5. august 2005
Aanund Hylland[#]

MATEMATISK KARAKTERISERING AV MANDATFORDELINGSMETODER

1 Innledning

I mange land, deriblant Norge, foregår politiske valg som forholdstallsvalg basert på (parti)lister. Når stemmene er avgitt, blir partiene tildelt mandater i forhold til den oppslutningen de har blant velgerne.

Siden mandater ikke kan deles, kan eksakt proporsjonalitet vanligvis ikke oppnås. Derfor er det behov for en metode som på en systematisk måte finner beste tilnærming til forholdsmessig fordeling. Det fins ingen metode som i denne sammenhengen entydig og utvilsomt kan sies å være den beste eller riktigste.

Dette notatet omtaler tre aktuelle metoder, som alle er eller har vært i bruk i mange land. Det er gitt matematiske karakteriseringer av metodene. Meningen er at disse skal tilsvare intuitive eller normative karakteriseringer, altså utsagn om at dersom forholdsmessighet blir forstått på en viss måte, blir dette best realisert ved en bestemt metode.

Notatet er på ingen måte fullstendig. Sammenhengen mellom de matematiske og de intuitive eller normative karakteriseringene er ikke forklart i detalj, og også ellers er mye relevant stoff utelatt.

[#] Professor i samfunnsøkonomi og beslutningsteori ved Universitetet i Oslo. Adresse: Økonomisk institutt, postboks 1095, Blindern, 0317 OSLO. Kontortelefon: 22 85 42 71. Telefaks: 22 85 50 35. Elektronisk post: aanund.hylland@econ.uio.no. Privattelefoner: 22 60 47 00 (hjemme), 952 75 685 (mobil).

2 Notasjon

Anta at k partier stiller til valg og n mandater skal fordeles. Her er k og n positive heltall. Tilfellet $k = 1$ er uinteressant, så vi antar $k \geq 2$.

La partienes stemmetall være gitt ved vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_k)$. Vi forutsetter $x_i > 0$ for alle $i = 1, 2, \ldots k$.[1]

En *situasjon* er en vektor $(k, n; x_1, x_2, \ldots x_k)$, altså en spesifisering av alle relevante data: antall partier, mandattall, stemmetall.

Sett $X = \sum_{i=1}^{k} x_i$. Da er $X > 0$. Definer vektoren $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_k)$ ved

$$y_i = x_i \frac{n}{X} \tag{1}$$

for $i = 1, 2, \ldots k$. Da er $\sum_{i=1}^{k} y_i = n$, og y_i er det "nøyaktige mandattallet" for parti i, altså partiets mandattall dersom man hadde kunnet foreta en eksakt proporsjonal fordeling uten hensyn til at mandattallene må være heltall.

En *mulig mandatfordeling* (for k partier og n mandater) er en vektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_k)$ av ikke-negative heltall der $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. For gitt k og n, la $T_{k,n}$ betegne mengden av mulige mandatfordelinger.

For et reelt tall a, la $\lfloor a \rfloor$ være a avrundet nedover, altså største heltall som ikke overstiger a. Dermed gjelder $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a$, med $\lfloor a \rfloor = a$ hvis og bare hvis a er et heltall. La videre $[a]$ betegne a avrundet (opp eller ned) til nærmeste heltall, slik at $a - ½ < [a] < a + ½$.[2]

3 Største brøks metode

Siden y_i er det nøyaktige mandattallet for parti i, kan det synes rimelig å la partiets faktiske mandattall være det heltallet som ligger nærmest dette, altså sette $r_i = [y_i]$ for $i = 1, 2, \ldots k$.

Problemet er at man ikke har noen garanti for at $\sum_{i=1}^{k} [y_i] = n$. Denne likheten gjelder ofte, men ikke alltid. Framgangsmåten fører altså ikke nødvendigvis til at det blir delt ut riktig antall mandater.

---

[1] Dersom $x_i = 0$, bør parti i åpenbart ikke vinne noe mandat. Man kan eliminere partiet fra diskusjonen og redusere k med 1.

[2] Dersom $a - ½$ er et heltall, er både $a - ½$ og $a + ½$ mulige verdier av $[a]$, og de strenge ulikhetene $a - ½ < [a] < a + ½$ kan ikke begge gjelde. Der det er aktuelt å beregne $[a]$, er det meget lite sannsynlig at dette tilfellet inntrer, og det er ikke diskutert videre.

Tanken om å velge r_i nær y_i kan modifiseres slik at man får en metode som fungerer. Den kalles *største brøks metode* og kan beskrives slik:

Beregn tallene $y_1, y_2, \ldots y_k$, jf. likning (1) i avsnitt 2. For parti i består y_i av en heltallsdel $\lfloor y_i \rfloor$ og en brøkdel $z_i = y_i - \lfloor y_i \rfloor$, der $0 \le z_i < 1$.

Gi i første omgang $\lfloor y_i \rfloor$ mandater til parti i, for $i = 1, 2, \ldots k$. Da er det i alt delt ut $m = \sum_{i=1}^{k} \lfloor y_i \rfloor$ mandater, slik at det gjenstår $h = n - m = \sum_{i=1}^{k} z_i$ mandater, der $0 \le h < k$. Tilfellet $h = 0$ er usannsynlig, siden det forutsetter at vektoren $\mathbf{y}$ består av bare heltall. I praksis har vi derfor $1 \le h \le k - 1$.

Finn de h partiene der brøkdelen z_i er størst. Gi ytterligere ett mandat til hvert av disse. Dermed er alle de n mandatene fordelt.[3]

La r_i^{SB} betegne antall mandater parti i blir tildelt ved denne metoden, og sett $\mathbf{r}^{SB} = \left(r_1^{SB}, r_2^{SB}, \ldots r_k^{SB}\right)$.

Ovenfor så vi at det ikke går an å fordele mandatene ved å minimere hvert partis avvik mellom nøyaktig og faktisk mandattall, altså minimere $|y_i - r_i|$ for hver i. Derimot kan det synes rimelig å måle avvik fra proporsjonalitet ved avstanden mellom *vektorene* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_k)$ og $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_k)$. Det leder til tanken om at man oppnår best proporsjonalitet ved å velge den $\mathbf{r}$ i $T_{k,n}$ som ligger nærmest $\mathbf{y}$.

Største brøks metode realiserer denne ideen.

Kanskje skulle man tro at det har betydning hvordan avstand mellom vektorer blir målt. Det viser seg imidlertid at mange ulike avstandsmål gir samme resultat. Vi får største brøks metode både dersom avstanden mellom $\mathbf{y}$ og $\mathbf{r}$ blir målt ved ”absoluttverdinormen” $\sum_{i=1}^{k} |y_i - r_i|$, og dersom vi bruker vanlig (euklidsk) avstand.

En mer generell påstand gjelder: La $p \ge 1$ være et reelt tall, og definer avstanden mellom $\mathbf{y}$ og $\mathbf{r}$ ved

(2) $$d_p(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i - r_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Det elementet i $T_{k,n}$ som minimerer avstanden til $\mathbf{y}$, er $\mathbf{r}^{SB}$. Dette gjelder for enhver $p \ge 1$. Absoluttverdinormen tilsvarer $p = 1$ og euklidsk avstand tilsvarer $p = 2$.[4]

[3] Vi ser bort fra det usannsynlige tilfellet at brøkdeler er like på noe avgjørende punkt.

[4] Siden det er forutsatt at p er et reelt tall, er tilfellet $p = \infty$ ikke dekket. Det er vanlig å definere $d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{r})$ = maksimum $_{i = 1, 2, \ldots k}$ $|y_i - r_i|$. Så lenge vi bare ser på tilfeller der minimering av avstand gir entydig mandatfordeling, vil også dette avstandsmålet lede til største brøks metode.

4 Sainte-Laguës metode (oddetallsmetoden)

Framstillingen i avsnitt 3 kan lett gi inntrykk av at største brøks metode er den mest naturlige prosedyren for forholdsmessig mandatfordeling. Det er relativt enkelt å beskrive metoden, og den har flere gunstige egenskaper.

Det er imidlertid også alvorlige problemer knyttet til metoden. Den har en del urimelige egenskaper, og den mest slående av disse er at den ikke er *monoton* i *n*. Det kan tenkes at dersom man *øker* antall mandater, mens de deltakende partiene og deres stemmetall er uendret, vil noen partier *tape* mandat.[5]

Derfor er det aktuelt å introdusere en annen metode, *Sainte-Laguës metode* eller *oddetallsmetoden*.[6] Den har ikke disse problemene, men er ellers ganske lik største brøks metode. I de fleste situasjoner gir de to metodene samme mandatfordeling, og også der de ikke gir nøyaktig samme resultat, er forskjellen som regel liten.

For å finne mandatfordelingen ved Sainte-Laguës metode, går man fram slik:

Divider hvert partis stemmetall med oddetallene 1 – 3 – 5 – 7 osv. Gi første mandat til det partiet som har den største kvotienten, gi andre mandat til det partiet som har den nest største kvotienten, og fortsett på denne måten inntil alle de *n* mandatene er fordelt.[7]

La r_i^{SL} være antall mandater parti *i* blir tildelt ved Sainte-Laguës metode, og sett $\mathbf{r}^{SL} = \left(r_1^{SL}, r_2^{SL}, \ldots r_k^{SL}\right)$.

[5] Mer generelt er største brøks metode ikke *konsistent*. For å forklare dette begrepet, la oss ta utgangspunkt i en bestemt situasjon (k, n; x_1, x_2, ... x_k) og anta at parti *i* får flere stemmer, altså at x_i øker, mens alt annet – antall partier, antall mandater, stemmetallene til de øvrige partiene – er uendret. Da kan det naturligvis tenkes at r_i øker, og i så fall må r_j bli redusert for minst en $j \neq i$, men det er også mulig at økningen i x_i er for liten til å få noen virkning for r_i. I siste tilfelle skulle vi vente at det heller ikke skjer noen endring i resten av mandatfordelingen. Dette er kravet til konsistens, og det er ikke oppfylt av største brøks metode.

[6] Metoden ble foreslått tidlig på 1900-tallet av den franske matematikeren André Sainte-Laguë.

[7] Vi ser bort fra det usannsynlige tilfellet at kvotienter er like på noe avgjørende punkt.

I avsnitt 3 ovenfor er største brøks metode begrunnet med at den minimerer avstanden mellom **y** og **r**. Da er oppmerksomheten konsentrert om *partiene*. Det som skal minimeres, er avstanden mellom deres nøyaktige mandattall og faktiske representasjon. Et alternativ er å konsentrere oppmerksomheten om *velgerne*. Om parti i har fått x_i stemmer og vinner r_i mandater, kan man si at hver av partiets velgere har bidratt til å velge $\frac{r_i}{x_i}$ representant, mens $\frac{n}{X}$ er det tilsvarende tallet for alle velgere i gjennomsnitt. I den grad disse tallene er forskjellige, har de som har stemt på parti i ikke samme innflytelse som en gjennomsnittlig velger. De har større innflytelse enn gjennomsnittet dersom $\frac{r_i}{x_i} > \frac{n}{X}$ og mindre enn gjennomsnittet ved motsatt ulikhet. Begge deler kan ses på som urettferdig. Et mål på "grad av urettferdighet" kan være summen av kvadratavviket mellom $\frac{r_i}{x_i}$ og $\frac{n}{X}$. Det skal summeres over alle *velgere*, slik at summen blir

(3) $$\sum_{i=1}^{k} x_i \left(\frac{r_i}{x_i} - \frac{n}{X} \right)^2 .$$

Oppgaven blir derfor å finne den $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_k)$ i $T_{k,n}$ som minimerer (3). I og med at $\sum_{i=1}^{k} x_i = X$ og $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, er (3) lik

(4) $$\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{x_i} - \frac{n^2}{X} .$$

Siste ledd i (4) avhenger ikke av **r** og kan sløyfes. Altså skal man minimerer

(5) $$\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{x_i} .$$

Det elementet i $T_{k,n}$ som minimerer (5), er $\mathbf{r}^{SL}$. Resonnementet leder altså til Sainte-Laguës metode.[8]

Her har det betydning at man minimerer summen av *kvadratavvikene* mellom $\frac{r_i}{x_i}$ og $\frac{n}{X}$. Minimering av $\sum_{i=1}^{k} x_i \left| \frac{r_i}{x_i} - \frac{n}{X} \right|$ gir største brøks metode. Dette uttrykket er lik $d_1(\mathbf{y}, \mathbf{r})$, jf. definisjonen av d_p (likning (2) i avsnitt 3).

Resonnementet ovenfor er basert på sammenlikning mellom en velger som har stemt på et bestemt parti, og en gjennomsnittlig velger. Et alternativ er å

[8] Dette var Sainte-Laguës opprinnelige motivering av metoden.

betrakte to velgere som har stemt på hvert sitt parti. I den grad $\frac{r_i}{x_i}$ og $\frac{r_j}{x_j}$ er forskjellige, får velgere som har stemt på partiene *i* og *j* ulik uttelling for sine stemmer. Differansen $\left|\frac{r_i}{x_i} - \frac{r_j}{x_j}\right|$ kan være et mål på graden av ulik uttelling. Dersom det er mulig å redusere denne differansen ved å overføre et mandat fra parti *i* til parti *j*, altså dersom $r_i \geq 1$ og

(6) $$\left|\frac{r_i}{x_i} - \frac{r_j}{x_j}\right| > \left|\frac{r_i - 1}{x_i} - \frac{r_j + 1}{x_j}\right|,$$

bør slik overføring skje.

Dersom det ikke fins noe par av partier der dette kriteriet taler for at et mandat bør overføres fra det ene partiet til det andre, er mandatfordelingen *balansert*. Formelt er $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_k)$ i $T_{k,n}$ balansert dersom (6) ikke gjelder for noe par av partier *i* og *j* der $i \neq j$ og $r_i \geq 1$.[9]

Mandatfordelingen $\mathbf{r}^{SL} = \left(r_1^{SL}, r_2^{SL}, \ldots r_k^{SL}\right)$, altså den fordelingen man får ved å anvende Sainte-Laguës metode, er balansert. Videre er $\mathbf{r}^{SL}$ eneste balanserte mandatfordeling.

Ytterligere et resonnement tar utgangspunkt i at man skal finne en "pris" per mandat, målt i stemmer, og tildele mandater på det grunnlaget. Idealet er at alle mandater, så langt det er mulig, skal koste det samme.

Denne ideen kan konkretiseres på følgende måte:

Velg et positivt tall Q_{SL}, som i utgangspunktet er vilkårlig, men som vi (forsøksvis) skal betrakte som prisen per mandat.[10] Divider stemmetallene på Q og avrund svarene til nærmeste heltall. For $i = 1, 2, \ldots k$ blir altså parti *i* (forsøksvis) tildelt mandattallet $r_i = \left[\frac{x_i}{Q_{SL}}\right]$. Her er r_i et ikke-negativt heltall, men for vilkårlig Q_{SL} er det ikke sikkert at $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Når

[9] Legg merke til at resonnementet utelukkende består i å se på to partier om gangen og vurdere overføring av et mandat mellom disse. Selv om mandatfordelingen er balansert, kan det tenkes at avstanden mellom r_i/x_i og r_j/x_j kan reduseres ved å gjøre en endring i mandatfordelingen som også involverer andre partier enn *i* og *j*. Det fins situasjoner der en balansert mandatfordeling ikke minimerer avstanden mellom største og minste verdi av r_i/x_i.

[10] Det er naturlig i første omgang å forsøke seg med $Q_{SL} = X/n$, altså gjennomsnittlig antall stemmer per mandat. Da blir $x_i/Q_{SL} = y_i$ for $i = 1, 2, \ldots k$.

$\sum_{i=1}^{k} r_i < n$, er Q_{SL} for stor og må reduseres, og tilsvarende ved motsatt ulikhet. Imidlertid kan Q_{SL} alltid velges slik at $\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{x_i}{Q_{SL}} \right] = n$.[11]

Det kan vises at da blir $\left[\frac{x_i}{Q_{SL}} \right] = r_i^{SL}$ for $i = 1, 2, \ldots k$.

Så langt det er mulig, sørger altså Sainte-Laguës metode for at alle partier betaler samme pris, målt i stemmer, for sine mandater.

5 d'Hondts metode (største gjennomsnitts metode)

Tanken om at alle mandater, så langt det er mulig, skal koste det samme, kan presiseres på flere måter. Dette gir opphav til ytterligere en metode for mandatfordeling, kalt *d'Hondts metode* eller *største gjennomsnitts metode*.[12]

For å finne mandatfordelingen ved d'Hondts meotde, går man fram slik:

Divider hvert partis stemmetall med tallene 1 – 2 – 3 – 5 osv. Gi første mandat til det partiet som har den største kvotienten, gi andre mandat til det partiet som har den nest største kvotienten, og fortsett på denne måten inntil alle de n mandatene er fordelt.[13]

La r_i^{dH} være antall mandater parti i blir tildelt ved d'Hondts meotde, og sett $\mathbf{r}^{dH} = \left(r_1^{dH}, r_2^{dH}, \ldots r_k^{dH} \right)$.

Forskjellen mellom d'Hondts og Sainte-Laguës metoder er ikke dramatisk, selv om den er større enn forskjellen mellom største brøks metode og Sainte-Laguës metode.

Ved sammenlikning av d'Hondts og Sainte-Laguës metoder kan man imidlertid alltid si hvilken vei forskjellen går: Dersom de to metodene i en gitt situasjon gir forskjellig mandatfordeling, er d'Hondts metode alltid gunstigst for store partier. For å uttrykke det formelt og nøyaktig: Dersom de to metodene i situasjonen (k, n; x_1, x_2, ... x_k) gir mandatfordelinger

---

[11] Det er normalt et visst slingringsmonn i valg av Q_{SL}, men mandatfordelingen blir entydig bestemt (unntatt i det usannsynlige tilfellet omtalt i note 7). — Det er viktig at x_i/Q_{SL} blir avrundet til nærmeste heltall. Dersom man i stedet avrunder x_i/Q_{SL} nedover, altså setter $r_i = \lfloor x_i/Q_{SL} \rfloor$, blir resultatet en annen metode, se avsnitt 5.

[12] Metoden ble foreslått på slutten av 1800-tallet av belgieren Victor d'Hondt.

[13] Vi ser bort fra det usannsynlige tilfellet at kvotienter er like på noe avgjørende punkt.

$\mathbf{r}^{dH} = \left(r_1^{dH}, r_2^{dH}, \ldots r_k^{dH}\right)$ og $\mathbf{r}^{O} = \left(r_1^{O}, r_2^{O}, \ldots r_k^{O}\right)$, der $r_i^{dH} > r_i^{O}$ og $r_j^{dH} < r_j^{O}$, må vi ha $x_i > x_j$.

I avsnitt 4 så vi på tallene $\frac{r_i}{x_i}$, som er et mål for hvor mange representanter, eller snarere hvor stor andel av en representant, hver person som har stemt på parti i, har bidratt til å velge.

Alternativt kan man se på $\frac{x_i}{r_i}$, altså hvor mange stemmer som står bak hvert mandat vunnet av parti i. Her er det et problem at vi kan ha $r_i = 0$, slik at $\frac{x_i}{r_i}$ blir uendelig (eller egentlig udefinert). Dersom målet bokstavelig er å gjøre disse tallene mest mulig like, må man sørge for at $r_i > 0$ for alle i, og det er neppe rimelig. Mer fornuftig er det å si at man må regne med at det vil finnes partier som ikke har nok stemmer til å bli representert, dvs. det vil finnes verdier av i slik at $\frac{x_i}{r_i}$ er uendelig. Da minimerer man variasjonen blant disse tallene ved å sørge for at det minste av dem blir størst mulig. Man velger altså den $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_k)$ i $T_{k,n}$ som maksimerer

(7) $$\text{minimum}_{\,i=1,2,\ldots,k} \frac{x_i}{r_i},$$

Dette gir d'Hondts metode.

Man kan også betrakte $\frac{x_i}{r_i}$, antall stemmer per mandat for parti i, som et mål på styrken i det kravet parti i har på å få sitt mandat nr. r_i. Anta at $r_j \geq 1$ og

(8) $$\frac{x_i}{r_i + 1} > \frac{x_j}{r_j}$$

Da har parti i etter dette kriteriet et sterkere krav på å vinne sitt mandat nr. nr. $r_i + 1$ enn parti j har på å beholde sine r_j mandater, og det er rimelig at et mandat blir overført fra parti j til parti i. Vi kan si at en mandatfordeling $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_k)$ i $T_{k,n}$ er *akseptabel* dersom (8) ikke gjelder for noe par av partier i og j der $i \neq j$ og $r_j \geq 1$.

Med denne definisjonen er mandatfordelingen $\mathbf{r}^{dH} = \left(r_1^{dH}, r_2^{dH}, \ldots r_k^{dH} \right)$, altså den fordelingen man får ved å anvende d'Hondts metode, akseptabel. Videre er $\mathbf{r}^{dH}$ eneste akseptable mandatfordeling.

Metoden kan også begrunnes med et resonnement tilsvarende det som ble gjennomført i siste del av avsnitt 4, med en liten – men viktig – endring.[14] Igjen er utgangspunktet at det skal finnes en "pris" per mandat, målt i stemmer, og idealet er at alle mandater, så langt det er mulig, skal koste det samme.

Velg et positivt tall Q_{dH}, som i utgangspunktet er vilkårlig, men som vi (forsøksvis) skal betrakte som prisen per mandat. Divider stemmetallene på Q_{dH} og trunker svarene, altså avrund dem *nedover* til nærmeste heltall. For i = 1, 2, ... k blir altså parti i (forsøksvis) tildelt mandattallet $r_i = \left\lfloor \frac{x_i}{Q_{dH}} \right\rfloor$. Her er r_i et ikke-negativt heltall, men for vilkårlig Q_{dH} er det ikke sikkert at $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Når $\sum_{i=1}^{k} r_i < n$, er Q_{dH} for stor og må reduseres, og tilsvarende ved motsatt ulikhet. Imidlertid kan Q_{dH} alltid velges slik at $\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{Q_{dH}} \right\rfloor = n$.

Det kan vises at da blir $\left\lfloor \frac{x_i}{Q_{dH}} \right\rfloor = r_i^{dH}$ for i = 1, 2, ... k.

[14] Det var visstnok slik d'Hondt opprinnelige beskrev metoden.