LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PROGRAMME LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE

par

M. Ragnar FRISCH

Université d'Oslo

Dans le 3ème cahier du séminaire, ont été rassemblés divers mémoires consacrés aux modèles économétriques ; parmi ceux-ci, figurait un exposé de M. Pierre MAILLET sur les relations inter-industrielles, illustrées par le damier de LEONTIEF. En vue de compléter cet ensemble, nous avons cru devoir insérer dans le 4ème cahier un mémoire de M. Ragnar FRISCH portant sur la mise en oeuvre du programme linéaire ; l'auteur y a bien marqué la nature des préoccupations qui permettent d'établir un lien entre ces deux ordres de problèmes.

Le nom de M. Ragnar FRISCH, professeur à l'Université d'Oslo, est trop connu de ceux qui, en maints pays, participent aux progrès de l'économétrie, pour que nous éprouvions le besoin de le présenter au lecteur français. Disons seulement, que, sans lui, sans ses propres recherches, sans une action personnelle de tous les instants, ayant trait aux applications comme à la méthode, cette jeune et vigoureuse discipline n'en serait certainement pas au point où elle est parvenue après un quart de siècle d'efforts. Que M. FRISCH veuille bien également trouver ici l'amicale expression de notre gratitude pour sa précieuse contribution à ce cahier.

L'auteur ayant pris soin de rappeler brièvement les principes de la méthode couramment désignée "programme linéaire", nous pensons qu'il est inutile de revenir sur ce point, sinon pour insister sur sa portée extrêmement générale et sur l'étendue de son domaine d'application. A cet égard, nous ne pouvons mieux faire que reproduire ce passage très caractéristique du mémoire :

"Si un certain nombre de degrés de liberté est encore disponible après avoir imposé toutes ces conditions - comme c'est habituellement le cas - le problème de la formulation de la politique est complété par la condition qu'une certaine fonction linéaire des variables (par exemple le produit national net ou quelque compromis entre le produit national net et un indice de non-dissymétrie de la distribution du revenu) soit maximale." L'objectif étant ainsi nettement défini, reste la mise en oeuvre de la méthode qui s'avère laborieuse dès que l'on se trouve en présence de modèles comportant un grand nombre de variables. Après avoir sommairement rappelé le principe de la technique dénommée "simplexe" et noté ses inconvénients, M. FRISCH expose les grandes lignes du procédé qu'il a conçu et utilisé sous le nom de potentiel logarithmique". Toutes les indications nécessaires étant données dans le mémoire, quant à l'intérêt du nouveau procédé, nous n'y ajouterons aucun commentaire.

Afin que le lecteur puisse recueillir directement l'écho des discussions auxquelles a donné lieu cet exposé, nous y avons annexé le procès-verbal des échanges de vues qui l'ont suivi. La lecture de ce document ouvre déjà bien des perspectives sur la puissance de la méthode et sur ses modalités d'application.

R. R.

I. INTRODUCTION - UTILISATION DES PROGRAMMES LINÉAIRES DANS LES PROBLÈMES DE PLANIFICATION MACROÉCONOMIQUES

Je suis convaincu que la technique des programmes linéaires va jouer un rôle extrêmement important dans les années à venir pour les planifications macroéconomiques. Un pays qui utilisera cette technique sera je crois, dans une bien meilleure position pour diriger sa politique de planification nationale sur des principes solides et déterminer la combinaison optimale des alternatives de cette politique économique qui correspond le mieux à ce que le pays désire véritablement. Et, naturellement, un tel pays aura une position concurrentielle bien meilleure dans les discussions économiques internationales, parce qu'il aura une image plus claire des faits et de ce que le pays peut ou ne peut pas accomplir.

Dans le domaine macroéconomique je crois qu'on ne trouve pas pratique d'aborder l'ensemble du problème ab novo en terme de programme linéaire. La technique des programmes linéaires est plutôt destinée à être utilisée dans le domaine macroéconomique comme un supplément de la technique des matrices de flux (input-output technique).

Voici quelques unes des raisons pour lesquelles je pense que ce supplément est indispensable :

1) L'analyse usuelle des matrices de flux (input-output analysis) (fondée sur l'inversion de la matrice des coefficients supposés donnés) ne tient pas compte du fait que des changements désirés dans les flux peuvent être empêchés par des limitations de capacités ou d'autres goulots provenant de limitations des investissements dans certains secteurs industriels, d'une main d'oeuvre spécialisée en quantité limitée, de réserves limitées pour les échanges internationaux (ou pour certaines sortes d'échanges internationaux). Toutes ces limitations peuvent en première approximation être traités systématiquement par l'introduction d'inégalités linéaires en plus des équations linéaires obtenues par l'approche habituelle des problèmes de flux (input-output approach).

2) Le problème de substitution des facteurs - qui consiste à remplacer dans certaines limites techniques un facteur par un autre - ne peut pas être traité d'une manière satisfaisante par la technique habituelle des matrices de flux. Ce problème est particulièrement important lorsque l'on considère des alternatives de politique économique très variées comme par exemple lorsqu'on envisage d'introduire de nouvelles matières premières à la place des matières classiques ou de modifier plus ou moins les détails de procédés de fabrications. Ces problèmes peuvent être traités systématiquement si l'on remplace les hypothèses habituelles sur les coefficients constants des matrices par l'hypothèse que quelques-uns des coefficients ne sont pas donnés individuellement, mais seulement assujettis à la condition de satisfaire un système d'équations linéaires qui laisse certains degrés de liberté aux coefficients des flux; la possibilité de variation des coefficients étant limitée par certaines inégalités linéaires, que les coefficients des relations entre les éléments de la matrice doivent satisfaire, pour des raisons techniques. De telles limitations dans les coefficients de la matrice constituent un concept plus général remplaçant les hypothèses habituelles de coefficients techniques donnés.

3) Le problème des produits liés peut être traité d'une manière similaire, en introduisant des inégalités linéaires. Le problème des produits liés peut en un sens être évité (au moins en principe) par un découpage plus poussé des secteurs industriels, mais il résulterait alors de ceci un accroissement du nombre de substitutions possibles entre les produits considérés comme facteurs de productions pour d'autres industries, et en conséquence un nombre plus grand d'inégalités linéaires de type 2 serait nécessaire. En tous cas des inégalités soit du type 2 soit du type 3 seront nécessaires pour une application réaliste à des problèmes où un changement technique est de grande importance.

4) Si l'on considère plusieurs alternatives de nouveaux procédés pour des industries de base, par exemple, pour établir entièrement de nouvelles industries -éventuellement sur une grande échelle - ces alternatives doivent entrer dans l'analyse de la matrice des flux comme des secteurs de production potentiels, le volume de production (éventuellement nul) de ces secteurs étant déterminé par la solution optimale du problème de planification.

5) La prise en compte des buts sociaux humanitaires et politiques peut être effectuée approximativement sous forme d'inégalités linéaires que les variables doivent satisfaire. On peut imposer par exemple que les revenus du travail représentent au moins un certain pourcentage du revenu national, ou que le montant global du pouvoir d'achat réel de chaque groupe dans un découpage de la population en groupes sociaux, soit au moins égal à un certain chiffre, etc...

Tous les types de problèmes ci-dessus conduisent directement à la technique des programmes linéaires. Si un certain nombre de degrés de liberté est encore disponible après avoir imposé toutes ces conditions - comme c'est habituellement le cas - le problème de la formulation de la politique est complété par la condition qu'une certaine fonction linéaire des variables (par exemple, le produit national net ou quelque compromis entre le produit national net et un indice de non-dissymétrie de la distribution du revenu) soit maximale.

Depuis quelques temps le travail de recherches a été poussé à l' Institut Economique de l'Université d'Oslo, selon ces directions. Un premier rapport sur les résultats ("Input-output analysis") fut présenté à la conférence de Varenne (Côme, Italie) en Juin-Juillet 1954 (Mémoire ronéotypé du 21 juin 1954 de l'Institut d'Oslo). Par la suite le travail a été poussé considérablement plus loin. Quelques-uns des résultats des plus récents sont contenus dans un grand mémoire du 18 octobre 1954 de l'Institut Economique de l'Université d'Oslo, ainsi que dans d'autres mémoires jusque là confidentiels établis pour l'Institut Statistique Indien de Calcutta où je dirigeais des groupes de recherche sur ce type de problèmes de la fin 1954 jusqu'au printemps 1955.

Le but de nos efforts a été de développer une méthode ou plusieurs méthodes qui conduise à moins de travail que la méthode simplexe maintenant classique, particulièrement dans les problèmes de planification macroéconomique. Dans le cours de nos recherches nous avons expérimenté une grande variété de méthodes et d'idées. Je décrirai brièvement la méthode que nous préférons à l'heure actuelle. La méthode est tout d'abord adaptée pour le cas où l'on a seulement à disposition des machines de bureau (calculatrices et additionneuses imprimantes) où des calculatrices électroniques avec une mémoire si faible qu'un nombre considérable de perforations ou beaucoup de travail manuel serait nécessaire même pour un problème relativement restreint.

Ce qui suit ne donne aucune démonstration et est limité aux principaux points seulement. Des considérations et des preuves théoriques plus approfondies ainsi que les méthodes alternatives et les détails concernant les calculs sont donnés dans les mémoires mentionnés, et seront complétés dans un livre en préparation.

II. LA FORMULATION MATHÉMATIQUE D'UN PROGRAMME LINÉAIRE

Nous considérons N variables $x_1\ x_2 \ldots\ x_N$ qui sont assujetties à la condition de satisfaire m équations linéaires indépendantes ($m \leqslant N$).

(2.1) $$a_{i0} + a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{iN}\, x_N = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

où les coefficients a sont supposés constants.

Le nombre de degrés de liberté dans le système est $n = N - m$ et il est toujours possible, au moins d'une façon de choisir un ensemble de n variables linéairement indépendantes, supposons que ce soit les variables de rang u, v...w, de telle sorte que les $m = N - n$ variables restantes puissent être exprimées linéairement en fonction des variables de rang u, v... w. Nous appellerons cet ensemble l'<u>ensemble de base</u> (basis set). Les m équations (2.1) peuvent alors être écrites sous la forme de (1)

(2.2) $$x_j = b_{j0} + \sum_{k=u,v,w} b_{jk}\, x_k \quad \big(j = 1, 2 \ldots)\, u, v \ldots w\, (\ldots n + m \big)$$

Si l'on préfère, on peut bien sûr, généraliser (2.2) pour qu'elle puisse s'étendre à j = u, v... w si l'on pose par convention :

(2.3) $$b_{j0} = 0 \qquad b_{jk} = \begin{bmatrix} 1 \text{ lorsque } k = j \\ 0 \text{ lorsque } k \neq j \end{bmatrix} \qquad (j = u, v \ldots w)$$

Dans ce qui suit nous supposerons que les équations sont données sous la forme de base (2.2). Si (2.2) est la forme donnée à l'origine aux équations, les variables de rand u, v... w ne peuvent jamais être linéairement dépendantes (à cause de ces équations).

Outre les <u>équations</u> linéaires ci-dessus entre les variables nous considérons aussi les <u>inégalités</u> :

(2.4) $$x_i \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n + m)$$

En d'autres termes toutes les variables sont assujetties à la condition d'être non négatives.

(1) Dans ce qui suit nous utiliserons les parenthèses inversées) (pour désigner l'exclusion.

Si l'une des variables dans un problème particulier n'est pas assujettie à une telle limitation, le problème peut être réduit en utilisant l'une des équations pour éliminer la variable qui n'est pas limitée. Nous pouvons toujours ainsi nous ramener à un problème où nos n + m variables x_1, $x_2 \ldots x_{n+m}$ sont assujetties à la condition de satisfaire les m équations (2.2), c'est-à-dire d'avoir n degrés de liberté, toutes les variables étant assujetties à la condition de non négativité (2.4).

L'ensemble de points satisfaisant (2.2) et (2.4), sera appelé la région admissible. En particulier nous parlerons de la région admissible dans l'espace à n dimensions $(x_u, x_v \ldots x_w)$ comme l'ensemble des valeurs des n variables fondamentales pour lesquelles (2.2) et (2.4) sont satisfaites.

Le problème consiste à trouver le ou les points de la région admissible pour lesquels une fonction de préférence

(2.5) $$f = p_u x_u + p_v x_v + \ldots + p_w x_w$$

où les coefficients p sont donnés constants, positifs, négatifs ou nuls, atteint son maximum, c'est-à-dire, atteint une valeur telle que la fonction de préférence ne puisse pas dépasser cette valeur en tout autre point de la région admissible.

Il n'y a pas de restriction à la généralité à supposer que la fonction de préférence ne contienne aucune des variables dépendantes x_j $(j = 1, 2 \ldots)$ u, v... w (... n + m). Naturellement, si elle contenait l'une de ces variable on pourrait la remplacer d'après (2.2), et obtenir ainsi la forme fondamentale (2.5) de la fonction de préférence.

Tous les problèmes de programme linéaire et en particulier tous ceux de la macroéconomie peuvent être transformés sous la forme ci-dessus. Les principes de cette transformation sont simples, mais l'expérience a prouvé qu'il est extrêmement difficile en pratique de passer par tous les stades de cette transformation dans un problème quelque peu général sans faire de faux pas. A chaque pas de cette transformation on doit travailler avec précaution et vérifier puis revérifier tous les détails, particulièrement ceux qui apparaissent les plus simples et les plus évidents. Je puis dire que la partie réellement difficile d'un grand problème de planification macroéconomique est de le traduire sans erreur sous la forme de base.

III. LA STRUCTURE DE LA SOLUTION

Un aspect fondamental des problèmes du programme linéaire formulés ci-dessus est que la région admissible est convexe, c'est-à-dire que si $(x'_u, x'_v \ldots x'_w)$ et $(x''_u, x''_v \ldots x''_w)$ sont deux points quelconques de la région admissible, tout point $(x_u, x_v \ldots x_w)$ situé sur la ligne droite joignant les deux points ci-dessus appartiendra aussi à la région admissible. Ce fait est d'une grande aide dans le travail. Dans certains problèmes de programme non linéaire, la région admissible n'est pas convexe et ceci peut introduire des difficultés considérables.

L'ensemble optimal c'est-à-dire l'ensemble de points de la région admissible où la fonction de préférence atteint la valeur maximale qu'elle peut prendre dans cette région, doit toujours être sur la frontière de la région admissible, c'est à dire qu'il doit être tel que l'une au moins des n + m variables de rang 1,2... n + m soit égale à zéro. Le nombre de dimensions δ de l'ensemble optimal c'est-à-dire

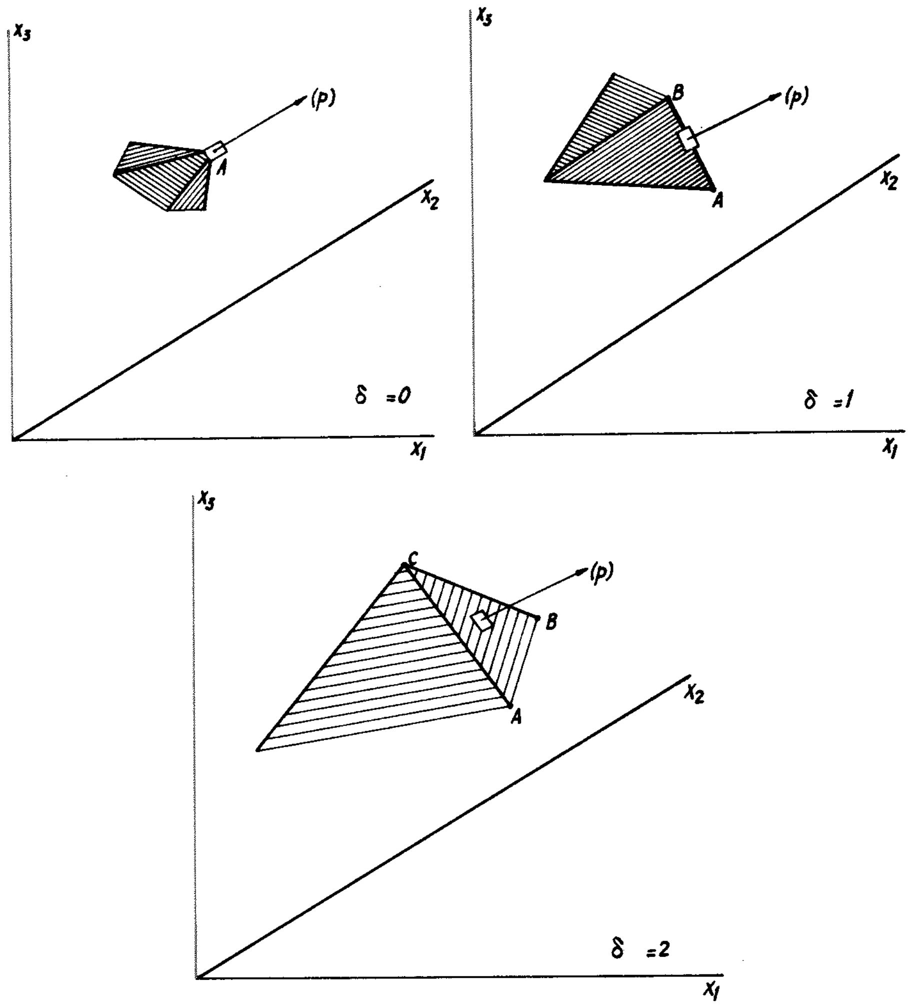

Fig. 3.1

le nombre de degrés de liberté de cet ensemble, peut être l'un quelconque des nombres δ = 0,1 ... (n - 1). Le cas δ = 0 signifie qu'il y a seulement un coin bien défini sur la limite de la région admissible où la fonction de préférence atteint sa valeur maximale, le cas δ = 1 signifie que l'optimum est atteint tout au long d'un côté qui relie deux coins, etc... La figure (3.1) illustre le cas n = 3 et δ = 0,1,2.

Quel que soit le nombre de dimensions de l'ensemble optimal il existe au moins un coin avec des propriétés d'optimum, c'est-à-dire au moins un point optimal qui est tel que en ce point au moins n des variables soient nulles. Plus précisément : si $\delta = 0$, il existe un et seulement un coin optimal, si $\delta = 1$ il existe exactement deux points optimaux et en général si δ est un nombre donné quelconque ($\delta < n$) il existe $\delta + 1$ coins optimaux.

IV. LA MÉTHODE SIMPLEXE

La difficulté fondamentale rencontrée dans un problème de programme linéaire par rapport à celle d'un problème de maximum de type plus habituel, est que dans le cas du programme linéaire, le gradient (la normale) le long de la limite de la région admissible ne varie pas d'une manière continue. Il fait des sauts lorsque l'on passe en un coin ou sur un autre côté etc... Ceci exclut l'utilisation de techniques telles que les multiplicateurs de Lagrange ou tout autre similaire. On doit traiter le problème par un chemin entièrement différent.

La méthode simplexe consiste essentiellement en premier lieu à chercher un coin quelconque de la région admissible et ensuite à se déplacer d'une manière systématique le long des côtés d'un coin à un autre jusqu'à ce que soit atteint un coin optimal.

Une difficulté importante de ce processus est que, au cours du travail l'on peut de temps en temps atteindre un coin surdéterminé ("multiply determined corner"), c'est-à-dire un point où n variables linéairement indépendantes sont nulles ainsi que quelques autres de telle sorte que le nombre total de variables nulles est plus grand que n. Il est possible qu'un coin optimal puisse lui-même être surdéterminé. Dans ce dernier cas il se peut - bien que nous soyons en un point optimal - qu'il soit laborieux de savoir s'il est réellement optimal ou non. Le cas où l'on rencontre un ou plusieurs coins surdéterminés est appelé dans la théorie de la méthode simplexe "dégénérescence". Le terme n'est pas très descriptif de ce qu'il désigne véritablement, et il semble que "coin surdéterminé" désigne mieux la situation.

V. LA MÉTHODE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE

Ma méthode d'approche est d'une espèce toute différente. Dans cette méthode nous travaillons systématiquement à l'intérieur de la région admissible et utilisons un potentiel logarithmique comme un guide - une sorte de radar - pour nous éviter de traverser la limite. Ce qui suit est une très brève indication de l'une des voies possibles dans laquelle cette idée peut être employée. Des détails sont donnés dans les mémoires mentionnés ci-dessus.

Nous définissons le potentiel :

$$V(x_u, x_v \ldots x_w) = \sum_{k=u,v\ldots w} \log x_k + \sum_{j=1,2\ldots)u,v,w(n+m} \log x_j \tag{5.1}$$

En d'autres termes le potentiel est simplement la somme de logarithmes de toutes les variables, variables fondamentales aussi bien que variables dépendantes. Ce potentiel est continu et a des dérivés partielles continues de tous ordres partout à l'intérieur de la région admissible, mais lorsque nous approchons un point quelconque de la limite, le potentiel tend vers $-\infty$.

Nous considérons ce potentiel comme une fonction des n variables fondamentales et nous utilisons les dérivés partielles :

(5.2) $$V_k = \frac{\delta V}{\delta x_k} = \frac{1}{x_k} + \sum_{j=1,2..)u,v...w(...n+m} \frac{b_{jk}}{x_j} \quad (k = u, v \ldots w)$$

Le vecteur dont les composantes sont (5.2) est le gradient du potentiel V.

Nous considérons aussi le gradient de préférence, c'est-à-dire le vecteur dont les composantes sont p_k $(k = u, v \ldots w)$.

Ces deux gradients définissent deux directions différentes dans lesquelles il est en un certain sens désirable de se déplacer. Pour accroitre la fonction de préférence nous devons aller dans la direction p , mais pour se maintenir loin de la limite nous devons aller dans la direction V_k. La solution optimale consiste en un sage compromis entre un mouvement dans la direction (à l'intérieur de l'espace des facteurs de production) dans laquelle le produit s'accroit plus rapidement et un mouvement dans la direction pour laquelle le prix décroit le plus rapidement.

Ce qui suit est un processus pour établir un tel compromis dans les problèmes de planification.

Ce processus est apparu à la suite de raisonnements théoriques combinés à un certain nombre de calculs numériques expérimentés sur des problèmes de dimensions moyennes.

VI. LA RECHERCHE D'UN POINT DANS LA RÉGION ADMISSIBLE

Nous commençons par rechercher un point dans la région admissible. Si ceci ne peut être fait rapidement par essai, on utilise la procédure systématique.

Partir d'un point où l'une ou plus des variables (variables fondamentales ou variables dépendantes) sont réellement négatives. Déterminer l'ensemble des variables qui sont négatives en ce point initial. Si plus de n variables sont négatives, choisir parmi elles les n variables qui apparaissent le "plus dangereusement négatives", et sont linéairement indépendantes. Nous désirons déterminer un point où toutes ces variables choisies sont nulles.

Supposons que l'ensemble de ces variables choisies soit constitué par ν variables fondamentales de rang R, S... T et μ . variables dépendantes de rang r, s ... t, où $\nu + \mu \leqslant n$. On suppose que les μ variables dépendantes de rang r, s .. t sont linéairement indépendantes même après que celles de rang R, S... T aient été égalées à zéro (autrement les conditions pour que les μ variables de rang r, s ... t soient nulles, seraient, soit incompatibles, soit surabondantes).

Supposons que les μ variables de base de rang A, B... C (différentes des ν variables de base de rang R, S... T) soient telles que le déterminant d'ordre μ

$$(6.1) \qquad \begin{vmatrix} b_{rA} & b_{rB} & \dots & b_{rC} \\ b_{sA} & b_{sB} & \dots & b_{sC} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{tA} & b_{tB} & \dots & b_{tC} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Un tel ensemble de μ variables A, B...C existe toujours lorsque les μ variables de rang r, s... t sont linéairement dépendantes même après que les ν variables de base de rang R, S... T aient été prises égales à zéro. S'il reste encore quelques variables de base, c'est-à-dire si $\nu + \mu < n$, nous choisissons arbitrairement des valeurs pour elles, par exemple les valeurs qu'elles avaient au point initial. Les valeurs $\overline{x}_K$ des μ variables de rang A, B ... C seront alors déterminées par le système linéaire non singulier

$$(6.2) \qquad \sum_{K=AB\dots C} b_{iK} \; \overline{x}_K = - b_{io} - \sum_{h=u,v..)RS..TAB..C(..w} b_{ih} \; \overline{x}_h \quad (i = r, s \dots t)$$

Déterminer les μ valeurs $\overline{x}_K$ nécessite une solution unique (par une inversion) du système linéaire (6.2) à μ dimensions. Si la matrice des coefficients contient plusieurs éléments nuls, il serait avantageux d'utiliser la méthode d'élimination décrite dans le mémoire du 5 Mai 1955 de l'Institut Economique de l'Université d'Oslo ("The élimination méthod for solving linear equations"). Cette méthode sera dans ce cas préférable à l'élimination Gaussienne et aussi à une méthode d'itération.

Le point $\overline{x}_k (k = u, v \dots w)$ où $\overline{x}_R = \overline{x}_S = \dots \overline{x}_T = 0$, où $\overline{x}_h \big(h = u, v \dots) RS \dots TAB \dots C(\dots w\big)$ sont arbitrairement donnés et $\overline{x}_K (K = A, B \dots C)$ déterminé par (6.2), peut être appelé le <u>point directionel</u> (directional point). Les nombres :

$$(6.3) \qquad d_k = \overline{x}_k - x_k^{\circ} \quad (k = u, v \dots w)$$

où $x_k^{\circ} (k = u, v \dots w)$ sont les coordonnées du point initial peuvent être appelés les <u>coefficients de direction</u> (direction numbers).

A partir du point initial x_k° nous nous déplaçons dans la direction (6.3), c'est à dire nous déterminons les coordonnées :

$$(6.4) \qquad x_k = x_k^{\circ} + \lambda \, d_k \quad (k = u, v \dots w)$$

du point courant x_k le long du chemin. Lorsque nous nous déplaçons à partir du point initial quelques-unes des variables qui étaient négatives à l'origine peuvent devenir positives et certaines qui étaient à l'origine positives peuvent devenir négatives et les valeurs absolues de toutes ces variables changeront en général. Un principe rationnel semble être de se déplacer jusqu'à ce que l'indicateur :

(6.5) $S(\lambda)$ = somme des valeurs absolues des variables qui sont négatives, devienne minimal.

A priori on penserait que la détermination de la valeur de λ qui rend (6.5) minimal est compliquée et laborieuse étant donné le grand nombre de variables. En vérité on peut développer pour cette détermination une algorithme très simple. Elle est décrite dans le mémoire mentionné ci-dessus : "Principle of Linear Programming" .

Si du premier coup cette méthode ne conduit pas en un point λ où $S(\lambda) = 0$, un second essai et peut être plusieurs seront nécessaires. Dans tous les exemples étudiés le méthode a effectivement abouti.

Il suffit de faire une modification légère dans les notations pour voir que la méthode ci-dessus est par essence une méthode de recherche des points qui satisfont à un ensemble d'inégalités linéaires. Ce problème est intéressant en lui-même indépendamment de l'utilisation spéciale qui en est faite ici.

Puisque tout problème de programme linéaire peut être formulé comme un problème de résolution d'un ensemble d'inégalités linéaires, il peut être bon d'essayer d'utiliser la méthode précédente comme une méthode de résolution de problème de planification in toto. La chose, qui dans la formulation précédente est la région admissible dans laquelle nous tentons de rentrer, correspond donc par dualité à l'ensemble de points optimaux dans le problème original. "Rentrer" dans la région admissible par la méthode du $S(\lambda)$ correspondra donc à "rechercher un point quelconque" de l'ensemble optimal du problème originel. Si la structure du problème originel est telle que $\lambda = 0$, c'est-à-dire si l'ensemble optimal se réduit à un coin bien défini de la limite, la région admissible de la méthode $S(\lambda)$ appliquée au problème transformé, consistera en un seul point. Jusqu'à présent je n'ai pas fait d'essai pour utiliser réellement la méthode $S(\lambda)$ de cette façon. Dans ce qui suit je me réfèrerai donc seulement à l'utilisation de la méthode $S(\lambda)$ pour entrer dans ce qui est la région admissible pour le problème originel.

VII. RÉDUCTION DU NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ PAR LA MÉTHODE DU DOUBLE GRADIENT

Si nous sommes en un point x_k $(k = u, v \ldots w)$ à l'intérieur de la région admissible, c'est-à-dire en un point où toutes les variables sont effectivement positives et non nulles, nous pouvons calculer le vecteur gradient V . Supposons que nous nous déplaçions d'un tel point intérieur x dans une direction :

(7.1) $$d_k = p_k + \mu\ V_k \quad (k = u, v \ldots w)$$

qui est un compromis entre la direction de préférence p_k et la direction gradient V_k, la nature du compromis étant exprimée par le paramètre μ. Supposons que nous ayons attribué une certaine valeur à μ et qu'ensuite nous nous déplaçions à partir du point intérieur x_k le long de la direction (7.1), dans le sens où la fonction de préférence s'accroit. C'est-à-dire, nous posons :

(7.2) $$x'_k = x_k + \lambda\ d_k \quad (k = u, v \ldots w)$$

où d_k est donné par(7.1),λ étant un paramètre déterminant le mouvement dans la direction d'un accroissement de la fonction de préférence, et x' les coordonnées du point courant du déplacement. Supposons que nous nous déplaçions le long du chemin dans la direction d'un accroissement de la fonction de préférence aussi loin que nous puissions sans sortir de la région admissible. Quand μ a une valeur donnée, ceci peut être fait sans trop de difficulté. Au point où nous atteignons la limite, la fonction de préférence aura une certaine valeur. Cette valeur est une fonction du paramètre de compromis μ de (7.1). Il apparait donc naturel de déterminer μ de telle sorte que la valeur maximale de la fonction de préférence obtenue pour ce μ , soit aussi grande que possible.

Lorsque l'on a déterminé cette valeur optimale de μ et le point correspondant de franchissement de la limite, on a ce qu'il faut pour deviner certaines des variables qui semblent se révéler par elles-mêmes comme des variables qui seront nulles au point optimal du programme linéaire étudié.

La technique pour obtenir la détermination optimale de μ et formuler le choix correspondant des variables qui seront probablement nulles au point optimal est étudié en détail dans les "Principles of Linear Programming". Il suffit de dire ici que lorsque nous partons en traçant dans un diagramme (μ, y) les n + m lignes droites

(7.3) $$y = q_i + W_i \mu \qquad (i = 1, 2 \dots n+m)$$

où les coefficients constants (indépendants de μ) q_i et W_i sont donnés par :

(7.4) $$q_i = \frac{p_i}{x_i} \quad W_i = \frac{V_i}{x_i} \quad (i = 1, 2 \dots n+m)$$

p_k et V_k pour k = u, v... w étant donnés comme expliqués ci-dessus et les autres p_i et V_i étant introduits simplement comme des paramètres de calculs par :

(7.5) $$p_j = \sum_{k=u,v\dots w} b_{jk}\, p_k \quad V_j = \sum_{k=u,v\dots w} b_{jk}\, V_k \quad \big(j = 1, 2 \dots)\; u, v \dots w\; (\dots n+m\big)$$

Lorsque les lignes droites (7.3) sont tracées, nous déterminons la ligne brisée (μ, y) qui est ombrée sur la figure (7.6). Elle est déterminée différemment dans les deux parties du diagramme. Le point de séparation μ_0 est calculé par les paramètres

(7.7) $$P = p_u^2 + p_v^2 + \dots + p_w^2$$

(7.8) $$M = p_u V_u + p_v V_v + p_w V_w$$

Le point d'abscisse optimale μ_{opt} à droite, c'est-à-dire dans ce qui est le secteur supérieur de la figure (7.6), est déterminé en se déplaçant vers la droite sur la branche droite de la ligne brisée à partir du point minimal et notant le premier point d'intersection qui est à droite du point de séparation. Les points d'intersection en question sont ceux que les segments de la ligne brisée (ses prolongements) ont avec l'axe des μ . D'une manière similaire pour le point d'abscisse μ_{opt} à gauche.

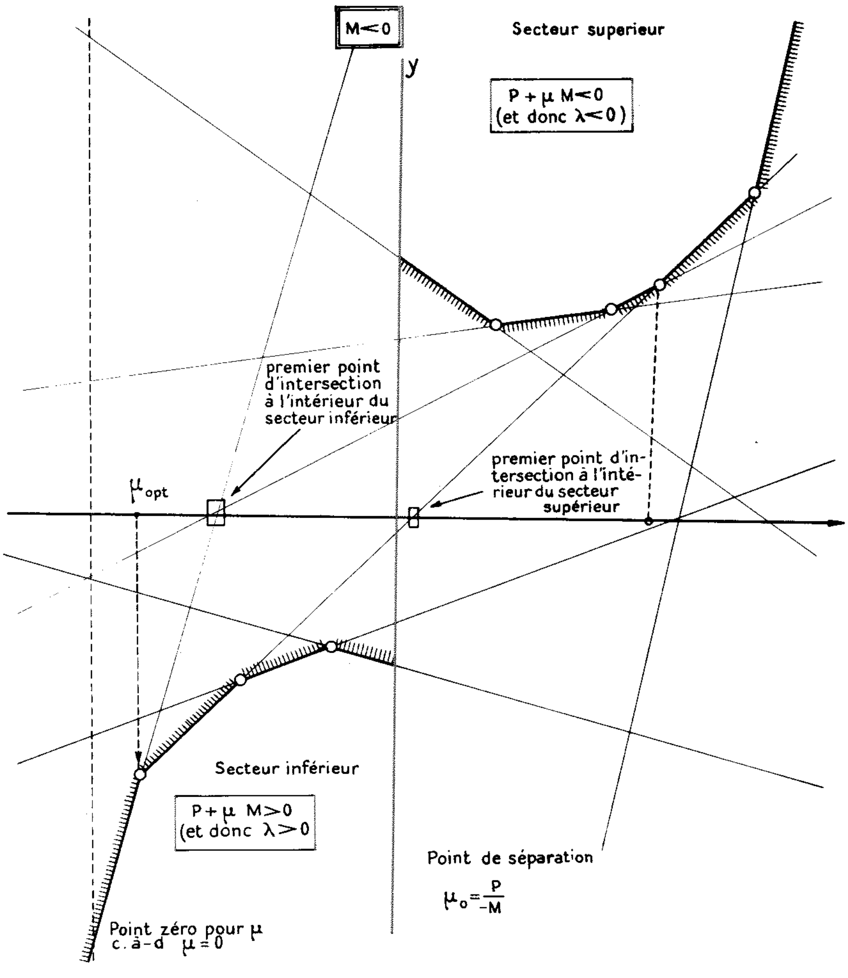

Fig. (7.6). - Diagramme des limites pour M $<$ 0.
Le diagramme correspondant pour M $>$ 0 peut être obtenu en regardant la figure par transparence à travers la feuille.

En général le point à choisir parmi ces deux μ_{opt} est évident, mais s'il ne l'est pas nous choisissons celui d'entre eux qui donne la valeur la plus faible de la fonction suivante de μ .

$$(7.9) \qquad \frac{1}{f'-f} = \frac{1}{|P+\mu M|} \quad \underset{i}{\text{Max}} \; |q_i + W_i \mu|$$

Dans la forme maximale à droite (7.9), i passe par celles des valeurs i = 1, 2... n + m pour lesquelles $q_i + W_i \mu < 0$ lorsque $P + \mu M > 0$, mais par celle des valeurs i = 1, 2... n + m pour lesquelles $q_i + W_i \mu > 0$ lorsque $P + \mu M < 0$ (tous les x_i étant effectivement positifs). La fonction (7.9) de μ est un indicateur pour le choix de μ parce que cette fonction mesure l'accroissement f' - f de la fonction de préférence qui est déterminée en choisissant cette valeur de μ et en se déplaçant - comme expliqué ci-dessus - du point initial x_k (à l'intérieur de la région admissible) où la fonction de préférence à la valeur f jusqu'au point de sortie x'_k où la fonction de préférence prend la valeur f'.

Lorsque μ_{opt} a été finalement déterminé d'une manière unique, on suit les deux segments qui se coupent au point d'ordonnée y_{opt} correspondant. L'un de ces segments permet de se déplacer vers μ_o et l'autre à partir de μ_o . Nous considérons seulement les parties de chaque segment (leurs prolongements) qui vont dans la direction de l'axe des μ. Nous repérons les points d'intersection que le premier de ces segments (ou prolongements) a avec l'une quelconque des lignes droites (7..3) qu'il rencontre dans son chemin vers l'axe des μ et avant qu'il n'atteigne cet axe ou ne dépasse l'abscisse de valeur μ_o . De même pour le second segment (ou son prolongement). Dans le cas du dernier segment il n'est pas nécessaire d'ajouter "ou ne dépasse l'abscisse de valeur μ_o" puisque cela ne peut arriver avant que ce segment (ou son prolongement) atteigne l'axe des μ.

Chacun de ces points qui sont ainsi repérés sur les segments (ou leurs prolongements) définit l'une des variables. Quelques-unes des variables peuvent de cette façon être repérées deux fois. En tous cas chaque variable repérée reçoit un <u>nombre de priorité</u> égal à la valeur absolue de l'ordonnée du point qui a été marquée sur un segment. Si une variable a été repérée deux fois, nous prenons celle des ordonnées qui est la plus grande.

Les variables sont ainsi classées dans un ordre de priorité d'après leur nombre de priorité. Il y a deux <u>variables dominantes</u> (leading candidates), à savoir celles qui caractérisent les deux segments qui se coupent réellement au point optimum (μ_{opt}, y_{opt}). Elles ont le même nombre de priorite et aucune des variables ne peut recevoir a priori un indice supérieur à celui-ci. Un certain nombre de variables ayant la plus forte priorité, à part les deux variables dominantes, sont choisies et l'on fait l'hypothèse (guess) qu'elles seront égales à zéro au point optimal du problème de programme linéaire considéré.

On peut adopter comme règle de conduite de choisir un nombre de variables de la plus forte priorité égal au tiers du nombre de degrés de liberté qui existe lorsque l'on fait l'analyse.

Les variables ainsi choisies sont prises égales à zéro et l'analyse continue avec le nombre de degrés de liberté qui apparait ainsi. Le procédé qui consiste à rendre une variable nulle de cette façon peut être appelé une perte de liberté (freedom truncation).

Le problème pratique consiste à rechercher comment les calculs nécessaires à de telles pertes de liberté peuvent être rendus plus faciles. Ceci est discuté dans le mémoire mentionné plus haut.

De cette façon nous pouvons procéder pas à pas jusqu'à ce que nous ayons obtenu n variables linéairement indépendantes égales à zéro ou que nous ayons un nombre plus faible de variables nulles, mais que nous ayons des raisons de croire que nous avons néanmoins atteint un point optimal.

VIII. TESTS D'OPTIMALITÉ

La procédure ci-dessus pour deviner les variables qui seront probablement nulles au point optimal, ne serait pas justifiée s'il n'existait aucune méthode pour tester réellement l'optimalité d'un point donné. Heureusement un critérium nécessaire et suffisant pour cela existe et peut être appliqué à un point quelconque de la limite sans trop de difficulté.

Si le critérium est positif, c'est très bien. S'il est négatif nous devons faire un petit mouvement à l'intérieur de la région admissible et du point intérieur ainsi obtenu, faire un ou plusieurs examens avec tous les degrés de liberté que l'on avait à l'origine ou dans tous les cas avec un nombre de degrés de liberté nettement plus grand.

COMPTE-RENDU DE LA DISCUSSION QUI A SUIVI L'EXPOSÉ DE M. FRISCH

Séance du 1er Juin 1955

M. ROY, après avoir remercié M. FRISCH de son exposé, indique que les méthodes étudiées forment une illustration des services que l'économétrie peut rendre dans l'étude des problèmes concrets : en particulier les méthodes de calculs de programmes linéaires permettent de connaitre les solutions acceptables alors que les variables en cause sont en très grand nombre. M. ROY souligne le souci de M. FRISCH d'arriver à des applications. D'ailleurs tous les travaux exposés ont eu pour but de réduire les calculs numériques un peu à la façon dont les prospecteurs miniers tentent de réduire les essais infructueux.

M. ROY pense qu'il est intéressant de souligner les idées contenues dans les premières pages du résumé et en particulier la tentative d'assouplissement des matrices de Léontief. La difficulté majeure est peut être dans tout ceci l'accord entre l'économètre et l'homme politique, lequel doit choisir les variables et les fonctions de préférence. Il n'est pas douteux que les hommes politiques peuvent tirer un grand profit de méthodes telles que celle-ci car elles permettent dans les problèmes macroéconomiques d'expliciter d'une manière claire et précise des positions vagues et des idées a priori fondées sur des doctrines.

M. FRISCH indique que dans ce domaine il a eu une expérience récente dans les problèmes de planification de l'Inde. Cela a été pour lui une stimulation énorme de voir l'intérêt que les hommes politiques ont porté à la méthode elle-même: M. FRISCH a eu de longues conversations avec M. NEHRU au sujet de valeurs à faire intervenir et des fonctions de préférence à choisir ; M. NANDA, Ministre responsable de la planification, a de son côté cherché pendant une longue journée à comprendre et à être informé sur les programmes linéaires. Et finalement, il n'y a pas eu une distance énorme entre l'exposé fait ce jour et l'exposé général qu'a demandé M. NANDA. M. FRISCH indique qu'il faudra deux années pour constituer un organisme statistique indien qui puisse recueillir les données nécessaires et l'on peut espérer que d'ici quelques années, les idées abstraites s'appliqueront au problème concret.

M. ROY demande si le choix de la fonction de potentiel logarithmique n'a pour but que de connaitre la proximité de la frontière de la région admissible et s'il y a un lien entre le choix de cette fonction de potentiel et la commodité de calculs.

M. FRISCH répond que les calculs logarithmiques ne sont pas difficiles en effet ; d'autre part, le logarithme est déjà un compromis entre diverses choses (le potentiel logarithmique n'est pas autre chose qu'une entropie).

M. GUILBAUD demande quel est la taille des problèmes qui ont été poussés à bout.

M. FRISCH indique qu'il a eu l'occasion de traiter un problème ayant 20 degrés de liberté et 50 variables pour l'Inde ; on a traité un problème avec 25 degrés de liberté (25 secteurs de l'économie et 50 à 60 variables) pour la Norvège ; un exemple de calcul a été effectué avec 12 degrés de liberté et 25 ou 30 variables par une seule opératrice n'ayant qu'une machine de bureau à sa disposition, en 2 semaines avec la méthode du potentiel logarithmique. Il faut noter d'ailleurs que la méthode simplexe exige des calculs qui augmentent à peu près comme le cube du nombre de degrés de liberté ; d'une manière générale on a :

$$\text{HEURES DE TRAVAIL} = \text{CONSTANTE} \times n^2 \times \text{Min} \left[n, m \right]$$

Si on devine "au doigt mouillé" un tiers des degrés de liberté à chaque cycle on a un avantage énorme pour les problèmes réellement grands (le nombre de cycles augmente d'une manière logarithmique et finalement le travail augmente comme la puissance 2 et non la puissance 3).

degrés de liberté	nombres de cycles	degrés de liberté	nombres de cycles
2	1	34	8
3	2	51	9
5	3	76	10
7	4	145	11
10	5	217	12
15	6	325	13
23	7	488	14

Dans le cas particulier d'application à la Norvège avec 15 degrés de liberté et 25 variables, un seul cycle a permis de choisir toutes les variables.

M. FERON demande la référence du mémoire complet de M. FRISCH.

M. FRISCH indique que ce volume du 18 octobre 1954 est intitulé "Principles of Linear Programming".

M. FOURGEAUD demande s'il y a une "astuce" pour choisir les variables de base qui dans une certaine mesure sont arbitraires.

M. FRISCH indique qu'il n'y a pas de méthode, et que fréquemment les variables de base qu'on est amené à choisir sont les variables d'actions du Gouvernement, alors que le plus souvent ce ne sont pas les plus commodes. Les paramètres d'action ne présentent d'ailleurs pas une très grande importance puisque, en fait, il y a deux problèmes : le premier de mettre en évidence le nombre de degrés de liberté dans les problèmes de choix, et le second de savoir comment arriver à reproduire la structure choisie.

M. ROY demande si les économies de temps ont plus d'importance que le choix des variables.

M. FRISCH dans sa réponse indique que "Uniwak" a fait une résolution d'une matrice à 190 lignes et 190 colonnes pour le Département du Travail en 42 heures avec 8 décimales.

M. GIRARD demande si une planification dans les pays neufs a autant d'importance que dans les états déjà très développés comme les Etats-Unis.

M. FRISCH indique que dans les pays neufs la planification stricte a beaucoup d'importance, ces pays n'ayant pas l'expérience pratique des pays plus anciens. D'autre part, dans un pays neuf, il se présente un plus grand nombre d'alternatives qu'il faut considérer.

M. FERON demande si la méthode est applicable à une fonction de satisfaction non linéaire.

M. FRISCH répond par l'affirmative. Il y a d'ailleurs deux sortes de problèmes : d'une part les problèmes convexes avec des limites linéaires et une fonction de préférence non linéaire (la méthode peut alors convenir), et d'autre part, les problèmes non linéaires dans leur limite pour lesquels cependant on peut entreprendre un dégrossissage par l'application de la méthode à un problème linéaire approché.

M. GUILBAUD présente quelques suggestions concernant la méthode préconisée pour trouver un point de la région admissible.

On doit pouvoir étudier le processus d'itération et peut être en déterminer la convergence en utilisant une méthode analogue à celle bien connue depuis Markoff et qui consiste à associer deux espèces de normes dans un espace vectoriel (par exemple L^1 somme des valeurs absolues et L^∞ maximum des valeurs absolues).

La somme S des valeurs absolues des coordonnées négatives est une sorte de distance du point choisi x au domaine admissible A. On peut lui associer une autre distance en considérant des polyèdres de forme déterminée par exemple de cubes ou pavés centrés en x et définissant la borne inférieure du diamètre de ceux qui coupent A. En d'autres termes, la distance entre deux points étant la plus grande des différences entre coordonnées, la distance de x à A est la plus courte distance de x aux points de A. Désignons cette distance par W. On peut montrer qu'il existe une constante K telle que l'on ait toujours : $W \leqslant KS$, c'est-à-dire que le pavé de côté K S coupe forcément A.

Dire qu'on a trouvé en S assez petit, c'est-à-dire qu'on a "presque" résolu le système d'inégalité : on voit qu'on peut donner un sens métrique à ce "presque" et affirmer qu'on se trouve alors "au voisinage" de A en précisant d'une façon métrique.

Il faudrait se reporter aux travaux mathématiques sur les inégalités linéaires (S. ACMON, T.S. MOTZKIN).

M. FRISCH pense qu'effectivement la remarque de M. GUILBAUD a de très grosses conséquences puisque son application permettra de savoir s'il y a ou non une région admissible. L'emploi de cette remarque doit être extrêmement fructueuse : il faudrait examiner la question de près.