METROECONOMICA 94519

Vol. IX Agosto 1957 Fasc. II

T. HAAVELMO NIO

SUR UN PROBLÈME D'ÉCONOMIE PURE *

par Ragnar Frisch, Oslo

SOMMAIRE: § 1. L'utilité en tant que quantité. - § 2. Les courbes d'utilité marginale. - § 3. La méthode des isoquantes. - § 4. Application aux données statistiques.

Intermédiaire entre les mathématiques, la statistique et l'économie politique, nous trouvons une discipline nouvelle que l'on peut, faute de mieux, désigner sous le nom de *l'économétrie.*

L'économétrie se pose le but de soumettre les lois abstraites de l'économie politique théorique, ou l'économie « pure », à une vérification expérimentale et numérique, et ainsi de constituer, autant que cela est possible, l'économie pure en une science dans le sens restreint de ce mot.

L'étude économétrique que nous présentons est une tentative de réaliser le rêve de Jevons (1): mesurer la variation de l'utilité marginale des biens économiques. Nous considérons plus particulièrement la variation de l'utilité marginale de la monnaie.

L'étude a été faite pendant un séjour à Paris, 1923. Nous avons d'abord eu l'intention d'étendre l'application de notre méthode à un matériel statistique plus vaste, mais d'autres préoccupations nous l'ont empêché. L'intérêt très vif qui se manifeste parmi les économistes-mathématiciens depuis les dernières années aux recherches économétriques (2) nous fait penser qu'il serait peut-être intéressant de publier séparément les résultats déjà obtenus.

§ 1. - L'UTILITÉ EN TANT QUE QUANTITÉ.

Les progrès réels d'une science du monde extérieur commencent le jour où l'on comprend qu'il faut substituer aux notions vagues du sens vulgaire des notions capables d'une définition objective. C'est ainsi qu'en mécanique on a substitué à la notion de force basée sur la sensation que provoque le travail musculaire la notion abstraite de force, que l'on emploie en mécanique rationnelle. C'est encore

* *Cette étude, épuisée depuis longtemps, est republiée ici d'après le texte mis gentiment à disposition par l'auteur.* (*N. d. R.*)

(1) *Theory of Political Economy* (1871). Voir en particulier le paragraphe: *Numerical Determination of the Laws of Utility* (p. 146 de la 4ème Edition, 1911).

(2) Pour les écrits de langue anglaise on consultera la bibliographie dans le « Quarterly Journal of Economics » (1925).

ainsi que l'on a substitué à l'utilité au sens vulgaire de ce mot, la notion abstraite d'utilité que l'on emploie en économie pure. Bien que la recherche d'une définition objective de l'utilité ait fait l'objet de travaux de savants tels que MM. Edgeworth, Fisher et Pareto, et d'autres encore, il ne nous semble pas que l'on ait obtenu des résultats définitifs. En particulier il nous semble que l'on n'a pas mis en évidence les axiomes auxquels il faut s'appuyer pour établir la définition de l'utilité en tant que quantité. Nous nous proposons dans ce paragraphe de préciser la définition en question.

Pour abréger l'écriture nous employons la notation vectorielle. Il sera peut-être possible d'accomplir la recherche sans cette notation. Mais alors il faudra — du moins si l'on tient à l'exactitude — employer un appareil verbal aussi considérable que la lecture deviendra non seulement très ennuyeuse, mais aussi très pénible, sans parler du danger pour les erreurs logiques.

Considérons un *homo oeconomicus* qui possède les quantités $x_1\, x_2 \ldots x_M$ de M biens économiques. Nous représentons sa position économique par le vecteur $\mathbf{x}$ que l'on peut mener dans l'espace à M dimensions de l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires au point $(x_1\, x_2 \ldots x_M)$. Nous dirons que l'individu possède les ressources $\mathbf{x}$. Dans la suite $\mathbf{x}$ sera employé indifféremment pour désigner et le point $(x_1\, x_2 \ldots x_M)$ et le vecteur qui aboutit à ce point.

Si l'individu se trouvant initialement à la position $\mathbf{x}$ acquiert les quantités $p_1\, p_2 \ldots p_M$ des biens nos. 1, 2 ... M (par exemple par échange, quelques-uns des p étant négatifs), nous représentons le déplacement dans sa position par le vecteur $\mathbf{p}$ a composantes $p_1\, p_2 \ldots p_M$. Nous appelons le vecteur $\mathbf{p}$ l'accroissement de ses ressources. La position finale sera évidemment représentée par le vecteur $\mathbf{x} + \mathbf{p}$. Si l'individu subit une suite de déplacements successifs $\mathbf{p}^{(1)}\, \mathbf{p}^{(2)} \ldots$, nous dirons qu'il parcourt un *chemin d'acquisition*, que l'on peut du reste supposer par parties continues. De même on peut représenter la consommation de l'individu par un *chemin de consommation*, ce dernier n'étant pas nécessairement le même que le chemin d'acquisition. Si l'individu possède les ressources $\mathbf{x}$ et s'il peut choisir à son gré le chemin de consommation de l'origine à $\mathbf{x}$, nous dirons que le chemin de consommation est libre. Dans le cas où le chemin de consommation lui est prescrit en partie ou en totalité nous dirons qu'il est imposé une clause au chemin de consommation.

Cela étant, pour établir une définition objective de l'utilité au sens économique on peut s'appuyer sur les deux catégories d'axiomes que voici:

I. ***Axiomes de première espèce*** (axiomes relatifs à une position donnée).

a) *Axiome du choix.*

Si l'individu se trouvant au point $\mathbf{x}$ a le choix entre deux déplacements $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, nous supposons que son choix soit toujours bien déterminé, et dans le cas de chemins libres, et dans le cas contraire. C'est-à-dire, on a toujours un des trois cas suivants:

1) L'individu préfère **p** à **q**;
2) Il préfère **q** a **p**;
3) Le choix entre **p** et **q** lui est indifférent.

Pour abréger nous utilisons la notation

$$(\mathbf{xp}) \gtreqless (\mathbf{xq})$$

pour désigner ces trois cas.

On conçoit qu'il soit en principe possible par des « expériences par interrogation » effectuées sur l'*homo oeconomicus*, de déterminer d'une façon objective dans lequel des trois cas on se trouve. De même, il est en principe possible par des « expériences par tâtonnement » de déterminer un déplacement **p** tel que $(\mathbf{xp}) = (\mathbf{xq})$, **q** étant un déplacement donné, par exemple $\mathbf{q} = 0$. Nous dirons que le déplacement $\mathbf{q} = 0$ est de choix zéro, puisqu'il est evidemment indifférent à l'individu s'il subit ce déplacement ou non. Un déplacement **p** sera dit de choix positif, zéro ou négatif, suivant que l'on a $(\mathbf{xp}) \gtreqless (\mathbf{x}, 0)$.

Deux déplacements **p** et **q** tels que $(\mathbf{xp}) = (\mathbf{xq})$ seront dits équivalents.

b) *Axiome de coordination.*

$$\text{Si} \quad (\mathbf{xp}) > (\mathbf{xq})$$
$$\text{et} \quad (\mathbf{xq}) > (\mathbf{xr})$$

le choix sera aussi $(\mathbf{xp}) > (\mathbf{xr})$
et de même pour les signes « = », « < » et « non > ».

Puisque ce dernier axiome assure la transitivité de la relation (a), nous pouvons prendre cette relation comme définition de l'égalité et de l'inégalité de deux utilités. Cette égalité ou inégalité est donc un fait capable d'une constatation objective, pourvu que les accroissements **p** et **q** dont on compare l'utilité, se rapportent à une même position **x**.

c) *Axiome d'addition.*

$$\text{Si} \quad (\mathbf{xp}) > (\mathbf{xq})$$
$$\text{et} \quad (\mathbf{xr}) > (\mathbf{xs})$$

p, **q**, **r** et **s** *étant infinitésimaux*

le choix sera aussi

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \mathbf{r}) > (\mathbf{x}, \mathbf{q} + \mathbf{s})$$

et de même pour les autres signes.

Il est à remarquer que nous n'admettons pas l'axiome d'addition dans le cas où **p**, **q**, **r** et **s** ne sont pas infinitésimaux. Une conséquence de l'axiome d'addition est qu'une forme à coëfficients rationnels, linéaire et homogène en des déplacements infinitésimaux de choix zéro est elle même un déplacement de choix zéro, et l'on conclut par un passage à la limite que cela est encore exact pour une forme à coëfficients réels quelconques.

II. ***Axiomes de seconde espèce*** (axiomes relatifs à des positions différentes).

a) *Axiome de choix.*

Si l'individu sait qu'il se trouvera à deux occasions différentes dans les positions **x** et **y** respectivement, et s'il a le choix entre le déplacement **p** dans la position **x** et le déplacement **q** dans la position **y**, nous supposons que son choix soit toujours bien déterminé, et dans le cas des chemins libres et dans le cas contraire. C'est-à-dire, on a toujours un des trois cas:

$$(\mathbf{xp}) \gtreqqless (\mathbf{yq})$$

b) *Axiome de coordination.*

$$\begin{aligned} \text{Si}\quad & (\mathbf{xp}) > (\mathbf{yq}) \\ \text{et}\quad & (\mathbf{yq}) > (\mathbf{zr}) \\ \text{le choix sera aussi}\quad & (\mathbf{xp}) > (\mathbf{zr}) \end{aligned}$$

et de même pour les autres signes.

Les axiomes de seconde espèce étant posés, les remarques sous (I b) relatives à la définition objective de l'égalité de deux utilités s'appliquent encore aux accroissements **p** et **q** qui se rapportent à des positions différentes **x** et **y**.

c) *Axiome d'addition.*

$$\begin{aligned} \text{Si}\quad & (\mathbf{xp}) > (\mathbf{yq}) \\ \text{et}\quad & (\mathbf{xr}) > (\mathbf{ys}) \end{aligned}$$

p, **q**, **r** et **s** étant *infinitésimaux*,

le choix sera aussi $(\mathbf{x}, \mathbf{p} + \mathbf{r}) > (\mathbf{y}, \mathbf{q} + \mathbf{s})$

et de même pour les autres signes.

Une conséquence de cet axiome est que deux formes linéaires et homogènes en des déplacements infinitésimaux qui sont équivalents deux à deux, sont elles-mêmes des déplacements équivalents.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que le chemin de consommation est libre. L'étude du cas où le chemin n'est pas libre est infiniment plus complexe et exige entr'autre l'introduction de deux différents concepts d'utilité. L'étude de ce cas nous entraînerait trop loin de l'objet que nous poursuivons.

* * *

Nous nous appuyons d'abord sur les axiomes de première espèce. Nous supposons que la position **x** n'appartient pas à une partie indifférente de l'espace. Par là nous voulons dire que le choix de l'individu n'est pas tel que tout déplacement infinitésimal autour de **x** est de choix zéro.

Désignons par $L\mu$ une variété linéaire à μ dimensions plongée dans l'espace à M dimensions ($\mu < M$). Nous supposons encore que

$\mathbf{x}$ n'est pas un point singulier de l'espace [1], c'est a dire un point tel que tout déplacement infinitésimal de choix zéro autour de $\mathbf{x}$ est situé sur un L_{M-2} qui passe par $\mathbf{x}$.

Cela étant, tout déplacement infinitésimal de choix zéro autour de $\mathbf{x}$ est situé sur un L_{M-1} qui passe par $\mathbf{x}$ et inversement tout déplacement infinitésimal qui est situé sur ce L_{M-1} est de choix zéro. En effet, considérons $(M - 1)$ déplacements de choix zéro qui ne sont pas situés sur un L_{M-2} qui passe par $\mathbf{x}$. Soit L le L_{M-1} qui passe par $\mathbf{x}$ et par les points terminus des $(M - 1)$ déplacements considérés. Alors, tout déplacement infinitésimal autour de $\mathbf{x}$ qui aboutit à un point sur L est de choix zéro puisqu'il peut être exprimé comme une forme linéaire des $(M - 1)$ déplacements considérés qui sont tous de choix zéro. D'autre part, un déplacement infinitésimal $\mathbf{p}$ qui n'aboutit pas à un point sur L ne peut être de choix zéro puisqu'alors un déplacement quelconque autour de $\mathbf{x}$ pouvant être exprimé comme une forme linéaire en $\mathbf{p}$ et des $(M - 1)$ déplacements qui définissent L, devait être de choix zéro contrairement à l'hypothèse que $\mathbf{x}$ n'appartient pas à une position indifférente de l'espace.

Soit L′ un L_{M-1} parallèle à L à une distance infinitésimale $\mathbf{q}'$. Tous les déplacements qui aboutissent sur L′ et ceux-là seulement, sont équivalents, parce qu'un tel déplacement est la somme de $\mathbf{q}'$ et d'un déplacement sur L (qui est de choix zéro). Les déplacements qui aboutissent sur L′ seront de choix positif ou négatif suivant que $\mathbf{q}'$ est de choix positif ou négatif. De plus, deux plans L′ et L″ parallèles à L à des distances infinitésimales $\mathbf{q}'$ et $\mathbf{q}''$ de L jouissent de la propriété que les déplacements qui aboutissent sur L′ seront préférés à ceux qui aboutissent sur L″ si $\mathbf{q}'$ est préféré à $\mathbf{q}''$. Enfin les $\mathbf{q}$ étant dirigés suivant la normale à L, on voit que l'on peut définir la direction positive de cette normale de telle façon que $\mathbf{q}'$ sera préféré à $\mathbf{q}''$ ou inversement suivant que $\mathbf{q}'$ aboutit à un point sur la normale d'abcisse plus grand ou plus petit que l'abcisse du point correspondant pour $\mathbf{q}''$.

Voilà les dispositions de choix auxquelles conduisent les axiomes de première espèce.

Considérons maintenant un vecteur $\mathbf{u}$ dirigé suivant la normale à L dans le sens positif et d'une longueur arbitraire. Soit $\delta\mathbf{x}$ un déplacement infinitésimal quelconque autour de $\mathbf{x}$. Alors on voit que les valeurs possibles du produit intérieur $\mathbf{u}\delta\mathbf{x}$ sont distribuées autour de $\mathbf{x}$ d'une façon analogue aux préférences de l'individu. D'une façon plus précise: si $\delta^{(1)}\mathbf{x}$ et $\delta^{(2)}\mathbf{x}$ sont deux déplacements infinitésimaux quelconques autour de $\mathbf{x}$, le choix de l'individu sera

$$(\mathbf{x}\delta^{(1)}\mathbf{x}) \gtreqless (\mathbf{x}\delta^{(2)}\mathbf{x})$$

suivant que

$$\mathbf{u}\delta^{(1)}\mathbf{x} \gtreqless \mathbf{u}\delta^{(2)}\mathbf{x}.$$

Cela justifie la définition que nous allons adopter.

---

[1] Le lecteur familier avec la théorie des surfaces d'indifférence — à laquelle nous n'insistons pas dans le travail actuel — reconnaît facilement que ce cas est celui où $\mathbf{x}$ est un point singulier de la surface d'indifférence qui passe par $\mathbf{x}$.

Le produit intérieur $\mathbf{u}\delta\mathbf{x}$ sera par définition l'utilité du déplacement $\delta\mathbf{x}$ autour du point fixe $\mathbf{x}$. Le rapport des composantes $u_1\, u_2 \ldots$ $\ldots u_M$ de $\mathbf{u}$ seront les rapports des utilités marginales des biens nos. 1, 2 ,..., M au point $\mathbf{x}$.

Puisqu'on peut en principe déterminer « par expérience » $(M - 1)$ déplacements de choix zéro non tous sur un même L_{M-2}, l'orientation du plan L est un fait capable d'une détermination objective, et il en est de même de la direction positive de sa normale. Cette « expérience » pouvant être faite pour tous les points $\mathbf{x}$ de l'espace, nous voyons que le vecteur $\mathbf{u}$ $(\mathbf{x})$ est défini à un facteur près qui est fonction de $\mathbf{x}$. En d'autres termes les axiomes de première espèce permettent de donner une définition objective de la direction de $\mathbf{u}$ mais non de sa grandeur. La définition de la direction de $\mathbf{u}$ — que l'on peut appeler la *direction maximum* pour des raisons évidentes — suffit pour élaborer la principale partie de la théorie de l'équilibre statique de l'échange. En effet, l'équation du plan L

$$\mathbf{u}\delta\mathbf{x} = 0$$

que l'on peut aussi écrire

$$u_1\delta x_1 + u_2\delta x_2 + \ldots + u_M\delta x_M = 0$$

est l'équation fondamentale de l'échange, et pour le connaître on n'a pas besoin de connaître la longueur de $\mathbf{u}$. C'est en s'appuyant sur la notion de direction maximum et sur l'équation $\mathbf{u}\delta\mathbf{x} = 0$ que M. Fisher et après lui M. Pareto ont étudié l'équilibre statique de l'échange.

Pour l'objet que nous pursuivons cette définition ne suffit pas. Il nous faut aussi une définition objective de la longeur de $\mathbf{u}$. Pour l'obtenir nous nous appuyons sur les axiomes de seconde espèce.

Soit $\delta\mathbf{x}$ et $\delta\mathbf{y}$ deux déplacements infinitésimaux partant des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ respectivement. Soit L $(\mathbf{x})$ et L $(\mathbf{y})$ les deux L_{M-1} qui passent par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ respectivement et dont la normale est dirigée dans la direction maximum en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Si l'on considère $\delta\mathbf{x}$ comme un déplacement donné, $\delta\mathbf{y}$ comme un déplacement variable, il est une conséquence immédiate des axiomes (II ab) et des propriétés de la distribution des préférences autour d'un point fixe, que tous les déplacements $\delta\mathbf{y}$ qui sont équivalents à $\delta\mathbf{x}$, et ceux-là seulement aboutissent sur un même L_{M-1} parallèle à L $(\mathbf{y})$. Désignons par L′ $(\mathbf{y})$ ce L_{M-1}.

D'autre part, soit L′ $(\mathbf{x})$ le L_{M-1} parallèle à L $(\mathbf{x})$ qui passe par le point terminus de $\delta\mathbf{x}$. La proposition que nous venons d'énoncer au sujet de $\delta\mathbf{x}$ reste évidemment vraie pour tous les déplacements qui aboutissent sur L′ $(\mathbf{x})$ et pour ceux-là seulement. Il y a donc une correspondance univoque entre L′ $(\mathbf{x})$ et L′ $(\mathbf{y})$ dans le sens qu'un déplacement quelconque $\delta\mathbf{y}$ aboutissant sur L′ $(\mathbf{y})$ est équivalent à un déplacement quelconque $\delta\mathbf{x}$ aboutissant sur L′ $(\mathbf{x})$ et inversement, un déplacement qui aboutit sur l'un de ces deux L_{M-1} ne pouvant être équivalent à un déplacement qui n'aboutit pas sur l'autre.

Pour cette raison nous dirons que $L'(\mathbf{x})$ et $L'(\mathbf{y})$ sont *deux plans équivalents*. Pour comparer le choix de l'individu entre un déplacement autour de $\mathbf{x}$ et un déplacement autour de $\mathbf{y}$ il suffit donc d'étudier la disposition des couples de plans équivalents tels que $L'(\mathbf{x})$ et $L'(\mathbf{y})$.

Considérons deux couples $L'(\mathbf{x})$ $L'(\mathbf{y})$ et $L''(\mathbf{x})$ $L''(\mathbf{y})$, et soit $p'q'$ et $p''q''$ les valeurs algébriques des distances infinitésimales des plans aux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ respectivement, ces distances étant prises avec le signe convenable défini par la direction maximum en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Si $p' < p''$, $L''(\mathbf{x})$ sera préféré à $L'(\mathbf{x})$, mais alors d'après les axiomes (II ab) $L''(\mathbf{y})$ sera préféré à $L'(\mathbf{y})$, et on aura par conséquence $q' < q''$. Inversement si $q' < q''$, on en tirera $p' < p''$. On en conclut qu'à une suite de plans $L^{(k)}(\mathbf{x})$ consécutifs dans le sens que les distances $p^{(k)}$ des $L^{(k)}(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x}$ ($k = 1, 2 \ldots$) forment une suite de nombres croissants (au sens algébrique), correspond une suite de plans équivalents $L^{(k)}(\mathbf{y})$ qui sont aussi consécutifs. Mais rien ne permet jusqu'ici de conclure quelque chose relativement aux distances des plans $L^{(k)}(\mathbf{y})$ par rapport aux distances des plans $L^{(k)}(\mathbf{x})$.

Pour pouvoir tirer un telle conclusion nous nous appuyons sur l'axiome (II c). Si $(\mathbf{x}\delta\mathbf{x})$ et $(\mathbf{y}\delta\mathbf{y})$ sont deux déplacements équivalents, les déplacements $(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x} - \delta\mathbf{x})$ et $(\mathbf{y}, \delta\mathbf{y} - \delta\mathbf{y})$ c'est-à-dire les déplacements $(\mathbf{x}, 0)$ et $(\mathbf{y}, 0)$ seront aussi équivalents. Le plan $L^{(k)}(\mathbf{y})$ sera donc de choix zéro, positif ou négatif suivant que le plan équivalent $L^{(k)}(\mathbf{x})$ est de choix zéro, positif ou négatif. D'autre part, si $(\mathbf{x}\delta\mathbf{x})$ et $(\mathbf{y}\delta\mathbf{y})$ sont équivalents, on conclut que $(\mathbf{x}, k\delta\mathbf{x})$ et $(\mathbf{y}, k\delta\mathbf{y})$ seront aussi équivalents, k étant un facteur fini, ce qui montre que les distances des plans $L^{(k)}(\mathbf{y})$ de choix positif sont proportionelles aux distances des plans $L^{(k)}(\mathbf{x})$ de choix positif, et une remarque analogue s'applique aux plans de choix négatif. Pour donner la description complète des choix entre les déplacements autour de $\mathbf{x}$ et les déplacements autour de $\mathbf{y}$, il suffit donc d'ajouter aux données de la direction maximum en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ le coëfficient de proportionnalité c qui exprime la densité des plans $L^{(k)}(\mathbf{y})$ par rapport à la densité des plans $L^{(k)}(\mathbf{x})$. Ce coëfficient étant donné, si $L^{(k)}(\mathbf{x})$ est un plan donné parallèle à $L(\mathbf{x})$ à une distance (positive ou négative) infinitésimale $p^{(k)}$, les déplacements $\delta\mathbf{y}$ qui sont équivalents aux déplacements $\delta\mathbf{x}$ qui aboutissent sur $L^{(k)}(\mathbf{x})$, seront les déplacements qui aboutissent sur le plan $L^{(k)}(\mathbf{y})$ dont la distance à $\mathbf{y}$ est $q^{(k)} = cp^{(k)}$.

Considérons maintenant un troisième point $\mathbf{z}$ et soit c_{xy} le coëfficient de proportionnalité de $\mathbf{y}$ par rapport à $\mathbf{x}$, c_{xz}, le coëfficient de $\mathbf{z}$ par rapport à $\mathbf{x}$ et c_{yz} le coëfficient de $\mathbf{z}$ par rapport à $\mathbf{y}$.

Considérons les trois plans $L^{(k)}(\mathbf{x})$ $L^{(k)}(\mathbf{y})$ $L^{(k)}(\mathbf{z})$ à distances p, q, r de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ respectivement. Si d'une part les deux premiers plans sont équivalents, et d'autre part les deux derniers, le premier et le dernier seront aussi équivalents en vertu de l'axiome (II b). Nous avons

$$c_{xy} = \frac{q}{p} \quad c_{xz} = \frac{r}{p} \quad c_{yz} = \frac{r}{q}$$

d'où

$$c_{yz} = \frac{c_{xz}}{c_{xy}}$$

Donc, pour connaître le coëfficient d'un point quelconque **z** par rapport à un autre point quelconque **y**, il suffit de connaître les coëfficients de **z** et de **y** relatifs à un point fixe **x**.

Pour donner la description complète des choix de l'individu dans tout l'espace, et pour des déplacements infinitésimaux quelconques, il suffit donc d'ajouter à la donnée de la direction maximum, pour tout point de l'espace, la donnée du coëfficient c relatif à un point fixe.

Changeons un peu les notations. Soit **a** le point fixe, **x** et **y** deux points quelconques, c_x et c_y les coëfficients de **x** et **y** relatifs au point fixe **a**. Soit p un facteur arbitraire fini, positif ou négatif. Alors les déplacements ($\mathbf{y}\delta\mathbf{y}$) qui aboutissent sur le $L^{(k)}$ (**y**) dont la distance à **y** est pc_y — et ceux-là seulement — sont équivalents aux déplacements ($\mathbf{x}\delta\mathbf{x}$) qui aboutissent sur le $L^{(k)}$ (**x**) dont la distance à **x** est pc_x — et à ceux-là seulement.

Voilà les dispositions de choix auxquelles conduisent les axiomes de seconde espèce.

Considérons maintenant le vecteur **u** (**x**) défini à tout point de l'espace de la façon suivante. La direction positive de **u** (**x**) sera la direction maximum au point **x**, sa longueur sera égale au quotient $\frac{\text{longueur de } \mathbf{u}\,(\mathbf{a})}{c_{\mathbf{x}}}$; **a** est le point fixe par rapport auquel c_x est défini. La longueur de **u** (**a**) est choisie arbitrairement. On voit que les valeurs du produit intérieur **u** (**x**) δ**x** sont distribuées *dans tout l'espace* d'une façon analogue aux préférences de l'individu. D'une façon plus précise si ($\mathbf{x}\,\delta\mathbf{x}$) et ($\mathbf{y}\,\delta\mathbf{y}$) sont deux déplacements infinitésimaux quelconques, le choix sera

$$(\mathbf{x}\ \delta\mathbf{x}) \gtreqless (\mathbf{y}\ \delta\mathbf{y})$$

suivant que

$$\mathbf{u}\ (\mathbf{x})\ \delta\mathbf{x} \gtreqless \mathbf{u}\ (\mathbf{y})\ \delta\mathbf{y}$$

Cela justifie la définition suivante.

Le produit intérieur **u** (**x**) δ**x** sera l'utilité du déplacement (**x**, δ**x**). Le vecteur **u** (**x**) sera l'utilité marginale des ressources **x**, et les composantes $u_1\, u_2 \ldots u_M$ de **u** (**x**) seront les utilités marginales des biens nos. 1, 2 ... M. Le champ vectoriel ainsi défini sera appelé le *champ de choix* de l'individu considéré.

Puisqu'il est en principe possible de déterminer « pas expérience » pour chaque point **x** de l'espace un plan $L^{(k)}$ (**x**) équivalent à un plan donné $L^{(k)}$ (**a**), la constance c_x est capable d'une détermination objective; il en est donc de même du vecteur **u** (**x**).

On voit la différence entre la définition établie ici et la définition établie plus haut seulement à l'aide des axiomes de première espèce. Là on n'a défini que le rapport de deux utilités infinitésimales qui se rapportent à une même position, ici on a défini le rapport de deux utilités infinitésimales quelconques. Il n'y a que la dernière définition qui constitue l'utilité en tant que quantité. La fixation du facteur arbitraire qui mesure la longueur de **u** (**a**) est une question de la fixation de l'unité de mesure pour l'utilité marginale. Ce facteur est constant pour tous les points du champ considéré (ce qui le distingue du facteur qui figure dans la première version de la définition). Mais il peut varier du champ d'un individu au champ d'un autre individu.

La définition adoptée n'est donc pas universelle dans le sens qu'elle permet de mesurer les utilités marginales qui se rapportent à des individus différents. Le champ de choix de chaque individu est affecté d'un coëfficient de proportionnalité que nous n'avons pas défini, et qu'il sera probablement impossible de définir d'une façon objective. C'est là un fait analogue par exemple à la comparaison de la sensation des couleurs chez les différents individus. C'est un fait objectif que les individus qui ne sont pas atteints de daltonisme, sont toujours d'accord sur la question de savoir si dans une situation donneé le vocable qu'il faut employer est « rouge » ou « vert », et même sur la question de savoir distinguer ce qui est harmonie et ce qui ne l'est pas, dans le monde des couleurs. Mais il n'y a pas de fait objectif qui permet d'exclure l'hypothèse que l'état psychologique qui chez *A* est toujours associé au vocable « rouge » est justement l'état qui chez *B* est associé au vocable « vert ».

Ce manque d'universalité dans la définition objective de l'utilité marginale n'est pourtant pas essentiel pour l'objet que nous poursuivons. Ce qui importe pour nous c'est d'avoir défini le champ de choix d'un individu déterminé.

D'après la définition adoptée, l'utilité marginale n'est en somme autre chose qu'un coëfficient de choix éventuel. Si l'on offre à l'individu une quantité δx_i du bien no. i a être payée avec une quantité δx_j du bien no. j, l'individu acceptera ou non suivant que le prix relatif $\frac{\delta x_j}{\delta x_i} \lesseqgtr \frac{u_i}{u_j}$. Il en découle qu'au moment où se réalise actuellement l'équilibre du marché dont fait partie notre individu, celui-ci se trouve à un point de son champ de choix ou les composantes de **u** (**x**) sont proportionnelles aux prix. Puisque l'utilité marginale n'est qu'un coëfficient de choix, on pourra la désigner sous ce nom. Ce sera là une sauvegarde contre les discussions stériles relatives à la « cause » de la valeur, et à des questions analogues. L'utilité d'une telle sauvegarde se manifeste assez souvent. Nous employons le terme coëfficient de choix quelquefois comme synonyme de l'utilité marginale, tout en gardant en principe ce dernier terme. On pourra aussi envisager d'autres termes par exemple, *l'ophélimité* de M. Pareto ou la *désirabilité* introduite par M. Gide et récemment adoptée par M. Fisher.

En partant de la définition de l'utilité marginale on pourra chercher une définition de l'utilité totale en considérant l'intégrale de $\mathbf{u}$ ($\mathbf{x}$) prise le long du chemin de consommation. Toutefois ce passage de l'utilité marginale à l'utilité totale n'est pas aussi simple qu'il paraît à première vue. En particulier on n'a pas seulement à distinguer deux cas suivant que $\mathbf{u}$ ($\mathbf{x}$) dérive d'un potentiel ou non. On a aussi à faire des distinctions plus délicates. Mais la question de l'utilité totale n'étant pas essentielle pour ce qui suit, nous n'y insistons pas [1].

§ 2. - Les courbes d'utilité marginale.

Considérons plus particulièrement la variation d'une seule des composantes u_m de $\mathbf{u}$ c'est-à-dire la variation dans l'utilité marginale du bien no. *m*. C'est une fonction du vecteur $\mathbf{x}$. Dans le cas où u_m ne dépend que de la composante x_m de $\mathbf{x}$ on dit que le bien no. *m* est *indépendant* des autres biens. Dans ce cas on peut évidemment représenter la variation de u_m par une courbe plane $u_m = f\ (x_m)$ dont l'ordonnée est u_m et l'abcisse x_m. C'est la courbe de l'utilité marginale. On a quelquefois essayé de donner une définition quantitative de l'utilité marginale en se basant uniquement sur la notion de direction maximum, mais en faisant l'hypothèse supplémentaire que tous les biens sont indépendants.

Il nous semble que c'est là un cercle vicieux, parce que l'on ne saurait donner une définition objective de ce qu'il faut entendre par biens indépendants sans avoir d'abord donné une définition quantitative de l'utilité marginale. En effet, la seule donnée de la direction maximum ne suffit pas pour pouvoir discerner si l'on se trouve dans le cas des biens indépendants ou non. Il est vrai que la variation de la direction maximum doit satisfaire à une condition nécessaire, qui est la condition de l'intégrabilité de l'équation différentielle $\mathbf{u}\ \delta\mathbf{x} = 0$ ou ce qui revient au même: à la condition pour que la direction maximum soit la direction d'un vecteur qui dérive d'un potentiel. Mais c'est là une condition nécessaire, et non suffisante pour l'indépendance des biens.

D'un autre côté si les biens sont indépendants et si $\mathbf{u}$ ($\mathbf{x}$) est le vecteur correspondant, le vecteur ψ ($\mathbf{x}$) $\mathbf{u}$ ($\mathbf{x}$), où ψ est une fonction arbitraire de $\mathbf{x}$, correspond à des biens non-indépendants pour lesquels la direction maximum est toutefois partout la même. C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire de chercher une définition quantitative de l'utilité marginale en nous plaçant au point de vue général adopté au § 1. Dans ce qui suit, nous abandonnons le point de vue général pour considérer le cas des biens indépendants.

---

[1] Si l'on interprète *points*, *espace*, etc. d'une façon, suffisament générale, la méthode précédente s'applique aussi au cas où les alternatives sont définies comme des distributions de probabilité.

Au lieu de $u_m = f(x_m)$ nous employons la notation abrégée $u = f(x)$, ce qui signifie que l'utilité marginale du bien considéré est fonction de la quantité x de ce bien.

On a souvent besoin de caractériser la croissance (ou décroissance) de $f(x)$ par rapport à la croissance de x, soit à un point déterminé, soit dans un intervalle donné. Nous supposons que $f(x)$ a une valeur bien déterminée et possède une dérivée dans l'intervalle que nous avons à considérer. La dérivée $f'(x)$ ne peut pas à elle seule nous donner des renseignements sur le caractère de la croissance (ou décroissance) de l'utilité marginale puisqu'elle est changée par un changement de l'unité de mesure, soit de la quantité x soit de l'utilité marginale. Il est évidemment possible de construire une infinité de fonctions dérivées de $f(x)$ qui caractérisent la croissance de $f(x)$ et dont la valeur n'est pas changée par un changement d'unité de mesure. Telles par exemple les fonctions

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{h} = \frac{f'(x)\, x}{f(x)}$$

et

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)}\right]^{\frac{x}{h}} = e^{\frac{f'(x)\, x}{f(x)}}$$

Nous considérons en particulier la fonction $\dfrac{f'(x)\, x}{f(x)}$ qui sera appelée la *proportion de croissance* de $f(x)$. Nous la désignons par $f(x)$. Sa valeur négative $-\,'f(x)$ sera appelée la *proportion de décroissance*. La valeur réciproque $-\dfrac{1}{'f(x)}$ est quelque fois appelée le coëfficient d'élasticité. La fonction $'f(x)$ joue un rôle important dans beaucoup de problèmes d'économie pure. Elle n'est évidemment autre chose que la dérivée logarithmique $\dfrac{d \log f(x)}{d \log x}$. Pour x et $f(x)$ positifs elle est donc représentée géométriquement par le coëfficient angulaire de la tangente à la courbe considéré tracée à l'échelle logarithmique.

Par analogie avec les dérivées successives on pourra définir des proportions de croissance d'ordre supérieur. Supposant l'existence des dérivées d'ordre supérieur on pourra par exemple considérer les proportions de croissance itérées ou bien les fonctions $\dfrac{f^{(n)}(x)\, x^n}{f(x)}$ ou encore les fonctions ${}^{(n)}f(x) = \dfrac{d^n \log f(x)}{d\,(\log x)^n}$.

Ces fonctions sont assez intéressantes au point de vue des applications parce que leur valeur à un point donné caractérise l'allure de la courbe dans le voisinage de ce point. Ainsi la valeur des fonctions

$\frac{{}^{n)}f(x)}{n!}$ pour $x = 1$ sont évidemment les coëfficients du développement de $\log f(x)$ suivant les puissances de $\log x$.

* * *

Dans ce qui suit nous allons considérer spécialement l'utilité marginale du bien particulier qui est la monnaie.

Pour cela il sera nécessaire d'insister sur une distinction importante entre deux catégories de biens économiques: les biens directs, qui peuvent être consommés directement, et les biens indirects tels que la monnaie, dont le seul but est d'être échangée avec d'autres biens.

La condition pour qu'il soit plausible de poser les axiomes de choix du § 1 dans le cas où quelques-uns des M biens sont des biens indirects, est évidemment que les rapports quantitatifs dans lesquels l'individu peut échanger les biens indirects avec des biens directs, soient donnés.

Considérons un tableau de prix d'échange et appelons *vecteur prix* le vecteur dont les composantes sont proportionnelles aux prix qui figurent au tableau, une quelconque de ses composantes étant choisie égale à l'unité. Si quelques-uns des M biens ne figurent pas au tableau, nous conviendrons de faire les composantes correspondantes du vecteur prix égales à zéro. Nous dirons que le vecteur prix *embrasse* les biens qui figurent au tableau.

Cela étant, nous pouvons formuler la remarque ci-dessus ainsi: Dans le cas, où quelques-uns des M biens sont des biens indirects, la définition d'un champ de choix implique la donnée d'un vecteur prix qui embrasse tous les biens indirects et au moins un bien direct. A chaque vecteur prix correspond un champ de choix. On peut donc considérer le champ comme défini par le vecteur prix considéré, et l'on voit que l'on peut definir le rapport des longueurs de $\mathbf{u}$ pour des champs définis par des vecteurs prix différents de la même façon dont on a défini le rapport des longueurs de $\mathbf{u}$ pour des positions différentes d'un même champ.

La monnaie est le bien indirect par excellence. Pour définir son utilité marginale, il faut donc donner non seulement la position de l'individu mais aussi le vecteur prix qui définit le champ de choix. Soit $\mathbf{r}$ la position de l'individu, $\mathbf{z}$ le vecteur prix. Alors l'utilité marginale de la monnaie sera une fonction

$$u = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$$

Sous cette forme générale, la fonction φ dépend d'un si grand nombre de variables qu'elle n'est pas maniable, du moins si l'on se propose d'arriver à des conclusions précises qui pourront être vérifiées par l'observation concrète. Il faut donc envisager des hypothèses qui permettent de simplifier la forme de φ. Les deux hypothèses qui nous semblent les plus intéressantes au point de vue économique, sont les suivantes.

D'abord, **r** restant constant et **z** embrassant tous les biens, nous supposons que la valeur de φ n'est pas changée si le vecteur **z** est changé de telle façon que la moyenne de ces composantes qui est le *niveau des prix* reste constante. On sait qu'il y a plusieurs manières de définir le niveau des prix. Au point de vue théorique le contenu de l'hypothèse considérée sera différent selon la construction du nombre indice du niveau des prix adoptés. Nous ne pouvons pas ici insister sur les différentes constructions des nombres indices des prix. Nous admettons simplement que l'hypothèse que nous avons faite est l'hypothèse qui correspond à la construction particulière employée dans les statistiques que nous utiliserons plus tard. Du reste au point de vue pratique la diversité des constructions des nombres indices des prix n'a pas une importance aussi grande qu'au point de vue théorique.

La seconde hypothèse que nous admettons est la suivante.

Le niveau des prix restant constant, nous supposons que la valeur de φ n'est pas changée si la position **r** est changée de telle façon que le produit intérieur $\mathbf{rz} = r_1 z_1 + r_2 z_2 + \ldots + r_M z_M$ reste constant. On voit que cette expression n'est autre chose que l'évaluation en unités monétaires des ressources dont l'individu dispose pendant l'unité de temps, c'est-à-dire son *revenu nominal* rapporté à l'unité de temps.

Ces hypothèses étant admises, l'utilité marginale de la monnaie sera une fonction

$$u = \varphi\,(r, z)$$

du revenu nominal r et du niveau des prix z.

Par une transformation simple la fonction $\varphi\,(r, z)$ peut être exprimée à l'aide d'une fonction d'une seule variable.

En effet d'après les axiomes adoptés le choix de l'individu ne peut être influencé par un changement de l'unité monétaire. Il doit par exemple être indifférent si l'on compte son revenu en francs ou en centimes. Il s'en suit que la fonction $\varphi\,(r, z)$ doit satisfaire à l'équation fonctionnelle

$$k\,\varphi\,(kr, kz) = \varphi\,(r, z)$$

k étant un facteur arbitraire.

Supposant que les dérivées partielles de φ existent, nous obtenons en dérivant par rapport à k, et en faisant ensuite $k = 1$

$$r\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} + z\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi = 0$$

La solution de cette équation aux dérivées partielles est comme on le sait

$$\varphi\,(r, z) = \frac{1}{z}\,\Phi\left(\frac{r}{z}\right).$$

Φ ètant une fonction arbitraire. Pour la déterminer faisons $z = z_0$, z_0 étant un niveau des prix donnés, par exemple le niveau qui sert de base à la construction du nombre indice. Nous aurons

$$\frac{1}{z_0}\,\Phi\left(\frac{r}{z_0}\right) = \varphi\,(r, z_0) = g\,(r)$$

d'où

$$\varphi\,(r, z) = \frac{1}{\left(\frac{z}{z_0}\right)}\,g\left(\frac{r}{\left(\frac{z}{z_0}\right)}\right)$$

$g\,(r)$ étant la fonction qui définit la variation de l'utilité marginale de la monnaie au niveau des prix z_0.

Changeons un peu les notations. Désignons le niveau des prix *relatif* $\frac{z}{z_0}$ par z, et laissons $\varphi\,(r, z)$ désigner l'utilité marginale de la monnaie au niveau relatif z. Alors nous aurons

$$u = \varphi\,(r, z) = \frac{1}{z}\,g\left(\frac{r}{z}\right)$$

formule que l'on peut du reste aussi déduire directement sans utiliser l'équation différentielle.

L'utilité marginale de la monnaie qui correspond à un revenu nominal quelconque et un niveau des prix quelconque, est donc connue si l'on connaît la variation de l'utilité marginale avec le revenu à un niveau de prix fixes, c'est-à-dire si l'on connaît la courbe d'utilité marginale à un niveau de prix constants. Cette propriété de la fonction $\varphi\,(r, z)$ est d'une importance fondamentale pour les applications.

De la formule $\varphi\,(r, z) = \frac{1}{z}\,g\left(\frac{r}{z}\right)$ découle une propriété assez intéressante de la fonction $\varphi\,(r, z)$. En effet un calcul facile donne

$$_z{}'\varphi = (-\,_r{}'\varphi) - 1$$

$_r{}'\varphi$ et $_z{}'\varphi$ désignant respectivement la proportion de croissance de φ par rapport à r et à z.

Le revenu nominal r restant constant, un accroissement infinitésimal du niveau des prix z a donc pour effet de faire augmenter ou diminuer l'utilité marginale de la monnaie suivant que la proportion de décroissance de l'utilité marginale par rapport à r (z restant constant) est plus grand ou plus petit que l'unité pour la valeur de r considerée.

D'une façon approximative le contenu de la relation $_z{}'\varphi = (-\,'_r\varphi) - 1$ peut être exprimé ainsi. Si la variation de l'utilité marginale avec le revenu (le niveau des prix restant constant) est telle qu'un petit accroissement positif de $h\%$ du revenu provoque une diminution de $qh\%$ de l'utilité marginale, ce qui veut dire que la proportion de décroissance est égale a q, alors un petit accroissement de $k\%$ du niveau des prix (le revenu nominal restant constant) provoquera un accroissement (positif ou négatif) de $(q - 1)\ k\%$ de l'utilité marginale. Cet accroissement est donc d'autant plus grand (au sens algébrique) que la proportion de décroissance q est grande. Il est positif si $q > 1$ et négatif si $q < 1$.

M. Birck dans son traité «Læren om Grænseværdien» (Kobenhavn 1918) p. 117 a énoncé la proposition suivante.

Si la « vitesse » de décroissance est « grande » ou « petite » un accroissement du niveau des prix conduira à une diminution de l'utilité marginale, tandis que celle-ci est augmentée si la « vitesse » de décroissance a une valeur « moyenne ».

M. Birck n'a pas défini ce qu'il entend par « vitesse » de décroissance, mais son raisonnement montre qu'il a eu en vue le coëfficient angulaire de la courbe qui représente la variation de l'utilité marginale de la monnaie à un niveau des prix constant, la courbe étant tracée à l'echelle ordinaire. Comme nous l'avons vu le problème en question n'a rien à faire avec la valeur de ce coëfficient.

La proposition erronée de M. Birck s'explique par le fait qu'il a raisonné sur un exemple numérique tout en confondant deux propriétés distinctes de la suite des chiffres qu'il a choisis. L'une est essentielle pour le résultat de ses calculs — qu'il a du reste effectué d'une façon correcte. L'autre ne l'est pas, et c'est pourtant cette dernière qui a attiré l'attention de M. Birck. La première propriété est l'allure de la courbe tracée à l'échelle logarithmique, l'autre est l'allure de la courbe tracée à l'échelle ordinaire. L'exemple numérique de M. Birck est par hasard tel que $\frac{\partial \log \varphi}{\partial \log r}$ est inférieure à l'unité dans l'intervalle où $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ est « grande » ainsi que dans l'intervalle où $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ est « petite », tandis que $\frac{\partial \log \varphi}{\partial \log r}$ est supérieure à l'unité dans l'intervalle où $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ a une valeur « moyenne ». Si M. Birck avait tracée la courbe à l'échelle logarithmique, il aurait sans doute formulé la proposition d'une façon correcte.

L'allure de la courbe tracée à l'échelle logaritmique montre aussi une autre chose, à savoir que l'exemple numérique de M. Birck n'est pas apte a illustrer la variation de l'utilité marginale de la monnaie. On a lieu de croire que dans le cas concret la proportion de décroissance est supérieure à l'unité pour des petits revenus mais inférieure à l'unité pour des grands revenus, ce qui conduit à la conclusion que pour les pauvres l'utilité marginale de la monnaie sera augmentée par suite d'un accroissement du niveau des prix (le revenu nominal restant constant), tandis que pour les riches elle sera diminuée. C'est là précisement la conclusion contraire à celle à laquelle est parvenu M. Birck.

Les remarques précédentes montrent combien les conclusions tirées des exemples numériques peuvent être erronées en économie politique. Même dans les cas aussi élémentaires que celui que nous avons consideré il est indispensable de faire usage de la notation de l'analyse mathématique. Cela n'empêche évidemment qu'un exemple numérique — tout en ne pouvant pas servir de moyen de recherche — garde une haute valeur comme moyen de vulgarisation d'une théorie dont on s'est assuré l'exactitude par une étude mathématique rigoureuse.

* * *

Les analogies entre la mécanique rationelle et l'économie pure sont nombreuses. Ainsi le vecteur **u** joue dans l'économie pure un rôle analogue à l'attraction universelle dans la mécanique rationnelle. Mais il y a aussi des différences essentielles. Les phénomènes économiques concrets sont trop complexes pour qu'il soit possible par des considérations *à priori* de déterminer d'une façon précise la forme des fonctions qui donnent les composantes du vecteur **u**. Il n'existe pas une loi universelle d'attraction économique comme il existe une loi universelle de gravitation. En particulier il n'est pas possible d'assigner *à priori* une forme bien déterminée à la fonction $g(r)$. Pourtant cela ne veut pas dire qu'elle doit être considérée comme une fonction absolument quelconque.

Par des considérations économiques sur lesquelles nous ne pouvons pas insister ici, on arrive à la conclusion que la fonction $g(r)$ doit satisfaire aux conditions suivantes.

1) Il existe un nombre positif a (le minimum d'existence au niveau des prix donné z_0) tel que $g(r) > 0$ et possède des dérivées de premier et second ordre pour $a < r < \infty$.

2 A) $\lim\limits_{r \to a} g(r) = \infty$. 2 B) $\lim\limits_{r \to \infty} g(r) = 0$.

3) $\dfrac{d}{dr} g(r) = g'(r) < 0$ dans l'intervalle $a < r < \infty$.

4) La proportion de décroissance $-\ 'g(r) = -\dfrac{g'(r)\,r}{g(r)}$ est plus grande que l'unité pour des valeurs de $r\ (> a)$ assez petites.

5) $\lim\limits_{r \to \infty} {'g}(r) = 0$.

Ces conditions restreignent considérablement le choix de formules empiriques d'interpolation que l'on pourra essayer.

Les formules telles que $'g(r) = o(r^{-k})$ où k est un nombre positif arbitraire doivent par exemple être exclues. En effet on a

$$\log g(R) = \int_b^R {'g}(r)\, r^k \frac{dr}{r^{1+k}} + \text{constante}$$

b étant un nombre quelconque $> a$.

En vertu de la condition 1) $|\,'g(r)\, r^k\,|$ est borné dans tout intervalle fini à partir de $r = b$, elle l'est encore de $r = b$ jusqu'à $r = \infty$ si $'g(r) = O(r^{-k})$. Dans ce cas on a donc de $R = b$ jusqu'à $R = \infty$

$$|\log g(R)| \lesseqgtr M \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^k - \left(\frac{1}{R}\right)^k}{k} + \text{constante}$$

M étant un nombre fini.

Cela montre que $\lim\limits_{R \to \infty} |\log g(R)|$ ne peut être infinie et par conséquence que la condition (2 B) ne peut être satisfaite.

Pour que cette condition soit satisfaite il faut que

$$\lim_{r \to \infty} |\,'g(r)\, r^k\,| = \infty$$

et cela pour $k\ (> 0)$ arbitrairement petit.

On voit en particulier qu'une fonction $g(r)$ dont la proportion de croissance est de la forme

$$'g(r) = Re^Q$$

où R et Q sont des fonctions rationelles en r, ne peut satisfaire à la fois à (2 B) et (5); il en est ainsi à fortiori d'une fonction $g(r)$ qui peut elle-même être mise sous la forme $g(r) = Re^Q$ parce que sa proportion de croissance est une fonction rationelle.

On en conclut que la fonction $g(r) = \dfrac{\text{constante}}{r - a}$ à laquelle conduit l'hypothèse de Daniel Bernoulli [1] doit être rejetée, et il en est de même de la fonction $g(r) = \dfrac{\text{constante}}{(r-a)^2}$ récemment introduite par M. Jordan [2].

Une fonction qui satisfait à toutes les conditions énoncées pourvu que les constantes soient choisies convenablement est la fonction

$$g(r) = Re^Q$$

R et Q étant des fonctions rationnelles en $\log r$.

Pour le voir on peut par exemple faire

$$Q = 0$$

$$R = \frac{A}{B}$$

A et B étant des polynomes en $\log r$

$$A = \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu\ (\log r)^\nu \qquad \mathrm{B} = \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu\ (\log r)^\nu$$

$$(m < n)$$

dont les coëfficients sont non-négatifs sauf B_0 que l'on fait négatif et $> -\sum\limits_{\nu=1}^{n} B_v$

---

(1) *Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis*. Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Tom. V (1738), p. 175. Traduction allemande par Pringsheim, Leipzig, 1896.

(2) « The American Mathematical Monthly », Vol. XXXI, No. 4, 1924.

Puisque B est négatif pour $\log r = 0$ et positif pour $\log r = 1$, l'équation $B = 0$ a une racine $\log r = \log a$ entre 0 et 1. Du reste c'est la seule racine réelle et positive de cette équation, B étant constamment croissant pour $\log r$ positif. Une valeur positive de $\log r$ ne pouvant annuler A, nous voyons que $\lim_{r \to a} g(r) = \infty$. De plus $g(r)$ est toujours positive pour $r > a$ et l'on a $\lim_{r \to \infty} g(r) = 0$, m étant $< n$. Les conditions (1) et (2) sont donc satisfaites. D'autre part on a $g'(r) = -\frac{C}{r B^2}$, C étant le polynome en $\log r$

$$C = \sum_{k=1}^{m+n} (\log r)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} (k - 2\nu)(A_\nu B_{k-\nu} - A_{k-\nu} B_\nu)$$

Cette expression est certainement positive si l'on choisit tous les A_ν non nuls et de plus tels que la suite $\frac{B_\nu}{A_\nu} (\nu = 0, 1 \ldots)$ forme une suite non décroissante.

La proportion de décroissance est égale à $-'g(r) = \frac{C}{AB}$ ·
Cette expression peut être rendue arbitrairement grande en faisant la différence $\log r - \log a$ assez petite, parce que $\log a$ est racine de $B = 0$, et C, ayant tous ses coëfficients non négatifs, est positif pour $\log r = \log a$. Enfin C étant de degré $m + n - 1$ tandis que A et B sont de degrés m et n respectivement, on voit que $\lim_{r \to \infty} {}'g(r) = 0$. Toutes les conditions (1 — 5) sont donc satisfaites.

La forme la plus simple que l'on puisse employer comme formule d'interpolation pour l'utilité marginale de la monnaie est donc la formule

$$g(r) = \frac{\text{costante}}{\log r - \log a} \tag{1}$$

C'est la formule de Bernoulli, à cela près, que l'on a remplacé r par $\log r$. La fonction (1) où l'on fait la constante égale à l'unité, a entr'autre la propriété intéressante d'être égale à sa proportion de croissance. Nous croyons qu'on doit arriver à des résultats intéressants en la prenant comme point de départ d'une nouvelle théorie de l'espérance morale.

§ 3. - La méthode des isoquantes.

Le fait qui permet d'établir un lien entre la théorie abstraite de l'économie pure et les phénoménes économiques concrets, est celui dont nous avons fait mention au § 1: La proportionnalité des prix et des utilités marginales au point de l'équilibre du marché.

Cette proportionnalité est la pierre angulaire de toute étude qui a pour but de dévoiler les propriétés des champs de choix concrets qui existent dans le monde économique [1]. Chaque point de l'équilibre qu'on a la chance d'observer donne un renseignement relatif à la constitution du champ de choix dans le voisinage du point qui correspond à l'équilibre observé.

C'est évidemment une tâche impossible d'étudier les champs de choix de chaque individu qui fait partie d'un marché donné. C'est une tâche comparable à celle d'étudier individuellement les trajets des molécules dans une masse gazeuse. Mais dans le monde économique comme dans le monde des molécules, ce qui importe ce n'est pas de faire la description individuelle des éléments, mais d'arriver à la connaissance de certaines propriétés *moyennes*, qui caractérisent l'ensemble des éléments.

Ce qui importe en économie pure ce n'est pas de connaître la disposition des personnalités qui font partie d'un marché donné, mais de connaître la disposition de l'individu typique. Pour rechercher la disposition de cet individu typique l'économie pure ne peut pas comme les sciences physiques avoir recours à l'expérience du laboratoire, mais en récompense elle dispose d'un matériel d'observation statistique énorme.

L'utilisation de ce matériel peut être intensif ou extensif. Dans le premier cas on cherche à restreindre dans la mesure du possible la catégorie des individus économiques qui entre dans l'analyse. On considère un milieu économique bien déterminé: une région particulière, une certaine classe sociale, un intervalle de temps assez restreint pour que l'on puisse supposer que la constitution du champ de choix n'a pas varié, etc. Les moyennes qui en résultent seront des moyennes particulières.

Dans le second cas on cherche les moyennes « de second ordre », c'est-à-dire les moyennes relatives à toutes les classes, à tout un pays ou même des moyennes caractérisant le marché mondial. Les résultats que l'on peut obtenir par cette dernière méthode seront peut-être les plus intéressants au point de vue de l'utilité immédiate qu'en peut tirer l'administration publique, mais les résultats obtenus par la première méthode sont évidemment plus intéressants au point de vue théorique, et le jour où les recherches économétriques auront reçu un tel développement que l'on puisse songer à reconstruire le phénomène global par les phénomènes partiels étudiés par la méthode intensive, cette dernière aura prouvé sa supériorité même au point

---

[1] C'est là un problème statique du marché. L'étude de la manière dont cet équilibre change avec le temps — s'il change plus ou moins vite etc. — est un problème dynamique du marché. C'est évidemment un problème beaucoup plus complexe. Nous employons ici les termes statiques et dynamiques dans un sens analogue à celui dans lequel les termes sont employés en mécanique rationnelle. Certains auteurs économiques emploient ces termes dans d'autres sens qui peuvent facilement conduire à des malentendus. Ainsi M. SCHULTZ dans ses beaux travaux statistiques dans le « Journal of Political Economy », Vol. XXXIII (1925) emploie p. 501 les termes « statique » et « dynamique » suivant que le nombre de variables que l'on fait intervenir dans l'étude de l'équilibre statique est petit ou grand.

de vue des applications. Le point de vue que nous adoptons au présent paragraphe et au suivant, est surtout le point de vue de la méthode intensive.

Dans l'économie comme dans la médecine, ce sont souvent les manifestations extrêmes ou même anormales qui pourront le mieux servir à éclairer la loi à laquelle obéit le phénomène étudié. Pour déterminer la courbe d'utilité il importe de connaître non seulement quelques points dans le voisinage du point qui correspond à un équilibre économique « normal », mais aussi des points plus éloignés du point « normal ».

C'est ici que la politique internationale est venue à l'aide de l'économiste en faisant la vaste expérience économique qui est la guerre mondiale. Il est vrai que ce même bouleversement qui a provoqué dans les chiffres statistiques ces grandes fluctuations dont l'économie pure a besoin, a aussi rendu la critique du matériel très difficile. Mais c'est là une difficulté inhérente au problème, et l'économiste statisticien n'a qu'à chercher à la vaincre en doublant les précautions contre l'erreur et en cherchant autant que cela est possible, à contrôler les résultats obtenus par des méthodes indépendantes. Nous croyons que l'utilisation systématique de ce vaste matériel au profit de l'économie pure — utilisation qui est à peine commencée — va donner des résultats très importants.

Dans le présent paragraphe et dans le suivant nous chercherons à utiliser une certaine catégorie de ce matériel pour l'étude de l'utilité marginale de la monnaie.

* * *

Soit $f(x)$ la fonction qui donne l'utilité marginale d'un bien indépendant en fonction de la quantité x que l'individu dispose pendant l'unité de temps.

Soit $\frac{1}{z}\, g\left(\frac{r}{z}\right) = \frac{1}{z}\, g(\rho)$ la fonction qui donne l'utilité marginale de la monnaie, z désignant le niveau des prix relatif, r le revenu nominal évalué comme une somme d'unités monétaires, et $\rho = \frac{r}{z}$ le revenu réel. Enfin soit p le prix du bien particulier considéré évalué en unités monétaires, $v = \frac{p}{z}$ le prix relatif et $w = \frac{1}{v}$ sa valeur réciproque.

Alors on a au point de l'équilibre du marché

$$w\, f(x) = g(\rho)$$

Cette relation entre les variables x, ρ et w définit une surface que nous appelons la *surface de consommation.*

Considérons x comme la variable dépendante et projetons les courbes de niveau de la surface dans le plan des $(\rho\, w)$. Nous appellerons ces courbes des *isoquantes*, parce-que chacune d'elles correspond à une quantité fixe du bien considéré.

De la relation $wf = g$ nous tirons

$$wf'(x) \frac{\partial x}{\partial \rho} = g'(\rho)$$

$$w^2 f'(x) \frac{\partial x}{\partial w} = -g(\rho)$$

Si $f'(x)$ est négative, ce qui correspond à l'hypothèse de la décroissance de l'utilité marginale du bien considéré, et si de plus $f(0)$ est fini et $f(x)$ zéro pour une valeur finie x_0 de x (la quantité de satiété), la surface de consommation aura la forme indiquée dans la figure 1. Une courbe quelconque du système que l'on obtient en coupant la

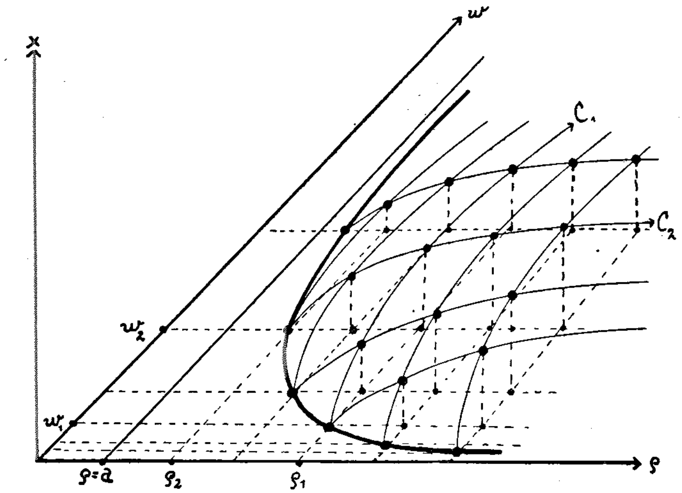

Fig. 1

surface par des plans parallèles au plan des (wx), est croissante avec w, et une courbe quelconque du système parallèle au plan des (ρx) est croissante avec ρ. Les asymptotes des deux systèmes sont toutes situées dans le plan $x = x_0$ de façon à ce que la portion de la surface qui correspond à ρ et w positifs soit située tout entière entre les plans $x = 0$ et $x = x_0$.

L'interprétation économique de ces propriétés est facile. Remarquant que x, ρ et w sont des quantités qui se rapportent à l'équilibre du marché, nous voyons que si le revenu réel ρ a une valeur fixe ρ_1, l'individu n'achète rien du bien considéré si w est très petite, c'est-à-dire si le prix relatif est très grand. Il commence ses achats à partir de $w = w_1$ et les augmente successivement suivant la courbe C_1 au fur et à mesure que le prix relatif baisse (c: au fur et à mesure que w augmente). D'un autre côté, si le prix relatif est constant $\frac{I}{W_2}$, il n'achète rien si son revenu réel est plus petit que ρ_2. A partir de ρ_2 il augmente ses achats suivant la courbe C_2 au fur et à mesure que le revenu réel ρ augmente.

Considérons maintenant les isoquantes. Leur équation est

$$w = \text{constante} \cdot g\ (\rho)$$

la constante étant du reste égale à la valeur que prend $\frac{1}{f(x)}$ si l'on fait $x =$ la quantité constante à laquelle correspond l'isoquante en question.

Mais c'est là à la constante et à la notation près, l'équation de la courbe

$$u = g\ (r)$$

qui caractérise les variations de l'utilité marginale de la monnaie au niveau des prix fixe z_0.

Abstraction faite de l'unité de mesure du revenu et de l'unité de mesure de l'utilité marginale — que l'on peut du reste choisir arbitrairement — la courbe cherchée est donc donnée par une quelconque des isoquantes. Dans la figure nous avons tracé l'isoquante qui correspond à $x = 0$, ainsi que son asymptote $\rho = a$, a étant le minimum d'existence au niveau des prix z_0.

Le problème de déterminer la courbe d'utilité marginale de la monnaie au niveau des prix fixe z_0 est donc réduit à la détermination de la surface de consommation qui est un problème où la constance du niveau des prix n'intervient pas.

Supposons que l'on dispose d'un matériel statistique d'où l'on peut tirer n couples de valeurs $\rho_\nu\ w_\nu\ x_\nu$ ($\nu = 1,\ 2,\ldots,\ n$) correspondant à des points sur la surface de consommation de l'individu typique du marché considéré. Pour pouvoir conclure de ces n observations à la forme de la surface il faut autant que cela est possible chercher à parer aux deux imperfections dont le matériel statistique est toujours affecté: son état incomplet et l'irrégularité de la covariance entre les variables. C'est le but que se propose l'interpolation et l'ajustement. Dans une analyse telle que la présente il est souvent difficile de distinguer ce qui est interpolation et ce qui est ajustement. Voilà pourquoi nous distinguons les méthodes que nous avons à envisager plutôt d'aprés le caractère des procédés que d'après le but que l'on a en vue.

La méthode directe consiste à porter les points observés $\rho_\nu\ w_\nu$ dans un système de coordonnées rectangulaires et à affecter chaque point d'une coté égale à la valeur correspondante de x_ν. Si l'irrégularité du matériel n'est pas trop grande, la graphique ainsi obtenue donnera déjà une idée de l'allure des isoquantes. Comme une première approximation on pourra les dessiner à main levée. Dans ce cas il sera préférable d'employer l'échelle logarithmique suivant l'axe des w parce que alors les isoquantes auront la même forme et ne se distinguent que par une translation dans la direction de l'axe des w. Au besoin on pourra faire un modèle stéréométrique et y effectuer un ajustement graphique à l'aide d'une courbe découpée d'une feuille mobile, l'axe des w portant bien entendu l'échelle logarithmique.

On arrive toutefois à des résultats plus précis en employant la méthode *d'interpolation temporelle.* On trace d'abord les trois lignes polygonales qui représentent la variation de ρ, w et x avec le temps. L'échelle doit être assez grande pour permettre une interpolation graphique rectiligne. Si ρ, w et x sont données par mois on pourra au besoin effectuer un ajustement mécanique, en remplaçant la donnée de chaque mois par la moyenne du trimestre dont le mois est le milieu. On trace ensuite une ligne droite x = constante = x_1 et l'on note les couples de valeurs ρ, w qui correspondent à l'intersection de la droite $x = x_1$ avec la ligne polygonale qui représente la variation de x avec le temps. On aura ainsi une suite de valeurs ρ, w qui caractérise l'isoquante correspondant à $x = x_1$.

On a la possibilité de déterminer ainsi différentes isoquantes indépendamment l'une de l'autre et de contrôler si les résultats sont concordants dans le sens que les valeurs de w données par une des isoquantes sont proportionnelles aux valeurs de w données par une autre isoquante.

La meilleure méthode est peut-être *l'ajustement analytique.* Elle consiste à adopter certaines formes des fonctions $f(x)$ et $g(r)$ et à déterminer les paramètres qui y figurent par exemple à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Dans le cas actuel où nous avons *à priori* certains renseignements sur la nature de la fonction $g(r)$, qui doit satisfaire aux conditions énumérées au § 2, il semble que la méthode analytique doit pouvoir conduire à des résultats intéressants. Dans le paragraphe suivant nous allons employer cette méthode et nous allons contrôler les résultats obtenus en montrant que les points (ρ w) déterminés par la méthode de l'interpolation temporelle se groupent nettement autour des isoquantes déterminées par la méthode des moindres carrés.

§ 4. - Applications aux données statistiques.

La grande association coopérative l'« Union des Coopérateurs » à Paris, a depuis quelques années organisé un service statistique qui relève d'une façon continue les sorties des différents articles vendus au détail dans les multiples succursales de la société, ainsi que les prix de ces articles et d'autres données statistiques qui intéressent le Conseil d'Administration.

Ce matériel très détaillé a une haute valeur comme moyen d'étudier les propriétés concrètes du champ de choix chez la clientèle de la société. Les détails de ce matériel ne sont pas publiés, mais la direction a eu l'obligeance de me communiquer toutes les données dont j'avais besoin. Je lui exprime ici mes vifs remerciements. Les données utilisées dans le travail actuel sont les suivantes:

Les sorties de sucre.
Le prix du sucre.
Le chiffre d'affaires de la société.
Le nombre de sociétaires.
L'indice du coût de la vie calculé par le service statistique de la société (moyenne arithmétique avec poids fixes).

Toutes ces données sont mensuelles. Nous les utiliserons seulement à partir du mois de juin 1920. La principale raison en est qu'à partir du 1.er juin 1920 l'« Union des Coopérateurs Parisiens » était fusionnée avec la société, ce qui a considérablement augmenté le chiffre d'affaires. Nous ne croyons pas que le rationnement du sucre ait empêché sensiblement le libre jeu du marché pour la période en question. A partir du 17 août 1920, le rationnement à été limité à une catégorie très restreinte de consommateurs (enfants etc.), mais déjà par les décrets du 1.er février et 10 octobre 1919 il a été rendu beaucoup moins sévère que pendant la guerre.

A titre de vérification nous avons utilisé bon nombre de données fournies par la Statistique Générale de la France. Nous avons à remercier M. de Bernonville pour la communication de certaines données non publiées relativement à l'octroi de Paris et à des budgets de familles ouvrières.

Nous ne pouvons pas ici insister sur le travail préparatoire (la comparaison des différentes séries statistiques qui étaient à notre disposition, l'examen critique des données etc.), qui nous a amené à choisir les données énumérées ci-dessus pour une analyse plus approfondie. Nous ne pouvons pas non plus donner tous les détails relatifs aux calculs numériques assez longs qu'il a fallu effectuer. Nous nous bornons à résumer les résultats principaux.

La première réduction des chiffres bruts a consisté en ceci.

Nous avons d'abord éliminé les fluctuations périodiques annuelles dans le chiffre d'affaires par la méthode de Person (1) que l'on peut formuler ainsi. Si l'on dispose d'une série de données mensuelles, on remplace les données par leurs logarithmes. Soit y_ν le logarithme de la donnée ν-ième, les données étant numérotées de façon que l'indice ν des données relatives aux mois de janvier, février etc., soient respectivement $\equiv 1, \equiv 2, \ldots$ (mod. 12). On forme la suite des différences $\triangle y_\nu = y_{\nu+1} - y_\nu$ et l'on calcule la moyenne arithmétique G_1 des $\triangle y_\nu$ $(\nu \equiv 1)$, la moyenne G_2 des $\triangle y_\nu$ $(\nu \equiv 2)$ etc. On forme la suite $\overline{G}_\mu = G_\mu - \sum_{i=1}^{12} G_i$ $(\mu = 1, 2 \ldots 12)$ et l'on calcule les sommes $K_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} \overline{G}_i$. Comme contrôle on a $K_{12} = 0$. On pose enfin $Y_1 = -\frac{1}{12} \sum_{\mu=1}^{12} K_\mu$, $Y_\mu = K_{\mu-1} + Y_1$ $(\mu = 2, 3 \ldots 12)$.

(1) *Indices of General Business Conditions*, « Review of Economic Statistics », 1919.

Alors la suite $Y_1\, Y_2 \ldots Y_{12}$ est la suite des logarithmes aux indices des fluctuations périodiques. Si $\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_{12}$ sont les numéri correspondants, l'élimination des fluctuations périodiques consiste à diviser les données relatives aux mois de janvier, février etc., par $\eta_1\, \eta_2 \ldots$ etc.

Les données brutes relatives au nombre de sociétaires se rapportant au dernier jour du mois nous avons effectué une interpolation rectiligne pour trouver le nombre qui correspond au milieu du mois.

Ces réductions étant effectuées, nous avons pris le rapport entre le chiffre d'affaires et le nombre de sociétaires comme un indice de la variation dans le revenu nominal mensuel r de l'individu typique du marché. Le quotient $\dfrac{r}{\text{indice du coût de la vie}}$ devient alors proportionnel à la variable ρ qui intervient dans la méthode des isoquantes. Comme indice du coût de la vie nous avons employé celui calculé par l'Union des Coopérateurs. La variable w de la méthode des isoquantes devient proportionnelle au quotient $\dfrac{\text{indice du coût de la vie}}{\text{prix du sucre}}$, et la variable x proportionnelle au quotient $\dfrac{\text{sorties de sucre}}{\text{nombre de sociétaires}}$. Si l'on choisit l'unité de mesure de ρ, w et x d'une facon convenable, les variables peuvent être considérées comme étant non seulement proportionnelles mais égales aux quotients calculés. Le tableau I donne le résultat de ces calculs.

Nous avons d'abord pensé que peut-être la réaction dans la quantité vendue par suite d'un changement de prix ne se manifesterait pas dans le mois même du changement de prix, mais dans le mois suivant. Toutefois le calcul des coëfficients de corrélation (de zéro et de premier ordre) pour des différents déplacements entre les séries x et w a montré que la corrélation maximum est réalisée si aucun déplacement n'est effectué. Celà montre du reste qu'il est plausible de considérer les quantités vendues comme des quantités effectivement consommées.

Comme une premiére orientation nous avons ensuite effectué une interpolation temporelle pur $x = 1250$, $x = 1500$ et $x = 1750$ par la méthode indiquée au § 3. Dans chacune des trois séries ρ, w ainsi obtenues nous avons déterminé une isoquante par la méthode des moindres carrés en employant pour l'utilité marginale de la monnaie la fonction $g\,(\rho) = \dfrac{\text{constante}}{\log \rho - \log a}$ du § 2. Employant cette fonction les constantes à déterminer sont les constantes $\log a$ et c qui entrent linéairement dans la relation

$$\log \rho = c \left(\frac{1}{w}\right) + \log a$$

TABLEAU I.

		Revenu réel	Valeur réciproque du prix relatif du sucre	Quantité de sucre consommée
		ϱ	w	x
1920	juin	376	756	2.710
	juillet	374	749	1.750
	août	385	742	2.976
	septembre	307	794	2.015
	octobre	273	837	1.115
	novembre	252	1.018	1.164
	décembre	226	1.266	928
1921	janvier	232	1.223	940
	février	226	1.162	710
	mars	240	1.100	850
	avril	253	978	1.223
	mai	277	975	1.181
	juin	262	1.081	1.510
	juillet	269	953	1.971
	août	254	944	1.602
	septembre	237	1.040	1.266
	octobre	245	1.228	1.832
	novembre	254	1.208	1.905
	décembre	258	1.196	2.000
1922	janvier	255	1.221	1.652
	février	268	1.200	1.728
	mars	281	1.130	1.870
	avril	273	1.125	1.710
	mai	259	1.218	1.780
	juin	243	1.178	1.962
	juillet	252	1.117	1.749
	août	252	1.070	1.823
	septembre	263	1.096	1.778
	octobre	253	1.197	1.900
	novembre	259	1.160	1.945
	décembre	273	1.092	1.955

D'après la théorie on devait s'attendre à trouver la même valeur de log a pour les trois isoquantes considérées, (les valeurs de la constante c devant bien entendu être différentes). Les résultats étaient aussi assez rapprochés. Toutefois il y avait une petite différence. Pour l'expliquer nous avons comparé les résultats obtenus en considérant tantôt log ρ tantôt $\frac{1}{w}$ comme la variable dépendante, c'est-à-dire en rendant dans le premier cas la somme des déviations $\Sigma\left(\log \rho - \left(c\,\frac{1}{w} + \log a\right)\right)^2$ minimum, dans le second cas la somme des déviations $\Sigma\left(\frac{I}{w}-\left(\frac{I}{c}\log\rho-\frac{\log a}{c}\right)\right)^2$. Il s'est montré que la discordance des résultats obtenus pour les différentes isoquantes était moins grande que la discordance des résultats obtenus en considérant tantôt log ρ tantôt $\frac{I}{w}$ comme la variable dépendante. Si donc on compare les erreurs introduites, d'une part par l'arbitraire dans le choix de la variable indépendante, d'autre part par cette irrégularité du matériel d'où provient le manque de proportionnalité des trois isoquantes, on trouve que la première erreur est la plus grande. Ce fait nous a montré la nécessité d'employer une ligne de regression moyenne, les variables ρ, w et x étant considérés d'une façon symétrique. Nous avons essayé la ligne de regression moyenne de Reed-Pearson (¹), mais le résultat n'a pas été satisfaisant. Nous étions ainsi amenés à considérer d'une façon plus générale le problème de la regression moyenne. Nous nous sommes arrêtés sur la méthode que voici.

Considérons m variables $x_1\, x_2 \ldots x_m$ dont on dispose de n ($> m$) observations $x_1^{(\nu)}\, x_2^{(\nu)} \ldots x_m^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2 \ldots n$). Nous supposons que toutes les variables sont rapportées à leur moyenne comme origine. On doit donc avoir

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_j^{(\nu)} = 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots m)$$

Soit

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \qquad b_{ii} = -1 \tag{2}$$

les m regressions linéaires déterminées par la méthode des moindres carrés en considérant la variable x_i ($i = 1, 2 \ldots m$) comme la variable dépendante. Pour le calcul effectif on peût employer le schéma de calcul de M. Yule (²) ou bien la méthode des équations normales de Gauss. Du reste nous donnerons ci-après l'expression explicite des coëfficients.

La condition nécessaire et suffisante pour que les m équations obtenues soient identiques, est évidemment que l'on ait $b_{ij} = \alpha_i\, \beta_j$ les α_i et β_j ($i, j = 1, 2 \ldots m$) étant deux suites de nombres donnés non nuls. Puisque $b_{ii} = -1$ on a $\alpha_i = -\frac{I}{\beta_i}$ d'où $b_{ij} = -\frac{\beta_j}{\beta_i}$. On en tire la condition nécessaire

$$b_{ij}\, b_{jk}\, b_{ki} = -1 \qquad (i, j, k = 1, 2 \ldots m) \tag{3}$$

(¹) Voir Czuber: *Lineare Ausgleichung und Korrelation*, « Archiv für die gesamte Psychologie », Vol. XLIV, 1923, où l'on trouve des notices bibliographiques.

(²) Proc. Roy. Soc. Series A. Vol. LXXIX, (1907), p. 182. Voir aussi chap. XII du traité «*Theory of Statistics*» par le même auteur d'où en particulier pour $k = j$

$$b_{ij}\, b_{ji} = +1.$$

La condition (3) est aussi suffisante puisque si les coëfficients de l'une des équations par exemple les b_{hj} ($j = 1, 2 \ldots m$) de l'équation h-ième sont donnés, on en tire

$$b_{ij} = -\frac{b_{hj}}{b_{hi}}$$

d'où en faisant $b_{hj} = \beta_j$

$$b_{ij} = -\frac{\beta_j}{\beta_i}$$

Soit $\varepsilon_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{|b_{ij}|}$ le signe du coëfficient b_{ij}. On voit que si la condition (3) est satisfaite, les coëfficients d'une équation quelconque par exemple les b_{hj} de l'équation h-ième sont proportionnels à $\varepsilon_{hj} \sqrt[m]{|\, b_{1j}\, b_{2j} \ldots b_{mj} \,|}$. On peut donc remplacer toutes les m équations (2) par une seule, à savoir

$$\sum_{j=1}^{m} B_j\, x_j = 0 \tag{4}$$

où

$$B_j = \varepsilon_{hj} \sqrt[m]{|\, b_{1j}\, b_{2j} \ldots b_{mj} \,|}$$

h étant un indice quelconque dont le choix est sans importance.

L'idée se présente alors de remplacer les m équations (2) par la seule équation (4) même dans la cas où la condition (3) n'est pas satisfaite. Pour cela il faut évidemment supposer que l'équation (4) soit indépendante du choix de l'indice h, c'est-à-dire que les signes ε_{ij} soient compatibles. La condition nécessaire et suffisante en est que

$$\varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{jk}\, \varepsilon_{ki} = -1 \qquad (i, j, k = 1, 2 \ldots m)$$

On peut faire remarquer que ce procédé pour déterminer une ligne de regression moyenne est un procédé tout-à-fait mécanique, que l'on ne saurait justifier par des considérations *à priori*. Mais c'est là une remarque que l'on peut faire aussi à l'emploi même de la méthode des moindres carrés aux problèmes qui n'appartiennent pas au domaine propre de la théorie des erreurs d'observations.

La méthode peut être généralisée au cas où les signes ne sont pas compatibles, mais nous n'y insistons pas parceque le matériel auquel nous allons appliquer la méthode est tel que les signes sont compatibles.

Voici comment on peut obtenir l'expression explicite des coëfficients b à l'aide des moments de second ordre de la distribution donnée.

Avec les notations habituelles

$$c_{ij} = [x_i\, x_j] = \sum_{\nu=1}^{n} x_i^{(\nu)}\, x_j^{(\nu)}$$

la condition pour que les m sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, x_j^{(\nu)}\right]^2 \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

soient minimum s'exprime par les $m\,(m - 1)$ équations

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, c_{kj} = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots m \\ k = 1, 2 \dots (\neq i) \dots m \end{array}$$

Mais il est facile à voir que l'on satisfait à ces équations en faisant les b_{ij} proportionnels aux mineurs $\triangle_{ij}$ du déterminant

$$\triangle = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

En effet faisant $b_{ij} = \alpha_i \triangle_{ij}$ les α_i étant quelconques, le premier membre des équations (5) sera

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{m} c_{kj} \triangle_{ij} \qquad (k \neq i)$$

expression qui est zéro d'après un théoréme bien connu [1].

On peut donc écrire les m équations de regression

$$\sum_{j=1}^{m} \triangle_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

ou bien sous la forme abrégée

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{A}^{-1}$ désignant le tenseur réciproque du tenseur $\mathbf{A}$ dont les composantes sont les éléments de $\triangle$, et $\mathbf{x}$ désignant le vecteur à composantes $x_1\, x_2 \dots x_m$.

Dans le cas des signes compatibles, l'équation unique de la regression moyenne sera

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{hj} \sqrt[m]{\left|\triangle_{1j}\, \triangle_{2j} \cdots \triangle_{mj}\right|}\; x_j = 0$$

ε_{hj} étant le signe $\dfrac{\triangle_{hj}}{|\triangle_{hj}|}$ de $\triangle_{hj}$ (h quelconque).

* * *

Appliquant la méthode de la regression unique aux trois isoquantes qui ont fait le point de départ de l'étude, nous avons trouvé des résultats qui sont bien concordants. Ayant ainsi constaté le succés de la méthode dans le matériel partiel relatif aux isoquantes $x = 1250$, $x = 1500$ et $x = 1750$, nous l'avons appliqué à l'ensemble du matériel.

Nous avons supposé comme tout à l'heure que l'utilité marginale de la monnaie peut être exprimée à l'aide de la formule d'inter-

---

[1] Voir par example KOWALEWSKY: *Determinantentheorie*, p. 41.

polation $g(\rho) = \dfrac{c}{\log \rho - \log a}$.

Pour l'utilité marginale du sucre nous avons adopté la formule $f(x) = \dfrac{b}{x + d}$, b et d étant des constantes. Introduisant ces fonctions dans l'équation de la surface de consommation nous avons

$$x + \frac{b \log a}{c} w - \frac{b}{c} w \log \rho + d = 0$$

c'est-à-dire

$$x + Aw + B(w \log \rho) + C = 0$$

A, B et C étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. Les moyennes des trois variables x, w et $(w \log \rho)$ sont d'après le tableau 1 respectivement

$$x_0 = 1660 \qquad w_0 = 1066 \qquad (w \log \rho)_0 = 2578$$

Prenons les moyennes comme origine, et soit

$$x_1 = x - x_0 \qquad x_2 = w - w_0 \qquad x_3 = (w \log \rho) - (w \log \rho)_0$$

Nous avons à déterminer les trois regressions linéaires

$$\sum_{j=1}^{3} b_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Calculant les moments de second ordre de la distribution observée nous trouvons avec la notation de tout à l'heure

$$\begin{aligned} c_{11} &= 7\,458\,890 & c_{12} &= -786\,768 \\ c_{22} &= 728\,596 & c_{13} &= -1\,366\,711 \\ c_{33} &= 3\,458\,200 & c_{23} &= 1\,580\,193 \end{aligned}$$

Le calcul montre que les signes des coëfficients b_{ij} sont compatibles. Nous pouvons donc procéder au calcul de la regression unique

$$B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 = 0$$

à l'aide de la formule (6). Le résultat de ce calcul est

$$x_1 + 35.75\, x_2 - 16.02\, x_3 = 0.$$

Revenant enfin aux variables x, w et $\log \rho$ nous aurons

$$w = \frac{\dfrac{x + 1550}{16.02}}{\log \rho - 2.232} \tag{7}$$

C'est l'équation de la surface de consommation. Pour $x =$ constante $= \bar{x}$ elle se réduit à l'équation de l'isoquante correspondant à $x = \bar{x}$.

Pour contrôler le résultat obtenu nous avons calculé pour chaque mois du tableau 1 la valeur de x (la consommation du sucre) que donne la formule (7). La comparaison entre les valeurs théoriques de x et les valeurs observées a revélé une propriété intéressante de la serie des x. Nous avons trouvé une fluctuation périodique annuelle très prononcée dans les chiffres qui donnent la déviation de la valeur observée de x par rapport à la valeur théorique, la consommation étant relativement petite dans la première moitié de l'année et très grande aux mois de juin-septembre.

La question se pose alors si l'on doit éliminer ces fluctuations

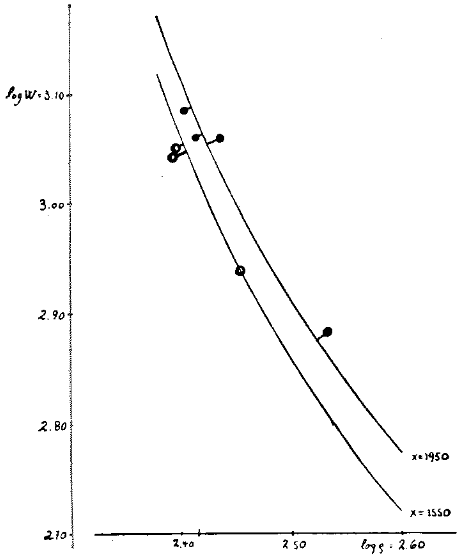

Fig. 2

comme nous l'avons fait pour les fluctuations périodiques du chiffre d'affaires. Il est à remarquer qu'une fluctuation périodique dans la quantité consommée d'un article peut être dû à deux causes différentes. Ou bien c'est l'approvisionnement qui varie avec la saison (les légumes en été, etc.), ou bien c'est le besoin, c'est-à-dire le champ de choix même qui varie (les boissons en été, le combustible en hiver, etc.). Les fluctuations de première espèce ne doivent pas être éliminées si les données statistiques sont utilisées pour étudier la variation des utilités marginales. Au contraire c'est justement la réaction du prix par suite de ces fluctuations qu'il faut suivre. D'un autre côté, les fluctuations de seconde espèce doivent assurément être éliminées puisqu'elles correspondent à des fluctuations dans une donnée que l'on a supposé constante: la constitution du champ de choix. Dans le cas actuel on ne peut pas douter que les fluctuations observées sont de seconde espèce. Déjà le fait qu'elles persistent après qu'on a eu égard à la variabilité du prix les désignent comme étant de seconde espèce.

Pour étudier la manière dont se groupent les valeurs observées autour des isoquantes données par la formule (7) il est donc nécessaire d'éliminer les fluctuations périodiques de x. Pour l'allure générale des isoquantes données par la formule, ces fluctuations sont probablement sans grande importance.

Les fluctuations périodiques dans la quantité du sucre consommé étant éliminées par la même méthode que celle employée pour le chiffre d'affaires, nous avons déterminé par la méthode de l'interpolation temporelle les points d'observation correspondant aux isoquantes $x = 1550$, $x = 1750$ et $x = 1950$. Nous avons trouvé que les points observés se groupent nettement autour des isoquantes en question. La figure 2 en donne une idée. Il nous semble que la concordance des résultats obtenus par des méthodes aussi différentes fournit un contrôle non sans importance. Pour ne pas surcharger la figure, nous avons tracé seulement les isoquantes $x = 1550$ et $x = 1950$ avec les points observés qui s'y rapportent. La figure porte l'échelle logarithmique sur les deux axes de façon que le coëfficient angulaire de la tangente est égal à la proportion de croissance.

Dans le tableau 2 nous avons donné la variation de l'utilité marginale de la monnaie exprimé en pour cent ainsi que la proportion de décroissance comme fonction du revenu r. Le pourcentage du revenu se rapporte au revenu moyen pour la période en question. Les valeurs de r qui tombent hors de l'intervalle où sont situées les valeurs effectivement observées sont mises entre parenthèses.

Il va de soi que la formule (7) fournit aussi des renseignements relatifs à l'utilité marginale du bien particulier (le sucre) que nous avons pris comme terme de comparaison. Mais nous n'y insistons pas.

Tableau 2. - Variation de l'utilité marginale de la monnaie avec les variations du revenu, le niveau des prix étant supposé constant.

Revenu	Utilité marginale de la monnaie	Proportion de décroissance de l'utilité marginale
(75%)	(284,0%)	(6,40)
(80%)	(201,0%)	(4,52)
85%	158,0%	3,55
90%	131,0%	2,96
95%	113,0%	2,55
100%	100,0%	2,25
105%	90,4%	2,03
110%	82,3%	1,85
115%	76,1%	1,71
120%	70,8%	1,59
125%	66,6%	1,50
130%	62,7%	1,41
135%	59,7%	1,34
140%	56,8%	1,28
(145%)	(54,3%)	(1,22)
(150%)	(52,3%)	(1,18)

* * *

Avant de terminer nous indiquerons quelques points auxquels nous croyons qu'il devrait être intéressant de s'attacher si on voulait approfondir encore l'étude.

D'abord il serait intéressant de chercher une correction pour la différence qui a été observée entre le prix du sucre noté par l'Union des Coopérateurs et le prix moyen de vente au détail relevé par la Statistique Générale de la France. Il est vrai que le plus souvent la différence en question est minime. Mais il y a toutefois quelques mois où il s'élève jusqu'à 5% ou même plus. Une telle différence a certainement pour effet de produire une déviation irrégulière dans la quantité x que nous considérons.

En second lieu il sera intéressant de chercher une correction pour l'évolution qui a peut-être eu lieu dans le rapport entre le revenu total du sociétaire typique et la partie du revenu employé aux achats dans la société coopérative. Dans le cas où ce rapport n'a pas été sensiblement constant, l'indice pour la variation de ρ que nous avons adopté, doit subir une correction. Pourtant nous ne croyons pas que la correction à faire soit grande pour la période relativement courte que nous avons considérée. Il est à remarquer que l'étude du rapport en question doit être combinée avec une étude sur la variation du rapport entre le chiffre des ventes au public et le chiffre des ventes aux sociétaires.

En troisième lieu il sera très intéressant d'introduire d'autres biens dans l'analyse. Si l'on arrive au même résultat relativement à la variation de l'utilité marginale de la monnaie en prenant par exemple le vin comme terme de comparaison au lieu du sucre, ce sera évidemment un contrôle des plus sûrs. L'introduction d'un bien tel que la viande conduira certainement à de très grandes complications. D'abord il faudrait distinguer plusieurs qualités, et ensuite il sera nécessaire de laisser tomber l'hypothèse de l'indépendance des biens, l'utilité marginale de la viande étant certainement influencée sensiblement par exemple par la quantité de poissons consommés.

Il faut espérer que les études sur les courbes d'utilité ainsi que les études sur les lois de la production se multiplieront. Nous croyons que la théorie de l'économie politique est arrivée à un point de son développement où l'appel aux données numériques de l'expérience est devenu plus nécessaire que jamais, en même temps que ses analyses ont atteint un degré de complexité qui demande l'application d'une méthode scientifique plus raffinée que celle employée par les économistes classiques.