Möglichkeiten einer vorteilhaften Anwendung der mathematischen Programmierungsmethode in der bundesstaatlichen Wirtschaftsplanung Jugoslawiens[1]

Von Ragnar Frisch (Oslo)

Ich habe das von uns zuletzt besprochene Problem nochmals durchdacht: Die Vorgangsweise der jugoslawischen Bundesplanungskommission in Durchführung der Weisung des Bundesparlaments, den Konsum in der nächsten Fünfjahresperiode unter Berücksichtigung der zu Beginn der Periode gegebenen realen Kapital- und Arbeitskapazitäten ebenso wie der geschätzten Gesamtproduktion, die diese Faktoren hervorbringen können, so rasch als möglich anzuheben. Die Berechnungsgrundlagen werden der Bundesplanungskommission von den Unternehmungen zugeleitet. Diese Berechnungsgrundlagen ergeben sowohl den Mehrwert als auch die Proportionen. Arbeitskapazitäten werden auch für die folgenden Jahre als bekannt vorausgesetzt. Zuweisung und Planung der Bundesplanungskommission werden entsprechend den Marxschen Konzeptionen vorgenommen.

Ich glaube, nun die dem Planungsvorgang zugrunde liegenden Prinzipien klar erfaßt zu haben und möchte das gesamte Problem im präzisen mathematischen Programmierungsbegriffen neu darstellen, wobei ich mich streng an das Bezeichnungssystem von Marx $c+v+m$[2], wie Sie es mir erläutert haben, halte. Ich werde mich darauf beschränken, den Zusammenhang der Wirtschaft in nur zwei Abteilungen zu behandeln: erste Abteilung, Produktion von Produktivgütern, und zweite Abteilung, Produktion von Konsumgütern — wie von Ihnen dargestellt. Aber die Möglichkeit eines allgemeinen Zusammenhanges ist gegeben.

Die wirtschaftlichen Relationen und die »Proportionen« in jeder beliebigen Abteilung:

Betrachten wir Abteilung Nr. 1. In dieser Abteilung sind in den Bewegungen des ordentlichen Budgets eines Jahres — Monats oder Vierteljahres — vier Variable zu berücksichtigen. Der Einfachheit halber gehen wir von einem Jahr aus.

c_i = Abschreibung auf gegebene reale Kapitalgüter, die in einem gegebenen Jahr in der Produktion dieser Abteilung eingesetzt werden.

v_i = Arbeits-input, gemessen an der Subsistenzrate der in dieser Abteilung im betreffenden Jahr aufgewendeten Arbeitskraft. Der Buchstabe v bedeutet bei Marx variables Kapital.

m_i = Mehrwert — oder besser *Mehrproduktion* in dieser Abteilung im betreffenden Jahr.

x_i = Gesamtproduktion in der Abteilung, verstanden als jener *Teil des Bruttosozialproduktes,* der in dieser Abteilung entsteht.

Die wirtschaftliche Grundrelation für Bewegungen des ordentlichen Budgets in der Abteilung ist folgende

$$(1) \quad c_i + v_i + m_i = x_i \qquad (i = 1,2 \ldots)$$

Soll das Jahr bezeichnet werden, wäre jeweils t beizufügen. Vorausgesetzt wird, daß die drei Ausdrücke des linken Gliedes von (1) in einer *technisch bestimmten, bekannten Proportion* zu x_i stehen. Wir bezeichnen diese Proportionen jeweils mit γ, ν, μ — mit dem Index i, so daß sich ergibt

$$(2) \quad c_i = \gamma_i x_i \quad v_i = \nu_i x_i \quad m_i = \mu_i x_i$$

Mit diesen Definitionen müßte den drei technischen Proportionen Genüge getan sein

$$(3) \quad \gamma_i + \nu_i + \mu_i = 1$$

Terminologische Hinweise:

γ_i und ν_i beschreiben die organische Zusammensetzung des Kapitals in Abteilung i. Daraus folgt μ_i (Mehrwert als Teil des Produktes in Abteilung i) von (3).

$$\frac{\mu_i}{\gamma_i + \nu_i} = \text{Profitrate in Abteilung i}$$

$$\frac{\mu_i}{\nu_i + \mu_i} = \text{Rate der Arbeitsausnützung (Mehrwertrate) in Abteilung i.}$$

Bringt man von dem in der Abteilung i entstehenden Bruttosozialprodukt, also von x_i, die Abwertung c_i in Abzug, ergibt sich

(4) Volkseinkommen
aus Abteilung i = $v_i + m_i$

In meiner Terminologie sind die »Proportionen« γ, ν, μ *Input-Koeffizienten* jeweils für Abwertung, Arbeit (Primär-input) und Rest-input. Die Terminologie ist dabei belanglos. Worauf es vom Standpunkt der Programmierung ankommt, ist die Einführung der Variablen und der Relationen.

Die Kapazitätsgrenzen

Nehmen wir an, daß zu *Beginn* des Jahres t das gegebene reale Kapital in der Abteilung i eine bestimmte Größe darstellt, die wir durch die *maximale* Abwertung messen wollen, die zum Zweck der Input-Verwendung in dem Produktionsprozeß dieses Jahres entnommen werden kann. Ist die Bezeichnung $\bar{c}_i^t$, so ergibt sich

$$(5) \quad c_i^t \leqq \bar{c}_i^t$$

Ab hier wird die Annahme von lediglich zwei Abteilungen eingeführt.

Führen wir nun die beiden Variablen $x_{1.i}^t$ (i = 1,2) ein, die jene Teile von x_1^t (Produktion der Produktivgüter im Jahr t) bezeichnen, die im Jahr t ihren Weg in die Abteilungen i (i = 1,2) finden. Wenn wir den *Kapazitätsabgang nur eines Jahres* annehmen, wird die Kapazität zu Beginn des Jahres t + 1 betragen[3]:

$$(6) \quad \bar{c}_i^{t+1} = \bar{c}_i^t + x_{1.i}^t - c_i^t \qquad (i = 1,2)$$

Aus der Natur der Kapazität müssen wir haben

$$(7) \quad 0 \leqq \bar{c}_i^{t+1} \quad \text{für alle } t \qquad (i = 1,2)$$

Per definitionem folgt

$$(8) \quad x_1^t = x_{1 \cdot i}^t + x_{1 \cdot 2}^t \quad \text{für alle } t$$

Wenn $c_i^t < x_{1 \cdot i}^t$ ist, folgt, daß $\bar{c}_i^{t+1} > \bar{c}_i^t$ ist, das heißt Zunahme der gegebenen realen Kapazität.

Wenn $c_i^t = x_{1 \cdot i}^t$ folgt, daß $\bar{c}_i^{t+1} = \bar{c}_i^t$ ist, das bedeutet stationäres gegebenes Realkapital.

Wenn $c_i^t > x_{1 \cdot i}^t$ ist, folgt, daß $\bar{c}_i^{t+1} < \bar{c}_i^t$ ist, das heißt Abnahme des geplanten Realkapitals.

Aus Punkt (6) folgt

$$(9) \quad x_{1 \cdot i}^t = c_i^t + \left(\bar{c}_i^{t+1} - \bar{c}_i^t\right) \qquad (i = 1,2)$$

Das ist das *Zweite Marxsche Gesetz*, angewandt auf Abteilung 1. Im stationären Zustand reduziert es sich auf

$$(10) \quad x_{1 \cdot i}^t = c_i^t \qquad (i = 1,2)$$ (Zweites Gesetz im stationären Zustand).

Im Allgemeinfall bedeutet das Zweite Gesetz lediglich eine getrennt für jede Abteilung auferlegte Ungleichheit (7).

Wenn man will, kann man das Zweite Gesetz auf integrale Weise formulieren, indem man eine Summierung von i in (9) oder (7) vornimmt, was jedoch lediglich *notwendige* Bedingungen ergibt. Um *ausreichende* Bedingungen zu erhalten, muß man (7) berücksichtigen.

Weiters wollen wir einführen

$$(11) \quad \zeta_2^t = \text{dem Teil von } x_2^t$$ (Konsumgüterproduktion im Jahr t),

der nicht konsumiert wird, sondern abfällt und *verdirbt*. Könnte man diese Güter als unverderblich annehmen, so könnte mit einem entsprechend zu- oder abnehmenden Konsumgüterlager gerechnet werden. Dies würde zu Bedingungen ähnlich den im Zweiten Gesetz ausgedrückten führen. Wir werden diesen Weg nicht einschlagen, sondern nur von der Annahme verderblicher Konsumgüter ausgehen, weshalb als einzige Bedingung zu berücksichtigen ist

$$(12) \quad 0 \lesseqgtr \zeta_2^t \qquad \text{für alle } t$$

Die Verbrauchsgleichung für produzierte Konsumgüter wird daher lauten:

$$(13) \quad x_2^t = (v+m)_1^t + (v+m)_2^t + \zeta_2^t \qquad \text{für alle } t$$

Daher folgt aus (12)

$$(14) \quad O \gtreqless x_2^t - (v+m)_1^t - (v+m)_2^t \qquad \text{für alle } t$$

Gäbe es keine Vernichtung produzierter Konsumgüter, müßte bei Punkt (14) ein Gleichheitszeichen stehen. Die Gleichung (13) oder die Nicht-Gleichung (14) drücken das Dritte Marxsche Gesetz aus.

Aus (13) und (14) erhalten wir unter Einbeziehung von (1) für $i = 2$

$$(15) \quad (v+m)_1^t = c_2^t - \zeta_2^t$$

$$(16) \quad O \gtreqless c_2^t - (v+m)_1^t$$

Das ist das *Erste Marxsche Gesetz. Da es eine identische Folge des Dritten Gesetzes ist, braucht es für die Programmierung nicht berücksichtigt zu werden.*

Das Programmierungsproblem

Setzen wir $t = 1$ als erstes Jahr des Planes. Unter dieser Annahme *wissen* wir in Hinblick auf die Information

$$(17) \quad \bar{c}_1^t \qquad (i = 1, 2)$$

von dem wir annehmen können, daß es nicht negativ ist.

Ferner nehmen wir als bekannt an:

entweder die Obergrenze von $\left(v_1^t + v_2^t\right)$ für alle t. Das bedeutet, daß wir Mobilität der Arbeitskraft annehmen.

(18) *oder* getrennte Obergrenzen $\bar{v}_1^t$ für v_1^t und $\bar{v}_2^t$

für v_2^t für alle t.

Das bedeutet die Annahme des *Fehlens der Mobilität der Arbeitskraft.*

Freilich könnte man auch kompliziertere Annahmen hinsichtlich der den Faktor Arbeit betreffenden Daten treffen, die einfach in die Analyse einzuführen wären.

Das Problem der Lenkung kann nun folgendermaßen formuliert werden:

Die Grenzen der Bewegungen des ordentlichen Budgets für das erste Jahr, denen genügt werden muß, sind

(19) Anfangsgröße des gegebenen Realkapitals $c_i^1 \gtreqless \bar{c}_i^1$

$(i=1,2)$ Ziffer (5)

(20) Obergrenzen der verfügbaren Arbeitskraft —

man nehme eine der beiden Alternativen von Punkt (18)

(21) Zweites Gesetz $O \gtreqless \bar{c}_i^2$ $(i = 1,2)$

(22) Drittes Gesetz $O \gtreqless x_2^1 - (v+m)_1^1 - (v+m)_2^1$

(23) Produktion $O \gtreqless x_i^1$ $(i = 1,2)$

nicht negativ.

Führt man (23) ein und sind die Proportionen (Input-Koeffizienten) positiv, so folgt daraus, daß alle Elemente c_i, v_i, m_i keinen negativen Wert annehmen.

(24) Zusätzliche Grenzen.

Bei weiter fortgeschrittenen Programmierungstheorien[4] finden noch andere Begrenzungselemente Berücksichtigung. Diese sind in der Praxis von außerordentlicher Bedeutung und mit keinerlei Schwierigkeiten der elektronischen Datenverarbeitung verbunden.

Das Problem hat während des ersten Jahres drei Spielraumgrade, die wir etwa durch Einführung der folgenden drei Basisvariablen darstellen könnten

(25) $x_{1\cdot 1}^1 \quad x_{1\cdot 2}^1 \quad x_2^1$

Sämtliche sich auf die Bewegung des ordentlichen Budgets im ersten Jahr erstreckenden Variablen können in Funktionen der Basisvariablen (25) wie folgt ausgedrückt werden,

$$(26)\quad \overset{1}{c}_1 = \gamma_1 \left(\overset{1}{x}_{1\cdot 1} + \overset{1}{x}_{1\cdot 2}\right) \qquad \overset{1}{c}_2 = \gamma_2 \overset{1}{x}_2$$

$$(27)\quad \overset{1}{v}_1 = \nu_1 \left(\overset{1}{x}_{1\cdot 1} + \overset{1}{x}_{1\cdot 2}\right) \qquad \overset{1}{v}_2 = \nu_2 \overset{1}{x}_2$$

$$(28)\quad \overset{1}{m}_1 = \mu_1 \left(\overset{1}{x}_{1\cdot 1} + \overset{1}{x}_{1\cdot 2}\right) \qquad \overset{1}{m}_2 = \mu_2 \overset{1}{x}_2$$

dort, wo γ_i, ν_i, μ_i bekannte Proportionen (Input-Koeffizienten) sind.

Ebenso sind die Kapazitäten am Ende des ersten Jahres beziehungsweise zu Beginn des zweiten Jahres durch Funktionen der Basisvariablen auszudrücken, da sie durch (21) begrenzt sind. In Hinblick auf (6) erhalten wir

$$(29)\quad \overset{2}{\bar{c}}_i = \overset{1}{\bar{c}}_i + \overset{1}{x}_{1\cdot i} - \overset{1}{c}_i \qquad (i = 1,2)$$

Fügen wir hier für $\overset{1}{c}_i$ aus (26) ein, erhalten wir $\overset{2}{\bar{c}}_i$ ausgedrückt in Funktionen der drei Basisvariablen.

Von hier aus können wir in der gleichen Weise von einem Jahr zum anderen fortschreiten, indem wir in jedem Jahr t die drei neuen Basisvariablen anführen $\overset{t}{x}_{1\cdot 1}, \overset{t}{x}_{1\cdot 2}, \overset{t}{x}_2$.

Unter Annahme von T Planungsjahren ergibt sich eine Summe von

(30) 3 T unabhängigen Basisvariablen.

Die erwähnten 3 T Basisvariablen werden als unabhängig angesehen, haben aber freilich den auferlegten Ungleichheiten zu genügen.

Alle diese Ausdrücke sind linear. Folglich ist das Problem der Maximierung — sei es des Gesamtkonsums im letzten Planungsjahr, sei es des Gesamtkonsums über die gesamte Planungsperiode oder einiger anderer linearer Präferenzfunktionen — lediglich eines der linearen Programmierung mit 3 T Basisvariablen und einer sehr geringen Anzahl abhängiger Variablen. Ist T etwa 5 oder 7, wird dies für einen guten Computer, wie wir einen in Oslo besitzen, *allerhöchstens eine Angelegenheit von wenigen Minuten* sein. Selbst wenn wir eine beträchtliche Anzahl von Abteilungen, sagen wir 10, 20 oder 30, einführen, wird die Lösung einfach sein.

Bitte beachten Sie, daß wir hier keinerlei Versuch unternommen haben, die Diskrepanzen der vollkommen ausgewogenen Marxschen Gesetze so gering als möglich zu halten. *Dazu besteht absolut kein Grund,* was ich auch in meinem heutigen Gespräch mit Ihnen betont habe. Es ist eine optische Illusion, zu glauben, daß dadurch irgend etwas gewonnen werden könnte[5], und zwar ist das die gleiche optische Illusion wie jene des »ausgewogenen Wirtschaftswachstums«, von der ich mich auf der Tagung distanziert habe.

In der Praxis würde ich noch eine Reihe von Spezifizierungen empfehlen. Jedenfalls ist die einzige vernünftige Verfahrensweise die der mathematischen Programmierung, sei es der linearen oder nichtlinearen[6].

1 Dieser Artikel gibt mit nur geringfügigen stilistischen Änderungen einen Brief wieder, den Prof. Frisch nach der Konferenz des ESTÖ an Prof. Sabolovic (Zagreb) richtete und der vom Institut für Wirtschaftswissenschaften an der Universität Oslo im Mai 1965 veröffentlicht wurde.
Die Studie »*The Nonplex Method for Nonconvex Programming — With Numerical Examples*«, die Professor Frisch der Konferenz in Graz vorlegte, wurde neu bearbeitet und im Bericht 1965 der CIME (Centro Internazionale Matematico Estivo) veröffentlicht. Anm. d. H.

2 Die Funktion c + v + m drückt das Marxsche Wertgesetz aus, wonach sich der Wert einer Ware aus dem *konstanten* (toten) Kapital c (Geldsumme für die Produktionsmittel), dem *variablen* (lebendigen) Kapital v (Geldsumme für die Arbeitskraft) und dem sich aus dem variablen Kapital ergebenden *Mehrwert* (Profit) m zusammensetzt. Der Wert einer Ware am Ende des Produktionsprozesses ist somit c + v + m, Anmerkung der Herausgeber.

3 Hier wird angenommen, daß die Vergleichbarkeit von Umlauf- und Lagerkonzeption durch eine klare Definition der Meßeinheiten sichergestellt werden kann. Das Kapazitätskonzept wird wesentlich ausführlicher in einigen Memoranda des Wirtschaftswissenschaftlichen Instituts der Universität Oslo erörtert.

4 Siehe zum Beispiel Abschnitt 4.13 — 4.17 meiner Studien *An Implementation System for Optimal Economic Planning without Detailed Quantity Fixation from a Central Authority*, 1. Teil, *Prolegomena:* Auswahl. (Extrait des actes de la 3e Conférence Internationale de Recherche Operationelle, Oslo 1963)

5 Vorausgesetzt natürlich, daß das Ziel klar umschrieben ist, was im behandelten Fall, wo das Bundesparlament als solches Ziel eine Konsumerhöhung festgesetzt hat, zutrifft.

6 Der ökonomisch interessierte Leser sei noch auf weitere Arbeiten von Ragnar Frisch verwiesen:
Price-Wage-Tax-Subsidy Policies as Instruments in Maintaining Optimal Employment, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, März 1949;
L'emploi des modèles pour l'élaboration d'une politique rationelle, in: »Revue d'Economie Politique«, Tome 60, Paris 1950;
From National Accounts to Macro-Economic Decision Models, in: »Income and Wealth«, Series IV, ed. by M. Gilbert and R. Stone, London 1955;
The Mathematical Structure of a Decision Model: The Oslo Sub-Model, »Metroeconomica«, Vol. 7, 1955;
A Survey of Types of Economic Forecasting and Programming and a Brief Description of the Oslo Channel Model, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, Mai 1961;
Macro-Economics and Linear Programming, Memorandum from Institute of Economics,

University of Oslo, Jänner 1956;
Planning for India — Selected Explorations in Methodology, London-Calcutta 1960;
A Powerful Method of Approximation in Optimum Investment Computations of the Normal Type, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, Juni 1959;
Numerical Determination of a Quadratic Preference Function for Use in Macroeconomic Programming, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, Februar 1957;
A Method of Working out a Macroeconomic Planframe with Particular Reference to the Evaluation of Development Projects, Foreign Trade and Employment, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, Oktober 1958;
Generalities on Planning, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, Februar 1957;
An Implementation System for Optimal National Economic Planning Without Detailed Quantity Fixation from a Central Authority, Part I, Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo, Jänner 1963