérise cette variable. Ces amplitudes constituent alors les objectifs de l'analyse conduisant à l'établissement du programme par la méthode linéaire. Si plusieurs termes étaient présents, le caractère linéaire de l'analyse ne s'en trouverait cependant pas modifié.

Nous allons maintenant indiquer brièvement, à titre d'exemple, la façon de conduire une analyse de cette sorte. Considérons un problème asymptotique comportant 26 degrés de liberté. Nous pouvons choisir, comme variables fondamentales, les produits totaux $X_1 \ldots X_{22}$ dans 22 secteurs de production aussi bien que les investissements globaux J_{23} effectués dans les familles et les investissements J_{24} réalisés par les administrations gouvernementales, X_{24} représentant l'utilisation totale gouvernementale des produits et services sur les comptes courants et X_{26} les exportations totales (1). En fonction de ces variables fondamentales, la consommation C_k des produits livrés par les divers secteurs de l'économie peut être exprimée sous la forme suivante :

$$(10.2) \quad C_k = \sum_{h=1,2\ldots 22} \bar{M}_{kh} X_h - B_{k,23}\, J_{.23} - B_{k,24}\, J_{.24} - A_{k,24}\, X_{24} - A_{k,26}\, X_{26} \qquad (k = 1,2\ldots 22)$$

où les coefficients constants sont donnés par :

$$(10.3) \quad \bar{M}_{kh} = (e_{kh} - A_{kh}) - B_{kh}\, e^{cs_h}(e^{cb_h} - (b_h - d_h)) \qquad \begin{matrix}(k = 1,2\ldots 22)\\(h = 1,2\ldots 22)\end{matrix}$$

Les divers coefficients de cette expression ont ici les significations suivantes :

A_{kh} sont les coefficients habituels entrées-production ("input-output") de l'activité des comptes courants.

B_{kh} est le pourcentage de l'ensemble des investissements consacré à l'équipement en capitaux du secteur h qui prend sa source dans le secteur k.

c est l'indice d'accroissement de la population.

S_h est le laps de temps de maturation dans le secteur h.

b_h est le coefficient de capital dans le secteur h, c'est-à-dire le rapport entre l'équipement total en capitaux dans ce secteur et la production totale en compte courant dans le secteur.

d_h est le taux de dépréciation dans le secteur h, c'est-à-dire le rapport entre la dépréciation totale dans ce secteur et la production totale dans le secteur.

Si les consommations totales de produits C_k provenant du secteur k sont déterminées par (10.2), tous les autres paramètres de notre exemple peuvent être déterminés.

Ce qui précède ne donne que les <u>relations structurales</u> dans le système. Il nous reste ensuite à considérer les frontières limitant la variation. Il était imposé comme limites que la consommation des produits agricoles et des produits de l'élevage par tête d'habitant ne devait pas tomber au-dessous de ce qu'elle était au cours de la période de base 1950-51. Une hypothèse similaire était posée pour la production textile, à grande échelle et à petite échelle, et aussi pour les services des immeubles. Finalement, il fut imposé une certaine

(1) La variable X_{25} n'entre pas.

limite pour la taxation des familles. Il n'existera pas de limites de capacité dans le problème asymptotique parceque les capacités sont - par suite des conditions d'équilibrage de l'état asymptotique - constamment et par définition égales à ce qu'il est nécessaire qu'elles soient compte tenu des besoins.

Le problème de la réalisation du maximum dans l'état asymptotique était simplement formulé comme étant celui consistant à porter au maximum la consommation totale.

Grâce à la résolution d'un tel problème de l'état asymptotique, il sera possible, entre autres choses, de déterminer les différences entre les valeurs, dans l'état asymptotique, des capacités de capitaux et les valeurs des capacités de capitaux existant aujourd'hui.

11. LE PROBLÈME DE L'ANNÉE PROCHAINE

Lorsque la configuration de l'état asymptotique est décrite, la solution du problème de l'état asymptotique étant trouvée - ce qui signifie que, entre autres choses, on a pu déterminer les valeurs asymptotiques des capacités de capitaux - il surgit une question : comment réaliser cet état asymptotique. Il s'agit ici d'un nouveau problème qui peut à son tour être mis en équation pour faire l'objet d'un programme. Comme paramètre d'action pour la politique de l'année à venir, il convient de considérer les investissements dans divers secteurs. Ces investissements ont été désignés par le symbole $J_{.h}$, h étant le secteur dans lequel ont été effectués les investissements de capitaux d'équipement. Pour les besoins de planification il est, bien entendu, beaucoup plus pertinent de considérer comme paramètres les investissements dans les divers secteurs que la livraison des produits d'investissements provenant de divers secteurs, de telle sorte que nous utilisons $J_{.h}$ comme paramètre d'action.

Notre système, dans l'exemple, comporte 25 degrés de liberté et nos équations étaient de la forme suivante

$$(11.1) \qquad X_i = \sum_{h=1,2\ldots 24} M_{ih}\, J_{.h} + M_{i,26}\, E \quad (i = 1,2\ldots 22,24,26)$$

où

$$(11.2) \qquad M_{ih} = \sum_{k=1,2\ldots)25(26} (e_{ik} - A_{ik})^{-1}\, B_{kh}$$

$$(11.3) \qquad M_{i,26} = (e_{i,26} - A_{i,26})^{-1}$$

et E est l'excédent d'exportations.

Le fait que l'expression du membre de droite de (11.1) soit homogène, c'est-à-dire ne comporte aucun terme indépendant de J et de E montre que dans les conditions présentes du système aucune activité sur les comptes courants n'est possible en l'absence d'un certain degré d'investissements ou d'excédent d'exportations. Ceci constitue un aspect de la combinaison qui est bien conforme à la réalité des faits. Il illustre une caractéristique fondamentale d'une économie capitaliste, dans laquelle la consommation s'effectue grâce à la demande des consommateurs, demande qui est fonction d'un pouvoir d'achat réparti sous forme de rémunérations aux facteurs primaires de la production.

Les équations ci-dessus (11.1) - (11.3) expriment seulement la solution qui apparaitrait si les capacités de capitaux, la main d'oeuvre et les objets importés étaient disponibles en quantités suffisantes. Pour que nos calculs soient bien conformes à la réalité des faits, il nous faut tenir compte du fait que les capacités de capitaux dans les divers secteurs peuvent être limités, de telle sorte que le niveau des activités comporte certaines limites supérieures. Ceci peut être exprimé sous la forme d'inégalités linéaires. Il convient aussi de considérer des limites exprimant l'immobilité de la main d'oeuvre.

Finalement, il convenait d'introduire une condition ayant pour effet de traduire que la consommation, au cours de la prochaine année, ne devait pas tomber au-dessous du niveau total de consommation, par tête d'habitant, correspondant à la période 1950-51. Des limites similaires étaient spécifiées pour chacun des trois groupes de consommation : 1°) agriculture et élevage, 2°) consommation de produits textiles provenant de la production à grande échelle et de la production à petite échelle considérées ensemble, 3°) service des immeubles.

Dans le problème de l'année prochaine, la mise en équation de la fonction préférentielle est d'un type plus compliqué que dans le problème asymptotique. Il y a trois choses principales à ne pas perdre de vue : 1°) Faire décroitre le chômage, 2°) Se rapprocher de la structure du capital dans l'état asymptotique, et, 3°) Sauvegarder l'équilibre des paiements. Il n'est pas nécessaire de faire entrer, à ce stade, la consommation dans la fonction préférentielle, car, par les limites imposées, il a déjà été tenu compte des principaux aspects de la consommation.

Après avoir pris en considération les indicatifs des opinions ayant cours parmi les politiciens dirigeants, la fonction préférentielle suivante fut mise en équation :

$$f = 16u + 4v + w \tag{11.4}$$

où

$$u = \frac{142,339}{8422,45}(X_{23} - X_{23}^{o}) \tag{11.5}$$

$$v = \frac{\sum_{k=1,2\ldots 22}(\bar{K}_k - K_k^{o})(J_{.k} - D_k)}{96,5202 \sum_{k=1,2\ldots 22}(\bar{K}_k - K_k^{o})} \tag{11.6}$$

$$w = 100\,\frac{88,72}{675,33}\,X_{26} \tag{11.7}$$

Ici, X_{23} représente la consommation familiale totale, $\bar{K}_k$ est la grandeur asymptotique de l'ensemble des capitaux, dans le secteur k, $J_{.k}$ représente la totalité des investissements à l'intérieur dudit secteur k, et D_k représente la dépréciation dans le secteur k ; X_{26} est la totalité des exportations. La notation o en exposant indique la période 1950-51.

Dans ce qui précède, nous n'avons bien entendu exposé le modèle employé que sous une forme extrêmement condensée. Plusieurs détails d'une importance considérable ont dû être pris en considération pour permettre de refléter le véritable aspect de la situation.

De plus, le modèle utilisé ici n'est, en lui-même, qu'un schéma très simplifié. Pour que le travail tienne compte de très près de la réalité des faits, le modèle mathématique doit être plus complexe.

INTERVENTIONS

M. HAHN.- (1) N'ayant pas eu l'occasion de lire le mémoire soigneusement, il ne me semble pas évident qu'il y aura convergence parce que la fonction préférentielle n'est pas linéaire.

(2) Vous avez justement dit que la méthode logarithmique évite dans la plus grande mesure possible le dangereux problème de la méthode simplex. Mais ce ne me parait pas une raison pour que, dans cette nouvelle méthode, nous ne nous trouvions pas périodiquement à la fin de la série, là où des problèmes analogues peuvent se poser.

M. GUILBAUD.- Comment expliquer les avantages de la méthode du logarithme potentiel sur la méthode classique du simplex dans les programmes linéaires. Cela tient-il à la simplicité des calculs.