SÆRTRYK AF

Festskrift til Frederik Zeuthen

KØBENHAVN 1958

Aggregeringsproblemet fra produksjonsteoretisk synspunkt[1]

Av RAGNAR FRISCH

1. Problemstilling

La det være gitt to produksjonssektorer nr. 1 og nr. 2, som hver for seg produserer et produkt under anvendelse av en enkelt faktor. La produktfunksjonene være henholdsvis

$$(1.1) \qquad y_1 = f_1(x_1) \qquad y_2 = f_2(x_2)$$

der y_1 og y_2 er de to produktmengder og x_1 og x_2 de to faktormengder. Vi forutsetter at vi beveger oss innenfor et område der begge funksjonene f_1 og f_2 forløper monotont og følgelig er entydig omvendbare. D.v.s. de inverse funksjoner

$$(1.2) \qquad x_1 = \overset{-1}{f_1}(y_1) \qquad x_2 = \overset{-1}{f_2}(y_2)$$

eksisterer som entydige funksjoner. Foreløpig gjør vi ingen forutsetninger om at de to produkter er homogene og heller ingen forutsetninger om at de to faktorer er homogene. En side ved aggregeringsproblemet består nettopp deri at vi ikke har noe a priori akseptabelt prinsipp for å »slå sammen« produktmengdene eller »slå sammen« faktormengdene. I andre tilfelle derimod er det a priori plausibelt å anta visse slags aggregeringsfunksjoner.

Aggregeringsproblemet for de to sektorer som har de to gitte produktfunksjoner (1.1), formulerer vi helt generelt på følgende måte: Eksisterer det to funksjoner av to variable

$$(1.3) \qquad x = g(x_1, x_2) \qquad y = h(y_1, y_2)$$

[1] Opprinnlig skrevet som memorandum fra Socialøkonomisk Institutt i Oslo, juni 1951.

og en funksjon av en variabel

$$y = f(x) \tag{1.4}$$

slik at x kan oppfattes som den »totale« innsats av en viss faktor i de to sektorer tilsammen, og y kan oppfattes som det »totale« produkt i de to sektorer tilsammen, og følgelig $f(x)$ kan oppfattes som produktfunksjon for oversektoren? Hvis slike funksjoner med plausible egenskaper eksisterer, vil vi kalle g aggregeringsfunksjonen for faktoren og h aggregeringsfunksjonen for produktet.

Av denne formulering av problemet følger at det i alle tilfelle må ligge det *bånd* på de tre søkte funksjoner f, g, h at de tilfredsstiller funksjonallikningen

$$h(f_1(x_1), f_2(x_2)) = f(g(x_1, x_2)) \tag{1.5}$$

for alle tillatte verdier av x_1 og x_2.

Denne likningen kan også skrives i formen

$$g(x_1, x_2) = \overset{-1}{f}[h(f_1(x_1), f_2(x_2))] \tag{1.6}$$

for alle tillatte verdier av x_1 og x_2

der $\overset{-1}{f}$ er den inverse funksjon av f.

Vi kan også, om vi vil, skrive

$$h(y_1, y_2) = f[g(\overset{-1}{f_1}(y_1), \overset{-1}{f_2}(y_2))] \tag{1.7}$$

for alle tillatte verdier av y_1 og y_2.

Generaliseringen til n sektorer er åpenbar. La faktormengdene og produktmengdene i disse sektorer være henholdsvis x_i, y_i ($i = 1, 2, \cdots, n$), og la de gitte produktfunksjoner i disse sektorer være

$$y_i = f_i(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.8}$$

Aggregeringsproblemet kan da formuleres slik: Vi ønsker to funksjoner, hver af n variable

$$x = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{og} \quad y = h(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{1.9}$$

og en funksjon av en variabel

$$y = f(x) \tag{1.10}$$

slik at følgende funksjonallikning blir oppfylt

$$(1.11)\quad h(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)) = f(g(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
for alle tillatte verdier av $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Denne likningen kan også skrives i formen

$$(1.12)\quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overset{-1}{f}\,[h(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))]$$
for alle tillatte verdier av $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

der $\overset{-1}{f}$ er den inverse funksjon av f.

Vi kan også, om vi vil, skrive funksjonallikningen i formen

$$(1.13)\quad h(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f[g(\overset{-1}{f_1}(y_1), \overset{-1}{f_2}(y_2), \ldots, \overset{-1}{f_n}(y_n))]$$
for alle tillatte verdier av $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Funksjonene g og h er aggregeringsfunksjonene for henholdsvis faktorer og produkter. Funksjonen f er produktfunksjonen for den oversektor som fremkommer ved å slå sammen undersektorene $1, 2, \cdots, n$.

Aggregeringsproblemet er behandlet bl.a. av Griffith Evans (1934), Francis Dresch (1938), Lawrence Klein (1946), Kenneth May (1946), Shou Shan Pu (1946). Litteraturhenvisninger finnes i tre artikler i Econometrica, Oct. 1946. Det problemopplegget jeg har valgt ovenfor, atskiller seg i visse henseender fra det som disse forfattere har brukt. For det første har jeg både i problemopplegget og i resonnementet i de følgende avsnitt forsøkt å innføre spesifikasjoner om arten av aggregeringsfunksjonen først *etterat* alle de vesentlige konklusjoner av prinsipiell natur er trukket. Jeg synes at en på den måten får en greiere oversikt over problemet. Formelapparatet blir ikke mindre håndterlig, men tvertimod mer håndterlig på den måten. For det annet har jeg i mindre utstrekning enn de nevnte forfattere lagt vekt på de spesielle problemer som oppstår når tilpasningsformen innenfor hver undersektor er en ren profittmaksimering av den type som en vanligvis finner i et relativt fritt marked. Optimaliseringsbetraktningen har jeg forsøkt *å knytte til selve strukturen av aggregeringsfunksjonen.*

Spørsmålet om hva som skal være en »optimal« tilpasning må, synes jeg, knyttes nær til spørsmålet om hvorledes vi skal definere den »samlete produktmengde« og den »samldee faktormengde«. Ved å gripe an problemet på den måten får en også svært greitt frem de to sidene ved optimaliseringsproblemet: på den ene side *partisjoneringsproblemet*, d.v.s. spørsmålet om hvorledes produksjonen skal fordele over de forskjellige undersektorer, og på den annen side *allokeringsproblemet*, d.v.s. spørsmålet om hvorledes den »samlete« disponible mengde av faktoren skal fordeles. Så lenge en bare holder seg til et-produkt- en-faktor-analysen, er det visstnok ikke så stor forskjell på partisjoneringsproblemet og allokeringsproblemet, men ved fler-produkt- eller fler-faktor-analysen blir det tydelig forskjell mellom disse problemer.

2. *Frihetsgradene i problemet*

Jo færre restriksjoner det ligger på faktorvariasjonen, d.v.s. på variasjonen i $(x_1 \cdots x_n)$-rommet, desto *mer krevende* blir den betingelse som er uttrykt i funksjonallikningen (1.11), eller, om vi vil, i de alternative former (1.12) eller (1.13).

Selv om faktorvariasjonen er så fri at punktet $(x_1 \cdots x_n)$ kan ligge hvor som helst innenfor et sammenhengende område i et $(x_1 \cdots x_n)$-faktordiagram, vil det alltid på uendelig mange måter være mulig å tilfredsstille det krav som er uttrykt i funksjonallikningen (1.11) eller dens alternative form (1.12) eller (1.13). Hvis bare funksjonallikningskravet skal være oppfylt, er det så mange frihetsgrader i valget av aggregeringsfunksjonene og produktfunksjonene at vi f. eks. kan gå frem på den måten at vi både velger formen på den ene aggregeringsfunksjonen og formen på produktfunksjonen for oversektoren *helt vilkårlig*. Hvis vi f. eks. velger formen på produktaggregeringsfunksjonen h (en funksjon av n variable) helt vilkårlig, og dessuten velger formen på oversektorproduktfunksjonen f (en funksjon av en variabel) helt vilkårlig, på det nær at den skal være entydig omvendbar, og hvis formen på produktfunksjonen i hver undersektor er gitt, så står det på høyre side i (1.12) det eksplisitte uttrykk for en viss funksjon av de variable $x_1 \cdots x_n$. Setter vi da faktoraggregeringsfunksjonen (en funksjon av n variable) identisk lik dette uttrykk, vil funksjonallikningen bli oppfylt. Mer presist: Det å sette faktoraggregeringsfunksjonen lik dette uttrykk, er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at funksjonallikningen skal bli oppfylt. M.a.o.: Hvis vi *velger* formen på produktaggregeringsfunksjonen h og formen på oversektorproduktfunksjonen f, så kan vi ikke bare si at det er *mulig* å tilfredsstille funksjonallikningen, men vi kan ennogså angi det eksplisitte uttrykk for den form som det er nødvendig og tilstrekkelig at faktoraggregeringsfunksjonen g må ha for at funksjonallikningen skal bli oppfylt.

Vi kunne, om vi ville, i stedet begynne med å velge formen på faktoraggregeringsfunksjonen g og formen på oversektorprodukfunksjonen f. Da ville uttrykket til høyre i (1.13) være det eksplisitte uttrykk for en vis funksjon av n variable $y_1 \cdots y_n$, og en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at funksjonallikningen skal være oppfylt, ville være at produktaggregeringsfunksjonen h settes lik denne funksjon av n variable.

Det er selvsagt også mange andre måter funksjonallikningskravet kan bli oppfylt på. Poenget er at vi har til disposisjon så mange frihetsgrader som svarer til at vi kan velge vilkårlig en funksjon av n variable og en funksjon av en variabel, d.v.s. det er $(n + 1)$ funksjonelle frihetsgrader. Hvis den tillatte variasjon i $(x_1 \cdots x_n)$ har mindre dimensjonalitet, vil vi få enda flere frihetsgrader i valget av våre funksjoner.

Når vi skal overføre drøftningen fra det rent prinsipielle plan til det økonomiske, blir det spørsmål om *hvorledes* disse frihetsgrader skal disponeres for å gi mest mulig *økonomisk relevans* i konstruksjonen av aggregeringsfunksjonene.

Det mest fruktbare synes da å måtte være å svinge problemet derhen at vi forbeholder oss å velge såvel faktoraggregeringsfunksjonen g som produktaggregeringsfunksjonen h vilkårlig, eller riktigere uttrykt: etter kriterier som avhenger også av betraktninger *utenom* de produksjonstekniske forhold vi nå drøfter (og som er fastlagt bl.a. ved formen på funksjonene $f_1 \cdots f_n$). Til gjengjeld må vi da *innskrenke* variasjonsfriheten for punktet $(x_1 \cdots x_n)$ i faktordiagrammet.

Sett at vi innskrenker variasjonsfriheten i $(x_1 \cdots x_n)$ til en 1-dimensjonal variasjon. Istedenfor å forlange at funksjonallikningen skal være oppfylt for en n-dimensjonal variasjon, forlanger vi altså nå bare at den skal være oppfylt for en 1-dimensjonal variasjon. Det er det samme som å si at vi nå tilfører $(n - 1)$ nye funksjonelle frihetsgrader. Da vi før hadde $(n + 1)$ funksjonelle frihetsgrader, får vi nå $(n + 1) + (n - 1) = 2n$. Disponerer vi disse frihetsgrader på den måten at såvel faktoraggregeringsfunksjonen som produktaggregeringsfunksjonen velges etter kriterier utenfra, blir det altså ikke lenger noen frihetsgrader tilbake. Eller anderledes uttrykt: Produktfunksjonen for oversektoren blir helt bestemt.

En svært naturlig måte hvorpå vi kan innskrenke variasjonsfriheten i $(x_1 \cdots x_n)$-diagrammet til 1-dimensjonal, er at vi stiller opp et eller annet prinsipp som fører til en *gitt* partisjonering, d.v.s. fører til at produksjonen blir fordelt over de forskjellige undersektorer på en *gitt* måte. Prinsipielt kan denne gitte partisjonering tenkes fremkommet på mange måter, f. eks. ved at vi ser hen til den historiske utvikling eller søker å anslå den mest sannsynlige fremtidige utvikling (under gitte forutsetninger), eventuelt trekker inn sannsynlighetsfordelingen for partisjoneringen.

Når det gjelder produksjonsøkonomien, er det imidlertid en spesiell måte å redusere dimensjonaliteten av faktorvariasjonen på som er særlig nærliggende, nemlig å føre inn et *optimaliserings*prinsipp bygget på kravet om at vi skal *få mest mulig* igjen for den samlede faktoranvendelse, idet den samlede faktorinnsats er definert gennem faktoraggregeringsfunksjonen og det samlete produkt gjennom produktaggregeringsfunksjonen. Noen sektorer kan jo på grunn av særegne forhold arbeide mer økonomisk enn andre, og det vil da være fornuftig å drive disse sektorer *hårdere* enn de andre sektorer, d.v.s. presse dem så hårdt at de får en lavere produksjonselastisitet, d.v.s. kommer lenger ut i det etteroptimale område. Dette er et resonnement helt analogt med det klassiske resonnement om intensivering av dyrkningen på de beste jordstykker. Hele denne optimalitetsbetraktningen *må uttrykkes i de aggregeringsfunksjoner som er forutsatt.* Spørsmålet om »hvor mye« som oppnås ved en bestemt partisjonering av den samlete produksjon, avhenger jo av hvorledes produktaggregeringsfunksjonen er valgt, og spørsmålet om »hvor mye« som settes inn alt ialt, avhenger av hvorledes faktoraggregeringsfunksjonen er valgt. Men bortsett fra denne komplikasjon vil den optimaliseringsbetraktningen vi nå har for øye, kunne gjennomføres etter velkjente linjer. En vil på den måten føres til en *partisjoneringskurve*, d.v.s. en en-dimensjonal kurve i faktordiagrammet $(x_1 \cdots x_n)$ analogt substitumalen i den vanlige produksjonsteori. Når dette er gjort, vil oversektorproduktfunksjonen under en variasjon langt partisjonskurven være helt fastlagt. Det stemmer med resonnementet foran om at det i dette tilfelle ikke er noen frihetsgrader tilbake.

3. Problemstillingen når partisjonskurven er gitt

La det være gitt en 1-dimensjonal partisjonskurve i faktordiagrammet $(x_1 \cdots x_n)$. Denne kurve kan defineres på den måten at alle de enkelte faktormengder $x_1 \cdots x_n$ er gitt som funksjoner av en enkelt parameter. Som en slik parameter kan vi f. eks. velge den totale faktormengde x, slik den blir bestemt ved den valgte faktoraggregeringsfunksjon. Når faktoraggregeringsfunksjonen er valgt, vil det jo til ethvert punkt i faktordiagrammet $(x_1 \cdots x_n)$ svare en bestemt størrelse på den samlede faktormengde x. Uansett hvilken form partisjonskurven gjennom faktordiagrammet har, vil det altså til ethvert punkt på kurven svare en bestemt verdi på x. Vi går ut fra at partisjonskurven har en slik form at de n koordinater $x_1 \cdots x_n$ blir entydige funksjoner av den ene parameter x. Vi betegner disse funksjoner

$$(3.1) \qquad x_1 = x_1(x) \ldots\ldots x_n = x_n(x).$$

Funksjonene (3.1) kaller vi partisjonsfunksjonene. Analogien med den måten hvorpå faktormengdene uttrykkes som entydige funksjoner av produktmengden langs substitumalen i den vanlige produksjonsteori, er åpenbar.

De relative tilvekstgrader

$$(3.2) \quad \overset{v}{x}_i = \frac{d \log x_i}{d \log x} = \frac{dx_i}{dx} \cdot \frac{x}{x_i} \quad \text{langs partisjonskurven } (i = 1,2,\ldots,n)$$

kaller vi de *partisjonale faktorkoeffisienter.*

Vi ser også på de *partielle faktoraggregeringskoeffisienter*

$$(3.3) \quad \overset{v}{g}_i = \frac{\partial \log g(x_1 \cdots x_n)}{\partial \log x_i} = \frac{\partial g(x_1 \cdots x_n)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{g(x_1 \cdots x_n)} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

og på de *partielle produktaggreringskoeffisienter*

$$(3.4) \quad \overset{v}{h}_i = \frac{\partial \log h(y_1 \cdots y_n)}{\partial \log y_i} = \frac{\partial h(y_1 \cdots y_n)}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{h(y_1 \cdots y_n)} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Hvis såvel faktoraggregeringen som produktaggregeringen er lineær, d.v.s. hvis vi har

$$(3.5) \qquad g(x_1 \cdots x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

$$b(y_1 \cdots y_n) = b_0 + b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n \tag{3.6}$$

der a-ene og b-ene er konstanter, blir faktoraggregeringskoeffisientene og produktaggregeringskoeffisientene henholdsvis

$$\overset{v}{g}_i = \frac{a_i x_i}{a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n} \qquad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{3.7}$$

$$\overset{v}{h}_i = \frac{b_i y_i}{b_0 + b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n} \qquad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{3.8}$$

D.v.s. ved lineær aggregering er faktoraggregeringskoeffisientene og produktaggregeringskoeffisientene simpelthen de *brøkdeler* som vedkommende undersektorer representerer av totalen, regnet henholdsvis etter faktorinnsatsen eller etter produktmengden.

Langs partisjoneringskurven vil oversektorproduktfunksjonen $f(x)$ være entydig bestemt ved det eksplisitte uttrykk

$$f(x) = h[f_1(x_1(x)), f_2(x_2(x)) \cdots f_n(x_n(x))] \tag{3.9}$$

som uten videre følger av (1.11). På høyre side i (3.9) betyr h den valgte produktaggregeringsfunksjon (en funksjon av n variable), $f_1 \cdots f_n$ de gitte undersektorproduktfunksjoner (hver av dem en funksjon av en variabel) og $x_1(x) \cdots x_n(x)$ de partisjonsfunksjoner som beskriver formen på partisjonskurven. Når disse funksjonsformer er kjent, blir høyre side av (3.9) et eksplisitt uttrykk for en funksjon av den ene variable x. Oversektorproduksjonskoeffisienten (oversektorpassuskoeffisienten)

$$\epsilon = \epsilon(x) = \frac{d \log f(x)}{d \log x} \quad \text{langs partisjonskurven} \tag{3.10}$$

blir iflg. (3.9)

$$\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \overset{v}{h}_i \overset{v}{x}_i \cdot \epsilon_i \quad \text{langs partisjonskurven} \tag{3.11}$$

der

$$\epsilon_i = \epsilon_i(x_i) = \frac{d \log f_i(x_i)}{d \log x_i} \qquad (i = 1,2, \ldots, n) \tag{3.12}$$

er undersektorproduksjonskoeffisientene (undersektorpassuskoeffisientene). Uansett hvorledes partisjonskurven er fastlagt, kan altså oversektorproduksjonskoeffisientene oppfattes som et veiet aggregat av undersektorproduksjonskoeffisientene.

De her nevnte sammenhengene blir særlig enkle i det tilfelle da partisjonskurven mellom undersektorene er bestemt ved det optimaliseringskrav at den skal gi maksimalt totalprodukt under et gitt totalfaktormengde, eller omvendt gi minimal faktormengde under et gitt totalprodukt. Begge krav fører til *samme løsning*, nemlig at faktorpunktet $(x_1 \cdots x_n)$ må ligge på den partisjonskurve som er gitt ved de $(n - 1)$ likninger

$$\frac{\overset{v}{h}_1 \epsilon_1}{\overset{v}{g}_1} = \frac{\overset{v}{h}_2 \epsilon_2}{\overset{v}{g}_2} = \cdots = \frac{\overset{v}{h}_n \epsilon_n}{\overset{v}{g}_n}. \tag{3.13}$$

Enten vi formulerer optimaliseringskravet på den ene eller den annen av de to forannevnte måter, blir nemlig optimaliseringsbetingelsen å uttrykke ved at vektoren med komponenterne $(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n})$ og vektoren med komponenter $(\frac{\partial h}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \frac{\partial h}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial h}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n})$ skal være *ensrettede*, d.v.s. vi må ha

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial h}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.14}$$

der λ er en positiv proporsjonalitetsfaktor, uavhengig av i. Likning (3.14) er det samme som $\frac{g \cdot \overset{v}{g}_i}{x_i} = \gamma \frac{h \cdot \overset{v}{h}_i}{x_i} \epsilon_i$. Vi må altså ha $\frac{\overset{v}{h}_i \epsilon_i}{\overset{v}{g}_i} =$ uavhengig av i. Det er det samme som (3.13).

Hvis spesielt såvel faktoraggregeringen som produktaggregeringen er lineær, kan optimaliseringskravet (3.13) uttrykkes ved å si at de undersektorer som arbeider mest økonomisk, skal drives hårdest i følgende forstand: Sektorene skal drives så hårdt at produksjonskoeffisientene blir drevet ned til slike størrelser at hvis vi for hver sektor mulpliserer produksjonskoeffisienten med *forholdet* mellom den prosent sektorens produkt utgjør av det samlete produkt og den prosent sektorens faktorbruk utgjør av det samlete faktorbruk, så får vi frem det *samme* tall for alle sektorer. Kortere uttrykt: Faktorens veiede grenseproduktivitet skal være den samme overalt [2].

[2] Ved lineær aggregering blir den nevnte partisjonsbetingelse, nemlig $\frac{d(b_i f_i(x_i))}{d(a_i x_i)} \cdot \frac{x}{y}$ er like, uavhengig av i.

Den felles størrelse på uttrykkene (3.13) *er det samme som oversektorproduksjonselastisiteten* ϵ. Når (3.13) er oppfylt, gir nemlig (3.11)

$$\epsilon(x) = \tau \sum_{i=1}^{n} \overset{v}{g}_i \overset{v}{x}_i \tag{3.15}$$

der τ er den felles størrelse på uttrykkene (3.13). Summen til høyre i (3.15) er imidlertid under en-dimensjonal variasjon det samme som $\dfrac{d \log g}{d \log x} = 1$,d.v.s. vi har $\tau = \epsilon$. Denne omstendighet kan vi uttrykke eksplisitt ved å skrive optimaliseringslikningene i formen

$$\frac{\overset{v}{h}_1 \cdot \epsilon_1(x_1)}{\overset{v}{g}_1} = \frac{\overset{v}{h}_2 \cdot \epsilon_2(x_2)}{\overset{v}{g}_2} = \cdots = \frac{\overset{v}{h}_n \cdot \epsilon_n(x_n)}{\overset{v}{g}_n} = \epsilon(g(x_1 \cdots x_n)). \tag{3.16}$$

Dette er det samme som

$$\frac{\overset{v}{h}_i \cdot \epsilon_i(x_i)}{\overset{v}{g}_i} = \epsilon(x) \quad \text{der } x = g(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{3.17}$$

Multipliserer vi (3.17) med en vilkårlig vektfunksjon $w_i(x_1 \cdots x_n)$, og summerer vi over i, får vi

$$\epsilon(g(x_1 \cdots x_n)) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_1 \cdots x_n) \dfrac{\overset{v}{h}_i \cdot \epsilon_i(x_i)}{\overset{v}{g}_i}}{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_1 \cdots x_n)} \quad \text{(ved optimal partisjonering).} \tag{3.18}$$

Faktoraggregeringskoeffisientene $\overset{v}{g}_i$ og produktaggregeringskoeffisientene $\overset{v}{h}_i$ på høyre side i (3.18) er funksjoner av henholdsvis $x_1 \cdots x_n$ og $f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$.

Setter vi spesielt $w_i(x_1 \cdots x_n) = \overset{v}{g}_i$, får vi

$$\epsilon(g(x_1 \cdots x_n)) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overset{v}{h}_i \cdot \epsilon_i(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \overset{v}{g}_i} \quad \text{(ved optimal partisjonering).} \tag{3.19}$$

Oversektorens produksjonselastisitet kan altså ikke oppfattes uten videre som et veiet aritmetisk gjennomsnitt av undersektorenes produksjonselastisiteter. Sammenslagning av undersektorenes produksjonselastisiteter skal skje under anvendelse av *produkt*aggregeringskoeffisientene som vekter og resultatet skal divideres med summen av *faktor*aggregeringskoeffisientene. Ved lineæraggregering uten konstantledd (altså med $a_0 = b_0 = 0$ i (3.5—6)) blir dog (3.19) et ekte gjennomsnitt. I det tilfelle blir nemlig

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{v}{g}_i = \sum_{i=1}^{n} \overset{v}{h}_i = 1 \tag{3.20}$$

slik at vi da simpelthen får

$$\epsilon\,(g\,(x_1 \cdots x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \overset{v}{h}_i \cdot \epsilon_i(x_i) \quad \text{(ved optimal partisjonering og lineær og homogen aggregering).} \tag{3.21}$$

Ved optimal partisjonering og lineær og homogen aggregering er altså produksjonselastisiteten for oversektoren simpelthen det veiete gjennomsnitt av undersktorenes produksjonselastisiteter, idet de brøkdeler som produkt*mengdene* (ikke faktormengdene) i de enkelte undersektorene utgjør av totalen, brukes som vekter.

4. *Statistisk bestemmelse av produksjonskoeffisienten for oversektoren når partisjonen forudsettes å være bestemt ved optimalisering*

Den omstendighet at den felles størrelse på uttrykkene (3.13) er det samme som oversektorens produksjonselastisitet, anviser en naturlig måte til statistisk bestemmelse av oversektorens produksjonselastisitet. I prinsippet vil kjennskapet til produksjonselastisiteten ϵ_i i en enkelt undersektor, sammen med kjennskapet til faktoraggregeringskoeffisienten $\overset{v}{g}_i$ og produktaggregeringskoeffisienten $\overset{v}{h}_i$ i denne undersektor (som ved lineæraggregering er det samme som de brøkdeler denne sektor utgjør av totalen, henholdsvis regnet etter faktorinnsats og etter produktmengde) være nok til å kunne beregne produksjonselastisiteten for oversektoren. Hvis faktoraggregeringskoeffisienten og produktaggregeringskoeffisienten i denne sektor er like, vil produksjonselastisiteten for den angjeldende undersektor uten videre være lik produksjonselastisiteten for oversektoren.

I praksis vil en selvsagt ikke kunne nøye seg med en enkelt slik iakttakelse. En må forsøke å få så mange iakttakelser som mulig, dels iakttakelser fra mange undersektorer, dels flere iakttakelser av produksjonselastisiteten for samme undersektor. Foreligger det opplysning om et faktorpunkt $x_1 \cdots x_n$ der alle de enkelte produksjonselastisiteter $\epsilon_i(x_i)$ og aggregeringskoeffisientene $\overset{v}{g}_i$ og $\overset{v}{h}_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n,)$ er kjent, vil et gjennomsnitt av typen (3.18) eller mer spesielt av typen (3.19) eller (3.21) gi en verdi av ϵ for oversektoren.

For tilnærmelsesvis å bestemme produksjonselastisiteten i en undersektor må vi i det generelle tilfelle ha *to sett samhørende observasjoner* over faktorinnsats og produktmengde, altså et observasjonsset (x_{i1}, y_{i1}) et annet (x_{i2}, y_{i2}) slik at vi som en tilnærmelse kan sette

$$(4.1) \qquad \epsilon_i = \frac{\log y_{i1} - \log y_{i2}}{\log x_{i1} - \log x_{i2}}.$$

Den verdi av produksjonselastisiteten som derved fremkommer, kan som en tilnærmelse regnes å høre til argumentpunktet $\bar{x}_i$ bestemt ved

$$(4.2) \qquad \log \bar{x}_i = \frac{\log x_{i1} + \log x_{i2}}{2}, \text{ d.v.s. } \bar{x}_i = \sqrt{x_{i1}\, x_{i2}}.$$

Vi kan trekke (4.1—2) sammen til den ene tilnærmelsesformel

$$(4.3) \qquad \epsilon_i(\sqrt{x_{i1}\, x_{i2}}) = \frac{\log y_{i1} - \log y_{i2}}{\log x_{i1} - \log x_{i2}}.$$

Foreligger det opplysning om flere faktormengder $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots$ med tilhørende produktmengder $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} \cdots$ for sektor nr. i, vil vi i grove trekk kunne bestemme formen på ϵ-kurven for denne sektor.

Det å få gjort en *selvstendig* bestemmelse — selv om det er i aller groveste trekk — av ϵ-kurven for de enkelte undersektorer, vil i de fleste tilfelle være den eneste farbare veg til bestemmelse av ϵ-kurven for oversektoren. Det gjelder særlig når vi vil ha tak i en *produksjonselastisitet for oversektoren som har en strukturell mening slik at den kan brukes i reperkusjonsanalysen, altså en koeffisient som ikke bare har en tilfeldig tidssamvariasjonskarakter.*

Opplysningene om ϵ-kurven for undersektorene kan søkes dels ved intervjuing av branshefolk, dels ved spesielle tekniske produksjonsdata for de enkelte undersektorer. Det vil ikke være nødvendig å få slike opplysninger for *alle* undersektorer. Det er tilstrekkelig å få dem *fra noen få representative undersektorer.* Jo sterkere grunn det er til å tro at partisjoneringen mellom undersektorene er optimal, desto færre undersektorer er det nødvendig å trekke inn i den gjennomsnittsdannelsen (3.18) eller mer spesielt (3.19) eller (3.21), som brukes til bestemmelse av ϵ for oversektoren. En står i dette tilfelle i en observasjonsmessig sett enda bedre stilling enn den en står i når en f. eks. plukker ut noen enkelte viktige varer for å la dem gå inn som representative i en vareprisindeks. I det foreliggende tilfelle er det jo nemlig slik at hvis forutsetningen om optimal partisjonering var oppfylt, ville opplysninger om en eneste undersektor-ϵ prinsipielt være nok til å bestemme ϵ for oversektoren i det markedspunkt ($x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$) som foreligger. Har en slike opplysninger for *flere* markedspunkter som alle kan forutsettes å være med optimal partisjon, vil $\epsilon(x)$-kurven for oversektoren kunne bestemmes over det variasjonsområde for den totale faktormengde som er representert i materialet.

Selv om så fullstendige opplysninger om faktiske markedspunkter ikke foreligger, vil en kunne komme frem så sant en bare har opplysning — i grove trekk — om *ϵ-kurvene* for de viktigste representative undersektorer, og en bestemmer seg til å finne *den* ϵ-kurve for oversektoren som svarer til at en eventuell økning eller minskning i den totale faktormengde i oversektoren foregår på en slik måte at partisjoneringen hele tiden holder seg optimal. Denne ϵ-kurve for oversektoren kan konstrueres ut fra ϵ-kurvene for undersektorene og de valgte aggregeringsfunksjoner g og h på følgende måte:

En begynner med å velge en verdi av oversektor-ϵ som en etter en skjønnsmessig anvendelse av (3.21) antar vil være en ordinatverdi et sted på den sentrale del av ϵ-kurven for oversektoren. Problemet er da å finne hvilken *oversektor-faktormengde som svarer til dette ϵ-punkt.* Det problemet vil være løst hvis en kan få bestemt hvilke faktormengder $x_1 \cdots x_n$ som svarer til det punkt på partisjoneringskurven der ϵ har den nå valgte verdi. Å bestemme disse faktormengder er iflg. (3.17) det samme som å løse de n likninger

$$(4.4) \qquad \frac{\overset{v}{h}_i \cdot \epsilon_i(x_i)}{\overset{v}{g}_i} = \epsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

i de n variable $x_1 \cdots x_n$. Venstre-sidene i (4.4) er kjente funksjoner av $x_1 \cdots x_n$, og høyre side er det nå gitte tall ϵ. Disse likninger vil i de fleste vanlige tilfelle raskt kunne løses grovt-approksimativt ved kjente iterasjonsmetoder. En effektiv iterasjons metode vil en antagelig få i alle praktiske tilfelle ved å skrive (4.4) i formen

$$x_i = \overset{-1}{\epsilon_i} \left(\frac{\overset{v}{g}_i (x_1 \cdots x_n)}{\underset{v}{h}_i (x_1 \cdots x_n)} \epsilon \right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.5}$$

der $\overset{-1}{\epsilon_i}$ er den inverse funksjon til ϵ_i, hvis form forutsettes kjent. ϵ på høyre side i (4.5) er den valgte størrelse av oversektorens produksjonselastisitet. Ethvert tilnærmelsessett $(x_1 \cdots x_n)$ innsatt på høyre side i (4.5) vil gi et nytt sett $(x_1 \cdots x_n)$. I de fleste tilfelle vil formodentlig iterasjonen bli praktisk talt uavhengig av tallene for de små sektorer, slik at det bare er nødvendig å regne med noen få store sektorer.

Når punktet $x_1 \cdots x_n$ således er bestemt, vil funksjonsverdien $g(x_1 \cdots x_n)$ angi den aggregerte faktormengde x som er abscissepunktet for den valgte ordinatverdi ϵ for oversektorens produksjonselastisitet. Ved å endre den valgte verdi ϵ og på nytt beregne den tilhørende aggregerte faktormengde x, vil en kunne få bestemt flere punkter på $\epsilon(x)$-kurven for oversektoren.

5. *Statistisk bestemmelse av produksjonselastisiteter ved cross-section-analyse. Homotetisk likhet mellom undersektorene*

Hvis en ved et inngående studium av de strukturelle forhold i de forskjellige undersektorer finner at det er plausibelt å forutsette en eller annen form for *likhet* mellom produktfunksjonene i disse undersèktorer, kan opplysninger om *et enkelt* produksjonspunkt i hver undersektor brukes til å utlede opplysninger om størrelsen av produksjonselastisiteter for de forskjellige undersektorer eller for oversektoren. I det tilfelle kan en snakke om en cross-section-analyse.

De forutsetningene som ligger til grunn for cross-section-analysen, kan være av forskjellig art. Vi kan f. eks. se på tilfellet med *homotetisk likhet* mellom undersektorene. Det vil si at vi for hver sektor kan angi en konstant reduksjonsfaktor for innsatsen og en konstant reduksjonsfaktor for produktmengden slik at når disse reduksjoner er foretatt, får vi en faktormengde og en produktmengde som er knyttet sammen i en produktfunksjon som er den samme for alle undersektorer. Det kan uttrykkes ved å si at det skal eksistere konstante multiplikatorer —

homotetikoeffisienter α_i og β_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ slik at hvis vi setter

$$(5.1) \qquad \zeta = \alpha_i x_i \qquad \eta = \beta_i y_i$$

så vil ζ og η være knyttet sammen ved en produktfunksjon som er uavhengig av i, dvs. slik at vi har

$$(5.2) \qquad \eta = f_0(\zeta) \qquad \text{uavhengig av } i,$$

der f_0 er en viss funksjon av en variabel.

Ved å innsette fra (1.8) ser vi at (5.1—2) er ensbetydende med

$$(5.3) \qquad \beta_1 f_1 \left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right) = \beta_2 f_2 \left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right) = \cdots = \beta_n f_n \left(\frac{\zeta}{\alpha_n}\right).$$

Hvis vi elastisiterer likningene (5.3) m.h.p. ζ, får vi

$$(5.4) \qquad \epsilon_1 \left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right) = \epsilon_2 \left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right) = \cdots = \epsilon_n \left(\frac{\zeta}{\alpha_n}\right).$$

Når vi har en slik homotetisk likhet mellom undersektorene, vil kjennskapet til en produksjonssituasjon $(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$ være nok til tilnærmelsesvis å bestemme kurven for $\epsilon(x)$ for oversektoren. Vi har altså da et tilfelle hvor betingelsene for cross-section-analyse er til stede. Vi får nemlig nå tilnærmelsesvis

$$(5.5) \qquad \epsilon_i \left(\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_i} x_i x_j}\right) = \epsilon_j \left(\sqrt{\frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i x_j}\right) = \frac{\log \beta_i f_i(x_i) - \log \beta_j f_j(x_j)}{\log \alpha_i x_i - \log \alpha_j x_j}$$

hvilket også kan skrives

$$(5.6) \qquad \epsilon_i \left(\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_i} x_i x_j}\right) = \epsilon_j \left(\sqrt{\frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i x_j}\right) = \frac{\log y_i - \log y_j + \log \frac{\beta_i}{\beta_j}}{\log x_i - \log x_j + \log \frac{\alpha_i}{\alpha_j}}.$$

Disse formler følger av (4.3) når vi setter enten

$$(5.7) \qquad x_{i1} = x_i \qquad x_{i2} = \frac{\alpha_j x_j}{\alpha_i}$$

eller

$$(5.8) \qquad x_{i1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_j \qquad x_{i2} = x_i$$

og benytter (5.3). Beregningsformlene (5.5—6) er som en ser symetriske i de to undersektornumre i og j. Videre ser vi at de ϵ-verdier, som bestemmes ved disse formler, tilfredsstiller (5.4).

Hvis det er homotetisk likhet mellom undersektorene, vil bestemmelsen av en ϵ-verdi for en sektor være ensbetydende med at vi har fått bestemt en ϵ-verdi også for hver av de andre undersektorer. Det er *samme* ϵ-verdi som på den måten bestemmes, men det faktorpunkt som denne ϵ-verdi refererer seg til, vil være *forskjellig* for de forskjellige undersektorer. Disse faktorpunkter $x_1 \cdots x_n$ vil iflg. (5.4) være bestemt ved

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \cdots = \alpha_n x_n. \tag{5.9}$$

Ved å nytte alle de forskjellige faktor- og produktmengder som det foreligger opplysning om i cross-section-materialet, vil en derfor kunne få bestemt i grove trekk *ϵ-kurven* for hver undersektor.

Hvor vellykket en slik fremgangsmåte skal være, vil helt og holdent avhenge av hvor godt forutsetningen om homotetisk likhet mellom undersektorene er oppfylt og hvilke muligheter en har til å få fastlagt homoteti-koeffisientene α_i og β_i. I de fleste tilfelle vil en formodentlig komme sikrere og raskere til målet ved å søke å bestemme ϵ-kurvene særskilt for de viktigste representative undersektorer og ut fra disse opplysninger bestemme ϵ-kurven for oversektoren ved den metoden som er angitt i (4.5).

6. *Fler-faktor og fler-produktanalyser*

De prinsippene som er angitt foran, kan generaliseres til tilfellet med flere faktorer og flere produkter, men jeg skal ikke gå inn på det her.